

## **GRUPO DE APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA**

Coordinadora: **María Luisa Fiol** , *Universidad Autónoma de Barcelona*

Las cinco ponencias programadas para su presentación y defensa en las dos sesiones de trabajo del VI Simposio de la SEIEM se habían enviado previamente a los componentes del grupo. Así y todo se consideró oportuno disponer de fotocopias no sólo del programa sino también de estos trabajos, en previsión de la presencia en estas sesiones de trabajo de nuevos participantes.

Posteriormente a un breve saludo inicial se recordó el acuerdo adoptado de limitar a 15 o 20 minutos la exposición de cada ponencia para intentar dar después y en cada caso unos 10 minutos para entrar en debate.

*En la primera sesión de trabajo, el jueves día 12 de septiembre, se presentaron las tres ponencias siguientes:*

## 1. "El Aprendizaje Colaborativo y la Demostración Matemática"

*Ponentes: José Francisco Martín, Jesús Murillo (Univ. de la Rioja) y Josep M. Fortuny (Univ. Autónoma de Barcelona).*

José Francisco empezó por hablar del aprendizaje colaborativo. Los métodos tradicionales de enseñanza contemplan la clase como un entorno en el que el papel del profesor se reduce simplemente a dar información a los estudiantes y en la que los objetivos y metas planteados han de conseguirse individualmente por los alumnos, situación que contrasta con la clase en la que se trabaja de forma cooperativa/colaborativa. El aprendizaje cooperativo se refiere a un método de instrucción en el que los estudiantes trabajan conjuntamente en grupos para alcanzar metas comunes. Los alumnos ayudan a otros para que "todos" puedan alcanzar en alguna medida el éxito. En la clase de trabajo cooperativo el centro es el estudiante y se considera al profesor como un facilitador y guía del aprendizaje y a los estudiantes como buscadores de información.

Puntualizó que tal como señalan Scardamalia y Bereiter (1992): *"Los estudiantes necesitan aprender profundamente y aprender cómo aprender, cómo formular preguntas y seguir líneas de investigación, de tal forma que ellos puedan construir su propio conocimiento a partir de lo que conocen. El conocimiento propio que es discutido en grupo, motiva la construcción de nuevo conocimiento"*.

En su trabajo hacen un análisis epistemológico del concepto de demostración matemática y de su importancia en el desarrollo de la capacidad de razonamiento de nuestros alumnos y en la adquisición del conocimiento matemático. Por otra parte dan una visión de la situación actual de las investigaciones acerca de la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática, y plantean su propuesta de lo que entienden por demostración en la educación matemática. Se realiza un análisis de dos experiencias de demostración llevadas a cabo con medios informáticos.

Es objetivo central de su investigación, a partir de información recogida sobre alumnos reales y utilizando un entorno de *trabajo colaborativo* apoyado en medios informáticos, analizar los beneficios cognitivos que se producen en los alumnos, en relación a su capacidad de entender y producir demostraciones matemáticas.

**2. "Los conceptos Trigonométricos: Estudio exploratorio transversal realizado con alumnos de enseñanza Básica, Media y Superior"**

**Ponentes: Ana M. Figueiredo Antunes (Instituto Beja, Portugal)**

**Ricardo Luengo Gonzáles (Universidad de Extremadura)**

En el trabajo de investigación presentado se analiza y compara el dominio de conceptos trigonométricos, que presentan los alumnos de Enseñanza Básica, Secundaria y Superior. Cataloga el tipo de esquemas/representaciones presentados y verifica si su presencia, en las respuestas dadas por alumnos de diferentes niveles de enseñanza, tiene influencia en su destreza en la resolución de problemas trigonométricos. Así mismo se analizan y catalogan las opiniones de los alumnos, de los distintos cursos, respecto a la importancia y utilidad del estudio de la trigonometría.

Para la obtención de los datos, se han elaborado y aplicado un instrumento de investigación: un test, con diferentes tipos de preguntas, igual para todos los alumnos, de los diferentes niveles de enseñanza, que constituyeron la muestra.

De la análisis de datos se concluyó que:

i) el dominio de conceptos trigonométricos depende del año lectivo a que pertenecen hasta al 12º año. Cuando encuestamos a los alumnos del 1º y 2º años, el nivel de conocimientos en este dominio disminuyó.

ii) generalmente, la presencia de esquemas contribuyó a una mejor interpretación de problema y está asociada a respuestas correctas, a

pesar de haber existido situaciones en las que los alumnos no necesitaron recurrir a esquemas para resolver el problema correctamente.

iii) de las opiniones de los alumnos, respecto a la importancia y utilidad del estudio de la trigonometría, se destaca un mayor número de respuestas relacionadas con el contexto del alumno en detrimento de las respuestas relacionadas con factores científicos.

### **3. "Analizadores específicos para la demostración matemática. Aplicación a los textos en el tema de trigonometría, en Bachillerato"**

*Ponentes: Marcelino J. Ibañes y Tomás Ortega, (Universidad de Valladolid).*

Aquí se da cuenta de algunos analizadores específicos para el tratamiento de la demostración, y se aplican a los libros de texto de Matemáticas I, de primer curso de Bachillerato, en el tema de Trigonometría.

Se consideran los siguientes analizadores específicos: Clase de justificación utilizada (*esquemas de prueba y niveles de demostración*) y *técnicas empleadas –método, estilo y modo-*. Valoración de las *funciones* que cumple la prueba empleada y *reconocimiento de procesos (distinción e identificación)*. Consecuencias. Uso de *expresiones* usuales y específicas, *idea global* del proceso seguido y *significado* de teorema e *interpretaciones*, etcétera. Entre las reflexiones deducidas del análisis destacan éstas: Casi siempre se trata de demostraciones más o menos completas y rigurosas. No se emplea otro *método* que el de *silogismo* (aunque, a veces, se consideran *casos*) y los *estilos* son uniformes en cada teorema. Los libros de texto consultados no hacen ningún comentario acerca de las *funciones* que cumplen las demostraciones expuestas. La intención que se observa es la de simple *verificación*. No hay comentarios explícitos con el fin de llamar la atención sobre la clase de razonamiento que se hace, sus características, y sus efectos, o para distinguirlo de otras posibles justificaciones. La muestra más clara, en este sentido, que se encuentra en los textos, es la referencia al proceso, o

su titulación, como una “demostración”. En muchos casos ni siquiera se califica el procedimiento empleado y en ningún caso se ha encontrado una explicación global del proceso, es decir, ninguna explicación de las líneas generales que se han seguido, lo que resulta fundamental para su comprensión... En resumen, parece que existe cierta preocupación por demostrar los teoremas como si se tratara de un trámite obligado y no ser acusados de falta de rigor, pero se emplean pocos recursos en hacer comprensibles esas demostraciones, en prevenir errores y dificultades, en acudir a las fuentes, en diseñar materiales de apoyo, en resaltar sus características, en detenerse en sus razonamientos, en reconocer sus técnicas, en destacar sus funciones, y en potenciar su utilización.

*En la segunda sesión el día 14 de septiembre se presentaron las dos ponencias siguientes:*

**4. "Las isometrías en el currículo de la ESO en Galicia. Análisis de una evaluación"**

**Ponente:** *Teresa Fernández Blanco* (Universidad de Santiago de Compostela)

El objetivo de la presente ponencia es analizar el tratamiento del tema de las isometrías del plano que se hace en las clases de matemáticas de 2º ciclo de la ESO en la comunidad gallega.

Los resultados presentados en este trabajo son fruto de un análisis que ha comprendido, principalmente, cuatro frentes:

El examen del DCB vigente para esta etapa de la enseñanza, estudiando la presencia de contenidos relativos a este tema en el mismo y la importancia dada a dicho tema, que se refleja en los objetivos y criterios de evaluación contenidos en dicho documento.

El estudio del enfoque que se hace de las isometrías en los diferentes libros de texto de las editoriales con más presencia en las aulas gallegas. Es un hecho conocido que muchos de los profesores de estos niveles adaptan sus enseñanzas en gran medida al libro de texto que usan,

por lo que este estudio (complementado por el resto del trabajo) ha sido de gran ayuda para conocer el tratamiento que los profesores dan a este tema.

El tercer punto sobre el que hemos trabajado concierne a las creencias del profesorado, para lo que se ha elaborado un cuestionario que ha sido respondido por profesores de secundaria de la comunidad gallega. Varios de los ítems del cuestionario hacían referencia a la importancia que se daba al tratamiento de este tema dentro del currículum, los materiales didácticos utilizados y el uso de recursos informáticos como apoyo a la misma.

Por último se pasó un cuestionario a alumnos de diferentes centros, públicos y privados, de las cuatro provincias gallegas con el fin de conocer sus competencias en el tema tratado, las estrategias que utilizan para enfrentarse a situaciones concretas, los obstáculos de aprendizaje con que se encuentran y su valoración personal sobre los problemas propuestos. Como complemento a este último punto, se analizó la evolución de un grupo de alumnos con los que se utilizó un recurso informático (el GEOCLIC) como apoyo en la enseñanza de las isometrías, haciendo un estudio cualitativo de errores y obstáculos de aprendizaje.

### 5. *"La capacidad Espacial en la Educación Matemática"*

*Ponente: Modesto Arrieta (Universidad del País Vasco).*

Línea de investigación presentada y aprobada en el programa de Doctorado de Psicodidáctica de la Universidad del País Vasco.

A la finalidad de la Matemática en la enseñanza obligatoria, además de las más generales y comunes con otras áreas, se le reconocen dos más específicas como son:

- La mejora de las capacidades intelectuales, como la capacidad numérica, espacial o de razonamiento lógico.

- Ser instrumento básico y necesario para otras áreas: Por su precisión en el lenguaje, por la riqueza de sus representaciones y por la potencia de la demostración como modelo de argumentación.

Nosotros vamos a incidir en la capacidad espacial y en el contenido matemático que mejor se asocia a dicha capacidad, como es la geometría.

El objetivo de la línea de investigación consiste en desentrañar los mecanismos que rigen la capacidad espacial y su desarrollo, y paralelamente el de la geometría, para poder hacer propuestas coherentes y eficaces de geometría que impulsen la mejora de la capacidad espacial.

Trabajaremos paralelamente tres temáticas particulares:

El primer modelo ha de responder a la cuestión de qué es la capacidad espacial: concepto, factores, componentes, estrategias de resolución de tareas espaciales...., todo aquello que nos permita diagnosticar la capacidad espacial de los sujetos: la estructura factorial de Carroll y la teoría de los tres estratos, las componentes de Sternberg y las estrategias de Lohman. Los mismos conceptos con diferente nombre o diferentes conceptos con el mismo nombre es tan habitual que cualquier intento de avanzar en el tema es imposible si no es en base a un modelo teórico con justificación empírica.

La segunda temática particular ha de responder a las siguientes cuestiones ¿Cómo se desarrolla la capacidad espacial? ¿Cómo se desarrollan las nociones y conceptos geométricos asociados a dicha capacidad espacial? Los modelos de referencia son los trabajos de Piaget y seguidores. y los trabajos de Van Hiele y seguidores. Los conceptos o nociones estudiados ¿ son todos los que están?, ¿están todos los que son?. El análisis que se hace de cada noción, concepto o familia de conceptos ¿es suficiente? ¿se podrían categorizar los objetivos?

La finalidad última de la línea de investigación es impulsar la mejora de la capacidad espacial de los alumnos y para ello deberemos hacer propuestas didácticas eficaces de geometría. Esta es la tercera

temática particular: ¿qué condición ha de cumplir a priori una propuesta?. Ha de tener en cuenta la interacción sujeto-contenido y por lo menos debemos de utilizar estos modelos de referencia: Las situaciones didácticas de Chevallard, los errores, los recursos como el entrenamiento, los materiales manipulativos, el ordenador,...

### *Se incorporaron al grupo de investigación en el Aprendizaje de la Geometría:*

Germán Torregrosa Gironés de la Universidad de Alicante; M<sup>a</sup> del Sagrario Simarro Fernández de la Univ.Complutense de Madrid; María Alexandra de Oliveira Gomes, de la Univ. do Minho; José Francisco Martín Olarte de la Univ. de la Rioja; María Peñas Troyano de la Universidad de Granada; Ana M<sup>a</sup> Figueiredo Antúnez del Instituto Beja de Portugal y Marcelo Almeida Bairral de la Universidad Federal Rural de Rio de Janeiro.