Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

ALGUNAS SOLUCIONES AL PROBLEMA DE BERNOULLI DE LAS SUMAS DE POTENCIAS

SOME SOLUTIONS TO THE BERNOULLI'S POWER SUM PROBLEM

Juan Carlos Ávila Mahecha, Edward Steven Camelo Castillo
Universidad Sergio Arboleda. (Colombia)
juan.avila@usa.edu.co, edward_scc@hotmail.com

Resumen
Este artículo expone algunos referentes teóricos sobre las matemáticas elementales y la resolución de problemas como método para lograr estudiarlas, hacerlas y generarlas. Se presenta algunas soluciones dadas por el Grupo Yaglom de la Universidad Sergio Arboleda de Bogotá, Colombia, al *problema de Bernoulli de las sumas de potencias*. El propósito del trabajo es que este tipo de problemas se constituyan en avances para la configuración de cursos del Programa de Talentos de la Universidad Sergio Arboleda y de esta forma contribuyan con la construcción de ejemplos de matemáticas elementales que puedan llevarse a cabo con estudiantes talentosos. Como resultados preliminares de esta construcción nacieron algunas actividades a partir de las soluciones que los integrantes del Grupo, estudiantes y profesor dieron al problema de Bernoulli como rutas de acceso iniciales para el planteamiento de los cursos que se mencionan.

Palabras clave: matemática elemental, resolución de problemas

Abstract
This paper exposes some theoretical referents about elementary mathematics and the problems solving as a method to be able to study it, do it and generate it. It presents some solutions given by the Yaglom Group of the Sergio Arboleda University of Bogotá, Colombia, to the *Bernoulli's power sum problem*. The purpose of this work and this type of problems are to establish an advances configuration of the courses for the Talents Program of the Sergio Arboleda University and in this way contribute with the construction of examples of elementary mathematics that can be applied out with talented students. As preliminary results of this construction some activities were born from the solutions that the members of the Group, students and professor, gave to the problem of Bernoulli as initial access to the approach the mentioned courses.

Key words: elementary mathematics, problem solving

Introducción

En la Universidad Sergio Arboleda de Bogotá Colombia, existe, desde hace más de diez años, el *Programa de Talentos Matemáticos*. Este Programa busca potenciar el talento de niños y jóvenes de educación básica, media y media vocacional interesados por las matemáticas.

Lograr satisfacer las necesidades de conocimientos matemáticos en niños talentosos (de las matemáticas) dentro de una escuela, es en general una tarea difícil. En primer lugar, porque si bien los profesores logran identificar a estos talentos resulta complicado dedicarles una atención especial en clase sin desatender al resto de los estudiantes, y en segundo, debido al avance que muestran los alumnos talentosos, puede que los profesores agoten sus ideas y actividades matemáticas con rapidez. Por eso, en el año 2002 se inició el proyecto llamado *El semicírculo de la Universidad Sergio Arboleda* (Pérez, Núñez, Bustamante, Cortés, Duarte, Losada y Vergara, 2012) el cual buscó mitigar un poco estos problemas en la ciudad de Bogotá; proporcionando a estudiantes, profesores y padres de familia una opción académica a través de la cual enseñar matemáticas a niños talentosos en un contexto universitario. Por tanto, la creación y puesta en marcha de actividades matemáticas fue la tarea principal del proyecto, donde áreas como la teoría de números, la geometría, la teoría de conjuntos, el álgebra, la historia de las matemáticas, entre otras, se constituyeron en fuente de investigación para los docentes involucrados en el proyecto.

Debido al éxito del Programa y de que varios de sus estudiantes comenzaron a interesarse profesionalmente por las matemáticas, ingresando a estudiar la carrera en la Universidad, muchos de ellos sintieron la necesidad de retribuirle a la Universidad y a otros estudiantes la oportunidad brindada por el Programa, con lo cual, en el año 2010 se fundó el semillero de investigación, *Grupo Yaglom* (en honor al profesor Isaak Yaglom (1921-1988)) de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda, conformado por profesores y alumnos de la Universidad interesados en estudiar teorías matemáticas elementales, bajo la dirección de profesores de la Escuela, con el propósito de diseñar y evaluar actividades que pudieran constituirse en cursos para el Programa de Talentos.

En la actualidad, el Grupo Yaglom sigue trabajando bajo sus principios y es por ello que en el presente documento se expone un ejemplo de trabajo desarrollado durante el primer semestre de 2018, alrededor de la solución del problema de Bernoulli de la suma de potencias (Dörrie, 1965). Otros ejemplos de temáticas que se han estudiado y puesto en práctica alrededor de las matemáticas elementales en el Grupo y en los cursos del Programa son:

- Didáctica gaussiana o aritmética modular.
- Didáctica pitagórica.
- Teoría de números: Los números naturales, enteros, teorema fundamental de la aritmética, algunas funciones numéricas como número de divisores de un número, suma de divisores de un número, función ϕ de Euler.
- Combinatoria.
- Teoría de grafos.
- Geometría reticular
- Álgebra finita: grupos.
- Lógica: los 16 conectivos lógicos de Peirce y su relación con la teoría de conjuntos.
- Teselaciones del plano.

En este documento, también se exponen algunos fundamentos teóricos sobre la matemática elemental (Pérez, 2007), que es la desarrollada en los cursos del Programa de Talentos y estudiada en el Grupo Yaglom, así como algunos referentes sobre la metodología adoptada para hacer matemáticas elementales, la resolución de problemas.

Con el propósito de determinar si el problema que se expondrá en el presente artículo es un ejemplo de matemática elemental, es importante, en primer lugar, mostrar los resultados que los estudiantes del Grupo Yaglom lograron alrededor del estudio del problema, esto con el fin de configurar actividades que puedan luego proponerse a los estudiantes de un posible curso del Programa de Talentos Matemáticos. Por tanto, en este documento solo se mostrará esta primera parte, los desarrollos logrados por los estudiantes del semillero.

Marco teórico–metodológico

Cuando se piensa en la palabra “elemental”, generalmente se piensa como sinónimo de fácil, trivial, sencillo, obvio, evidente. En las matemáticas, la palabra “elemental” se puede corresponder, por ejemplo, con los fundamentos de alguna de las áreas que tienen las matemáticas como ciencia: elementos de geometría, teoría elemental de números, teoría elemental de conjuntos, cálculo elemental, entre otras. Entonces, ¿qué es la matemática elemental? El profesor ruso Isaak Yaglom (1921-1988), experto en matemáticas elementales y precursor del proyecto internacional de olimpiadas matemáticas, propone una definición sobre matemática elemental, como aquella que se puede trabajar con estudiantes y profesores de las escuelas y los colegios (Yaglom, 1981). Al analizar esta definición se destaca que:

- La matemática elemental no es necesariamente la que se puede enseñar en las escuelas o colegios, puede ir más allá de las matemáticas escolares.
- La matemática elemental tampoco es, necesariamente, la matemática escolar.
- La decisión de si cierta matemática es elemental o no, depende de la experimentación en un determinado tema, concepto u objeto de las matemáticas. Se dice que es elemental si no surge de una mera especulación o por imposición de los currículos de matemáticas definidos por un país o institución; sino, experimentando con los estudiantes y maestros actividades matemáticas para la construcción de conocimientos matemáticos (Luque, Mora y Torres, 2006).

Esta definición sugiere además las siguientes implicaciones a la hora de hacer exploraciones sobre matemáticas elementales:

- El “se puede trabajar” equivale a expresiones como “se puede construir o reconstruir” (Pérez, 2007), esto quiere decir que se construye conocimiento matemático en conjunto con estudiantes y profesores, no necesariamente inédito.
- El trabajo matemático elemental tiene todas las cualidades del trabajo matemático superior y avanzado: se manejan teorías, se formulan conjeturas, se buscan ejemplos y contraejemplos, se demuestran teoremas, se buscan aplicaciones, se formulan problemas, etc. (Pérez, 2007, p. 122).
- En los procesos de construcción involucrados en las matemáticas elementales, participan estudiantes cuyos prerrequisitos matemáticos no deben ser muchos, por tanto, los objetos o conceptos con los cuales se trabajan, deben poderse introducir con poco, o nada, de conocimientos previos.

El medio a través del cual se ha logrado estudiar, hacer y generar matemática elemental en el Programa de Talentos y en el Grupo Yaglom ha sido a través de la resolución de problemas, ya que catalogar si cierta matemática en estudio es elemental o no, depende en primer lugar de los desarrollos que se pueden hacer sobre la matemática que se constituya en objeto de estudio, y una manera para conseguirlo es proponiendo y resolviendo problemas.

En la literatura se encuentra una extensa bibliografía sobre la resolución de problemas en matemáticas, siendo George Polya (1887-1985) el referente principal; en su libro, Mathematical Discovery afirma que “un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata” (Polya, 1981, p. 117). De este modo, para el Grupo Yaglom un problema es una situación matemática (o una pregunta matemática) que no puede ser contestada de manera inmediata y se caracteriza por:

1. Ser lo suficientemente general y retadora como para considerar casos particulares que la resuelvan parcialmente.
2. No ser evidente el camino a seguir, por lo que hay que apelar a diferentes conocimientos o conceptos matemáticos previamente aprendidos o por aprender.
3. Ser placentera para quien lo resuelve. Tanto los resultados previos como el general, debe proporcionar una sensación de placer y de satisfacción intelectuales.
4. Permitir desarrollar la creatividad al conjeturar posibles soluciones, al descubrir modos de argumentar y proceder, al comunicar ideas.
5. Añadir nuevos conocimientos a quien lo resuelve. En el proceso de búsqueda de la solución del problema, se deben establecer relaciones con los conocimientos previos y los nuevos.
6. Motivar la búsqueda y estudio de bibliografías especializadas que aporten para la resolución del problema.
7. El uso, si es el caso, de herramientas tecnológicas para la conjeturación de resultados y las argumentaciones correspondientes.
8. Permitir el intercambio de ideas con otros para adoptar y descartar ideas, criticar resultados y llegar a acuerdos.
9. Permitir crear conocimiento matemático, esto es, formular y demostrar teoremas, aunque este conocimiento no necesariamente sea inédito.

En este sentido, el problema que se propuso a los estudiantes del Grupo Yaglom fue lograr hallar la siguiente suma:

$$S = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p,$$

donde n y p son números naturales. Este problema, junto con una solución, aparece en el libro de Dörrie (1965) titulado *100 great problems of elementary mathematics* (100 grandes problemas de matemáticas elementales), es el número 11 y se titula *el problema de Bernoulli de las sumas de potencias*. La primera solución general a este problema apareció en el libro Ars Conjectandi (El arte de conjeturar) del matemático suizo Jacob Bernoulli (1654-1705), editado en 1713, ocho años después de su muerte. Dicho libro se ha constituido en un hito importante en la historia de la probabilidad.

Con base en las características listadas anteriormente y de las soluciones parciales y generales logradas por los estudiantes del Grupo, esta situación se catalogó como un problema porque:

- Ofreció un alto grado de generalidad, permitiendo obtener soluciones parciales bien fijando n o p y determinando cuál de las dos opciones es mejor.
- No fue evidente la solución general o un único camino a seguir. La situación es tan rica que existen argumentos de tipo algebraicos o geométricos.
- Los estudiantes mostraron un gran interés y emoción al ir hallando soluciones parciales, intentando en cada camino, buscar una general.
- Permitió desarrollos creativos a los estudiantes, ofreciendo para un mismo caso (fijando p) argumentos distintos.
- Los estudiantes encontraron relaciones entre la geometría, el teorema del binomio de Newton (no conocido por algunos) y algunas regularidades geométricas y algebraicas para obtener soluciones parciales del problema.
- Motivó a los estudiantes a buscar fuentes bibliográficas que les aportaran ideas para la solución de la situación y con ello, generar sus propios desarrollos.
- Permitió el intercambio de ideas entre los integrantes del Grupo, logrando algunas soluciones conjuntas.
- Permitió la generación de proposiciones que fueron argumentadas y organizadas en escritos con cierto grado de formalidad matemática de acuerdo al nivel de los estudiantes.

Por otra parte, y siguiendo de nuevo a Polya (1981), las estrategias o heurísticas para la resolución de problemas matemáticos considera cuatro etapas, que en esencia son las que se llevan a cabo por el Grupo como parte del método en el diseño de las actividades:

- Etapa 1: *Comprender el problema*. El problema debe ser lo suficientemente claro para quien lo resuelve, por tanto, proponer actividades en las que el estudiante comprenda a profundidad el problema resulta crucial en esta etapa.
- Etapa 2: *Diseñar un plan*. Para resolver cualquier situación problema, debe diseñarse un plan a partir de preguntas como: ¿se conoce algún problema parecido del cual se tenga respuesta?, ¿cuáles conocimientos previos ayudarían en la solución del problema?, ¿es posible reformular el problema en uno más simple?, ¿es posible introducir nuevos elementos auxiliares?
- Etapa 3: *Poner en práctica el plan*. Ejecutar el plan que se ha concebido, controlando cada paso, comprobando resultados y probando su veracidad.
- Etapa 4: *Examinar la solución*. Determinar si el resultado responde a la solución del problema, si es posible resolverlo de otra manera, si puede usarse para resolver otros problemas.

Con base en estas etapas y de acuerdo a lo que en el Grupo se ha concebido como matemática elemental, se expondrá en la siguiente sección algunos resultados y argumentaciones dadas por los estudiantes sobre el problema mencionado.

Resultados

Al proponerse el problema de Bernoulli de las sumas de potencias y luego del interés mostrado por algunos estudiantes del Grupo, se dio inició a los intentos de solución. En un primer momento, correspondiente a la etapa inicial de las heurísticas propuestas por Polya (1981), los estudiantes entendieron mal el problema confundiéndolo con el de una suma geométrica, a lo que algunos vieron trivial su solución. Sin embargo, al entender la complejidad de la situación y su no tan evidente respuesta, se vieron suficientemente motivados y retados ante la tarea. Una vez entendida la actividad y sin tener un camino claro por dónde continuar, los alumnos preguntaron a algunos de sus profesores de la carrera (no pertenecientes al Grupo) cómo poder iniciar, a lo que una sugerencia fue darle valores a p e ir analizando cada uno de los casos con el propósito de encontrar regularidades. De esta forma, los estudiantes, contaron con un plan inicial.

- Resultados para $p = 1$.

Dado que el resultado para este caso era conocido por la mayoría de los estudiantes, se les propuso buscar otras maneras, distintas a las que ellos sabían, de argumentar el resultado de la suma. Para llenarse de ideas, los estudiantes expusieron las soluciones que conocían y buscaron otras, algunas en libros y otras propias, un ejemplo de esta última fue inspirada por el estilo del libro Proofs whithout words (Nelsen, 1993):

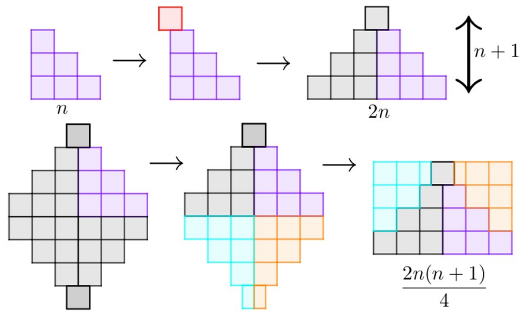

Figura 1. Primera forma para $p = 1$, lograda por Edward Camelo.

Una segunda forma, se obtuvo a partir de la siguiente lista encontrada como un ejercicio en el libro Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: contar e inducir (Luque, Mora y Páez, 2013, p. 106):

$$\begin{aligned} 1 \times 8 + 1 &= 9 = 3^2 \\ 3 \times 8 + 1 &= 25 = 5^2 \\ 6 \times 8 + 1 &= 49 = 7^2 \\ 10 \times 8 + 1 &= 81 = 9^2 \end{aligned}$$

Los estudiantes al reescribirla hallaron que:

$$\begin{gathered} (1) \times 8 + 1 = 3^2 \\ (1 + 2) \times 8 + 1 = 5^2 \\ (1 + 2 + 3) \times 8 + 1 = 7^2 \\ (1 + 2 + 3 + 4) \times 8 + 1 = 9^2 \end{gathered}$$

Los estudiantes encontraron que hay una relación entre el último número del paréntesis de la izquierda de cada una de las igualdades y el número que está elevado al cuadrado a la derecha de cada igualdad, así, para el n-ésimo renglón hallaron que:

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n) \times 8 + 1 = (2n + 1)^2,$$

al despejar la suma en paréntesis a la izquierda de esta ecuación, se tiene:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(2n + 1)^2 - 1}{8}.$$

Dado el objetivo del Grupo de buscar ejemplos que puedan constituirse en matemáticas elementales y actividades que puedan llevarse a las aulas del Programa de Talentos, entre el mismo estudiante que logró la primera solución y el profesor, hallaron una forma geométrica de expresar la generalidad dada por la lista anterior, una vez más, el estilo de la siguiente solución es a la manera del libro Proofs whithout words (Nelsen, 1993):

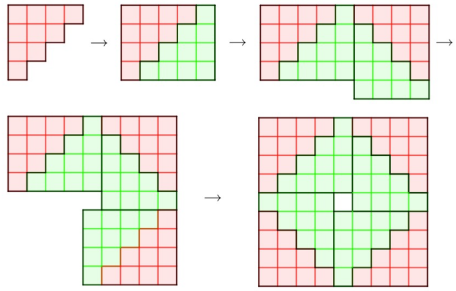

Figura 2. Segunda forma para $p = 1$ y $n = 4$, lograda por Edward Camelo y Juan Carlos Ávila.

- Resultado para $p = 2$.

Para este caso, los estudiantes encontraron, como un ejercicio, en el libro clásico de Cálculo infinitesimal de Spivak (1978, p. 37) lo siguiente:

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1,$$

al evaluar esta expresión para $k = 1, 2, 3, \dots, n$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\text{Para } k = 1,\ 2^3 - 1^3 &= 3(1)^2 + 3(1) + 1\\
\text{Para } k = 2,\ 3^3 - 2^3 &= 3(2)^2 + 3(2) + 1\\
\text{Para } k = 3,\ 4^3 - 3^3 &= 3(3)^2 + 3(3) + 1\\
&\vdots\\
\text{Para } k = n,\ (n+1)^3 - n^3 &= 3(n)^2 + 3(n) + 1,
\end{aligned}$$

al sumar las igualdades anteriores, se obtiene:

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right) + 3\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + n,$$

expresión que permite conocer el valor de la suma del problema de Bernoulli para $p = 2$, con base en el caso de $p = 1$.

- Solución general.

La solución del caso $p = 2$, sugirió rápidamente a los estudiantes una manera de hallar el resultado general, por lo cual, tal como sugiere la etapa tres de las heurísticas de Polya (1981), se implementó un plan hallando identidades algebraicas similares a las trabajadas en el caso previo, pero para los casos $p = 3, 4, 5$, reconociendo que en el proceso es necesario conocer los resultados de los casos anteriores y el uso del teorema del binomio de Newton. De esta forma y con base en el hecho de que:

$$(k+1)^{m+1} - k^{m+1} = \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} k^{m+1-i} - k^{m+1},$$

los estudiantes, lograron obtener el resultado general:

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p = \frac{(n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=2}^{p+1} \binom{p+1}{i} j^{p+1-i}}{p+1}.$$

Conclusiones y reflexiones

En relación con la matemática elemental, la determinación de cuáles matemáticas puede considerarse elementales, requiere necesariamente de ser *experimentales*, en el sentido de que tales matemáticas puedan ser llevadas al aula (escolar o especial, como en el caso del Programa de Talentos) y experimentadas con estudiantes y maestros a través de actividades organizadas y depuradas que permitan la construcción o reconstrucción de conocimientos matemáticos que según el caso, pueden ser nuevos o antiguos. Así, el trabajo con matemáticas elementales, implica, además que los estudiantes, bajo la ayuda y dirección de los maestros, jueguen el rol de un matemático, es decir, maneje teorías, formule conjeturas, busque y construya ejemplos y contraejemplos, demuestre teoremas, formule problemas, etc.

Con respecto a la resolución de problemas, el medio a través del cual el Programa de Talentos y el semillero de investigación Grupo Yaglom de la Universidad Sergio Arboleda ha logrado materializar el desarrollo de matemáticas elementales, ha sido a través de la resolución de problemas, entendiendo que un problema matemático significa buscar de forma consciente una o varias acciones para lograr un objetivo concebido con claridad pero que no es alcanzable de forma inmediata.

El planteamiento y la resolución de problemas resulta coherente con la búsqueda de ejemplos de matemáticas elementales, ya que para el caso del Grupo Yaglom, los estudiantes experimentan la actividad de resolver problemas que o han sido planteados por el profesor que dirige el semillero o por los mismos intereses de los estudiantes. En cualquier caso, las soluciones dadas a los problemas configuran algunas actividades iniciales, que requieren de depuración, escritura y estudio para lograr llevarlas al aula del Programa de Talentos y determinar su carácter matemático elemental.

Por otro lado, un trabajo académico como el expuesto, en donde maestros y estudiantes resuelven problemas de matemáticas elementales, es ideal para los cursos ofrecidos en el Programa de Talentos de la Universidad, ya que, por un lado, se logra satisfacer con éxito las expectativas de los alumnos del Programa y por el otro, se contribuye con la construcción de actividades y ejemplos de matemáticas elementales que pueden llevarse a cabo con estudiantes talentosos.

El hecho de que los estudiantes del semillero vivieran la experiencia de hacer un ejemplo de matemática elemental, permite cumplir el objetivo del Grupo, puesto que al conocer todo el proceso que este conlleva, ubica a los estudiantes en una posición reflexiva a la hora de proponer y ser responsables de un curso del Programa de Talentos de la Universidad, siendo conscientes de que las buenas preguntas y problemas son indispensables al trabajar con matemáticas elementales.

Por último, las soluciones logradas al problema de Bernoulli de las sumas de potencias, constituyen unas primeras actividades que deben organizarse y estudiarse para construir un curso del Programa de Talentos. Por tanto, se debe: formular preguntas de acuerdo con las soluciones alcanzadas, rutas de introducción a los problemas que surgieron en la etapa exploratoria por parte de los estudiantes del Grupo y sistematización de las soluciones sin que se pierdan las ideas y caminos tomados al hallar las soluciones.

Referencias bibliográficas

Dörie, H. (1965). *100 great problems of elementary mathematics*. New York: Dover.

Luque, C., Mora, L. y Páez, J. (2013). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: contar e inducir*. (2ª edición). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Luque, C., Mora, L. y Torres, J. (2006). ¿Es posible hacer matemáticas en el aula? En *Memorias de Coloquio Investigación e Innovación de la Enseñanza de las Ciencias 1*(1), 69-77. Bogotá, Colombia: Universidad Católica de Colombia.

Nelsen, R. (1993). Proofs without words: exercises in visual thinking. MAA.

Pérez, J. (2007). *Una fundamentación de la historia de las matemáticas*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Pérez, J., Núñez, R., Bustamante, P., Cortés, C., Duarte, E., Losada, L., y Vergara, J. (2012). El ambiente académico universitario como una de las claves para el desarrollo del talento matemático en el programa el semicírculo de la Universidad Sergio Arboleda: Historias de vida de algunos de sus estudiantes talentosos. En *Memorias II Encuentro Internacional de Meta-Matemáticas*. Bogotá: Universidad Sergio Arboleda.

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery*. New York: John Wiley & Sons.

Spivak, M. (1978). *Cálculo infinitesimal*. Bogotá: Reverté.

Yaglom, I. (1981). *Elementary geometry, then and now*. New York: Springer