COMPARANDO PROBABILIDADES: O PAPEL DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

COMPARING PROBABILITIES: THE ROLE OF PROPORTIONAL REASONING

Rita Batista, André Pereira da Costa, Maria das Dores de Morais
Universidade Federal de Pernambuco (Brasil)
rica.basil@gmail.com, andre.pcosta@outlook.com, dora.pe@gmail.com

Resumo
O presente estudo foi realizado com estudantes do último ano de escolaridade da Educação Básica do Brasil com o objetivo de analisar compreensões acerca da comparação de probabilidades, considerando a influência do raciocínio proporcional, em duas situações inspiradas no PISA (2004). Os resultados apontaram que os estudantes quase nunca fazem uso da proporcionalidade para estabelecer comparações em situações probabilísticas. As justificativas se apoiaram em comparações de "mais e menos", e em uso de linguagem e expressões que estão associadas à probabilidade intuitiva.

Palavras-chave: probabilidade, comparação de probabilidade, raciocínio proporcional

Abstract
The present study was carried out with Basic Education final-year students, with the aim to analyze understandings about the comparison of probabilities, considering the influence of proportional reasoning, in two situations inspired by PISA (2004). The results showed that students rarely use proportionality to establish comparisons in probabilistic situations. The justifications were based on "more and less" comparisons, and on the use of language and expressions that are associated with intuitive probability.

Key words: probability, probability comparison, proportional reasoning

Introdução

Optou-se neste estudo por discutir acerca da importância do raciocínio proporcional para a compreensão tanto da quantificação quanto da comparação de probabilidades, por se compreender que este é um tema de permanente discussão e que necessita de olhares multifacetados. A proporcionalidade é considerada pela Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2017) como uma das ideias fundamentais que possibilitam articulação entre as distintas áreas do conhecimento atreladas à Matemática: números, medidas e grandezas, geometria, álgebra, estatística e probabilidade. Neste documento, a proporcionalidade é vista como elemento importante e necessário para o desenvolvimento do pensamento matemático e, por esta razão, deve se converter, na escola, em objeto do conhecimento.

Assim,

> deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. (Brasil, 2017, p. 264).

Costa e Allevato (2015) julgam que apesar dos estudantes da educação básica terem contato quase que diariamente com situações proporcionais, eles tendem a apresentar dificuldades em compreender o conceito. Desse modo, ajudá-los a desenvolver o raciocínio proporcional tem se configurado em um grande desafio para a escola, sendo essencial ao aprendizado de diversas disciplinas do Ensino Fundamental, Médio e Superior.

Apesar da observância, quase unânime, da importância do desenvolvimento do raciocínio proporcional como suporte à compreensão de objetos matemáticos em muitas unidades temáticas da área, bem como em outros componentes curriculares, como biologia, física e química, parece haver um entrave no seio escolar que não possibilita o avanço na consolidação integral dos objetivos de aprendizagem concernentes à proporcionalidade.

Godino e Batanero (2002) consideram que

> a aquisição de habilidades de raciocínio proporcional é insatisfatória na população geral. Essas habilidades se desenvolvem mais lentamente do que se supunha anteriormente; existe até evidência de que uma grande parte das pessoas nunca as adquire. Estas questões não são bem ensinadas nas escolas, que muitas vezes apenas estimulam a manipulação de símbolos e fórmulas sem sentido. (Godino, Batanero, 2002, p. 431)

Para estes pesquisadores, o esquema proporcional considerado por Piaget como um elemento básico do raciocínio formal, é fundamental para a compreensão de conceitos como probabilidade e correlação. Entretanto, afirmam os estudiosos, isso não significa que as crianças não possuam uma percepção progressiva das proporções e, nesta concepção, o desenvolvimento dessa ideia, não segue os estágios da teoria de Piaget, que estudaram como as crianças a utilizam quando têm que estimar a probabilidade de um evento.

Dessa forma, entende-se que o desenvolvimento do raciocínio proporcional não deve repousar unicamente na fase formal do desenvolvimento, e sim, ir progressivamente sendo construído para consolidação posterior desta ideia fundamental, como defende a BNCC (Brasil, 2017). Nesta ótica, a compreensão da probabilidade também se dá de forma progressiva e poderá ser redimensionada por meio do entendimento e uso do raciocínio proporcional.

Marco teórico

Muito tem se falado da importância da probabilidade na vida dos cidadãos (Batanero e Diaz, 2007; Gal, 2004), e, consequentemente, da relevância de seu ensino nas escolas. É um movimento mundial. Os currículos têm ampliado a inclusão de elementos que dão sustentação ao pensamento probabilístico desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, como a aleatoriedade, a incerteza, o acaso, as chances, o espaço amostral.

A Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017) propõe o desenvolvimento do raciocínio probabilístico a partir do 1º ano envolvendo a noção de aleatoriedade, evoluindo para o espaço amostral e o cálculo de probabilidades, no 5º ano. Nos anos Finais (6º aos 9º anos), amplia-se para o trabalho com probabilidade frequentista, soma de probabilidades e análise de eventos dependentes e independentes.

Bryant e Nunes (2012) consideram a probabilidade como um conceito muito complexo que necessita o desenvolvimento de quatro demandas cognitivas necessárias à sua compreensão. São elas:

1- Compreender a natureza e as consequências da aleatoriedade;
2- Formar e categorizar espaços amostrais;
3- Comparar e quantificar probabilidades;
4- Entender correlações (relações entre eventos).

As exigências intelectuais de cada uma dessas demandas são diferentes umas das outras, no entanto, elas se inter-relacionadas. Na ótica dos autores para a compreensão de situações probabilística é importante coordenar a compreensão da aleatoriedade, levantar os possíveis eventos ou sequências de eventos (espaço amostral) e realizar a comparação ou a quantificação de probabilidades, bem como relacionar os eventos entre si.

Bryant e Nunes (2012) defendem que as três primeiras exigências são etapas básicas que se deve levar em conta para a resolução de problemas de probabilidade. No entanto, a quarta demanda (entender correlações) nem sempre é necessária para todas as situações. Na primeira etapa, necessita-se reconhecer que o problema é sobre resultados que são incertos, aleatórios; na segunda, é preciso trabalhar com os possíveis eventos que compõem o espaço amostral; e, na terceira etapa, é necessário calcular e comparar probabilidades e tais probabilidades são quantidades baseadas em proporções que podem ser expressas em decimais, porcentagens ou razões. A quarta demanda, nem sempre é necessária e exige o olhar às três etapas anteriores.

Como nosso foco, neste texto, incide sobre a comparação de probabilidades, não discutiremos as demandas relacionadas à aleatoriedade nem ao espaço amostral. No que diz respeito à quantificação e comparação de probabilidades, Bryant e Nunes (2012) alertam que a maior parte dos problemas de probabilidade repousa sobre o cálculo de uma ou mais proporção. Entretanto, o raciocínio proporcional, é difícil para as pessoas e, em probabilidade, esta dificuldade parece mais acentuada quando há a necessidade de comparar duas ou mais probabilidades diferentes que possuem espaços amostrais distintos. Contudo, há algumas situações que podem ser resolvidas com base nas relações simples como 'mais' e 'menos' a partir da análise das possibilidades de formação dos eventos, quando se compara probabilidades envolvendo um mesmo espaço amostral.

A probabilidade é uma quantidade proporcional, uma quantidade intensiva. No contexto da matemática escolar as quantidades extensivas como massa, altura, distância ou número de objetos de um conjunto são as mais utilizadas pelas crianças e essas quantidades obedecem às leis aditivas simples, como, por exemplo, se for adicionado um quilograma de peras a uma sacola de compras, aumenta a massa de seu conteúdo em um quilograma. No caso das quantidades intensivas, a relação estabelecida é outra. Por exemplo, se a temperatura da água é de 25ºC e for adicionado mais um litro de água com a mesma temperatura, a quantidade de água aumentará (quantidade extensiva), mas a temperatura (quantidade intensiva) permanecerá a mesma (Bryant e Nunes, 2012).

Gal (2004), considera que, para a apropriação da probabilidade, são indispensáveis alguns conhecimentos, denominados por ele como *elementos disposicionais* e *elementos cognitivos*. Tais elementos precisam ser desenvolvidos e são necessários aos cidadãos para que sejam considerados letrados probabililisticamente no mundo real. Essas ideias envolvem o pensamento e o comportamento das pessoas em situações probabilísticas que são orientados por várias bases de conhecimentos e disposições. O *letramento probabilístico* se relaciona à capacidade das pessoas para uso de conhecimentos inerentes à probabilidade, considerando um amplo conjunto de conhecimentos factuais e habilidades formais, bem como crenças, atitudes e hábitos da mente e uma perspectiva crítica.

Assim os *elementos disposicionais* abraçam crenças, atitudes e hábitos de mente, enquanto os *elementos cognitivos* dizem respeito a cinco bases de conhecimentos, quais sejam, conhecimento dos grandes tópicos/temas, cálculos probabilísticos, linguagem; contextos e perguntas (questões) críticas.
Os elementos disposicionais desempenham um importante papel na forma como as pessoas pensam sobre a informação probabilística ou agem em situações que envolvem a oportunidade e a incerteza, em contextos do mundo real e em sala de aula.

Para Gal (2004) os elementos cognitivos interagem entre si de forma complexa durante o processo de aprendizagem. Assim,

1- Grandes tópicos/temas da probabilidade – envolvem bases fundamentais do conhecimento probabilístico, como: aleatoriedade, independência de eventos, variação, previsibilidade, as noções de segurança e estimativa (margem de erro e significância)
2- Calcular/comunicar probabilidades – para gerar estimativas sobre probabilidade de eventos e poder comunicar tais dados, é imprescindível a familiarização com maneiras distintas de encontrar/calcular probabilidades, por isso é importante saber que existem muitas formas de estimar probabilidades.
3- Linguagem – é importante compreender a “linguagem do acaso”, ou seja, as variadas formas de representar e comunicar possibilidades e probabilidades, por isso é necessário a familiarização com termos da probabilidade: variabilidade, aleatoriedade, independência, (im)previsibilidade, (in)segurança, acaso, risco – que nem sempre possuem definições claras, bem como expressões que podem traduzir situações probabilísticas como: “muito provável”, “certamente”, “impossível”, “com certeza”, “boa chance
4- Contexto – o conhecimento de contexto está associado ao *conhecimento de mundo*, que envolve os grandes tópicos, o cálculo de probabilidades e também a linguagem. Contextos socialmente relevantes são apontados para ilustrar a importância da aleatoriedade, variação, probabilidade e risco: o mundo físico e natural, processos tecnológicos, comportamento humano, medicina e saúde pública, justiça e crime, finanças e negócios, pesquisas e estatística, previsão pública e política, jogos de azar e apostas e decisões pessoais, dentre outros.
5- Questões críticas – as pessoas devem desenvolver a capacidade consciente de questionar dados veiculados nos mais variados meios com o objetivo de avaliar a finalidade do escritor, a objetividade e o raciocínio utilizados.

Nesta perspectiva, Gal (2004, p.50) defende que “as pessoas precisam de alfabetização probabilística para lidar com a ampla gama de situações do mundo real que envolvem interpretação ou geração de mensagens probabilísticas, bem como a tomada de decisão”.

O segundo elemento cognitivo defendido por Gal (2004) que se relaciona a cálculos probabilísticos faz referência à importância de saber que existem muitas formas de calcular e analisar probabilidades. Por sua vez, Batanero e Diaz (2007) sintetizam os diferentes significados da probabilidade dos quais, elencaremos apenas os quatro primeiros, em função da proximidade com nosso objeto de estudo e com o público envolvido.

Para estes autores há: i) o *significado intuitivo* que se relaciona a ideias que aparecem desde cedo nas crianças e estão ligadas ao uso de expressões qualitativas como provável, possível, impossível e são imprecisas e usadas para expressar graus de crença sobre eventos aleatórios; ii) *significado clássico* que diz respeito à razão entre os casos favoráveis e os casos possíveis, corresponde ao tipo mais utilizado na escola; iii) *significado frequentista* que parte do processo de experimentação (probabilidade *a posteriori*) e resulta da expressão aproximada da frequência relativa aos eventos resultantes de sequências de ensaios aleatórios realizados em condições idênticas e iv) *significado subjetivo* que considera graus de crença com base em julgamento pessoal relacionado a um sistema de conhecimentos que pode variar de pessoa para pessoa.

Percurso metodológico

Para o estudo foi realizado um teste individual escrito com estudantes do 3º ano da última etapa de escolaridade da educação básica brasileira de uma escola pública no primeiro semestre de 2018. Os participantes da pesquisa (n=18) responderam a dois itens inspirados numa questão do PISA (Programme for International Student Assessment, 2004) citado nos estudos de Bryant e Nunes (2012). Os itens exigiram uma justificativa das respostas.

A questão do PISA versava sobre comparação de probabilidades envolvendo espaços amostrais distintos: *A caixa A contém 3 bolas das quais 1 é branca e 2 são pretas. Na caixa B há 7 bolas, das quais 2 são brancas e 5 pretas. Você tem que retirar uma bola de uma das caixas, com os olhos cobertos. De qual caixa você deve retirar se você quer uma bola branca?”*.

Os resultados do PISA apontaram que 73% dos estudantes europeus de 15 anos não conseguiram fazer as escolhas corretas, embora eles pudessem estabelecer uma comparação sem determinar o cálculo de probabilidades nos dois casos (caixa A e caixa B) por meio de raciocínio de relação: há exatamente o dobro de bolas pretas em relação às bolas brancas na caixa A e na caixa B há mais que o dobro de bolas pretas, então proporcionalmente haveria mais chances de pegar bola branca na primeira caixa (A).

Os itens inspirados no PISA e utilizados no teste estão especificados no Quadro 1 a seguir. Em cada situação foi solicitado que os estudantes efetuassem os registros e justificassem suas respostas.

***Quadro 1*:** Especificações das situações probabilísticas utilizadas no estudo

SITUAÇÃO A	SITUAÇÃO B
Há duas caixas: a Caixa 1 contém 3 bolas brancas e 6 bolas pretas e a Caixa 2 possui 5 bolas brancas e 11 bolas pretas. Felipe pretende tirar uma bola branca de uma das caixas. Ele vai retirar a bola com os olhos fechados, de forma aleatória. Qual caixa ele deverá escolher para ter maior chance? Justifique sua resposta	Há duas caixas: a Caixa 1 contém 1 bola branca e 2 bolas pretas e a Caixa 2 possui 2 bolas brancas e 4 bolas pretas. Felipe pretende tirar uma bola branca de uma das caixas. Ele vai retirar a bola com os olhos fechados, de forma aleatória. Qual caixa ele deverá escolher para ter maior chance? Justifique sua resposta

***Fonte*:** Acervo da pesquisa

A situação A envolve a comparação de probabilidades em que a maior probabilidade de pegar a bola branca está em uma das caixas, especificamente na Caixa 1, enquanto na situação B as probabilidades são iguais.

Após a aplicação do teste, os dados foram catalogados e analisados à luz dos aportes teóricos citados com foco no olhar proporcional que foi nosso objetivo de estudo.

Resultados

Se na análise do estudo fossem considerados apenas os acertos e erros, sem considerar a justificativa dada pelos participantes, os resultados seriam animadores, ao menos para a Situação A em que aproximadamente 78% dos alunos avaliados acertaram e informaram que a melhor escolha seria a Caixa 1.

No entanto, na apresentação das justificativas, apenas dois alunos mostraram algum entendimento da relação proporcional presente na situação. A tabela 1 a seguir apresenta os resultados referentes à situação A.

Tabela 1: Resultados das respostas dos alunos referentes à Situação A

SITUAÇÃO A	Resposta correta Caixa 1	Resposta errada Caixa 2	Justificativa correta
Valores absolutos	14	4	2
Percentuais	78%	22%	11%

***Fonte*:** Acervo da pesquisa

Observou-se que 78% acertaram a resposta (Caixa 1), mas apenas dois estudantes apresentaram justificativas consistentes que apontavam algum entendimento da relação proporcional presente na situação: *"porque a probabilidade de Felipe tirar uma bola branca é maior que na caixa 2"* informou o aluno que efetuou os cálculos para apresentar a justificativa e *"porque uma probabilidade de 3\6 é mais vantajosa que uma probabilidade 5\11"*, informou outro aluno que estabeleceu a relação entre bolas brancas e bolas pretas.
Os demais alunos apresentaram argumentos sem coerência do ponto de vista probabilístico, optando por justificativas comparativas envolvendo relações comparativas das quantidades e justificando em termos de mais e menos, como por exemplo: *"porque tem menos bolas que a 2ª caixa. Acho que seria mais fácil" e "porque na caixa 1 tem menos bolas e só uma branca. Ele tem que tentar a sorte e tem mais possibilidade, eu acho".*

A seguir apresentaremos os resultados referentes à situação B que está sintetizado na Tabela 2.

***Tabela 2*:** Síntese das respostas dos alunos referentes à Situação B

SITUAÇÃO B	Resposta errada Caixa 1	Resposta errada Caixa 2	Resposta correta Ambas	Justificativa correta
Valores absolutos	6	9	3	3
Percentuais	33%	50%	17%	17%

Fonte: Acervo da pesquisa

Na situação B, apenas três estudantes julgaram que qualquer caixa haveria as mesmas chances, justificando: *"independente da caixa que ele escolher ele terá a mesma porcentagem de chance de tirar a bola preta. Então* *escolher a caixa não faz diferença"*; "*porque as duas caixas têm a mesma probabilidade*" e "*porque tanto faz a caixa, as chances são as mesmas para tirar a bola branca".*

Cinquenta por cento dos alunos optaram pela Caixa 2, dizendo: *"a caixa 2 teria uma bolinha a mais para ele pegar a bolinha branca"; "tem duas chances de sair branca"; "porque possui 2 brancas e 4 pretas. 2 e 4 são primos e formam 6, primo de ambos".*

Dos 33% que optaram pela Caixa 1, informaram: *"porque tem menos bolas aí a probabilidade é maior dele acertar uma bola branca"*; "pode apresentar apenas uma bola branca, mas tem menos pretas" (E11); "quanto menos bolas, menos chance de errar" (E15).

As justificativas equivocadas que dão suporte às respostas dos estudantes tanto da situação A, quanto da situação B, apontam para uma incompreensão acerca das relações proporcionais existentes na probabilidade. Como citado, Bryant e Nunes (2012) informam que o caráter proporcional da probabilidade é uma fonte de verdadeira dificuldade para crianças, jovens e até estudantes mais velhos. Não foi diferente neste estudo.

Os participantes desta pesquisa eram adolescentes do último ano de escolaridade da educação básica com idade entre 15 e 17 anos, logo, se encontravam cronologicamente na fase formal de Piaget. No entanto, os argumentos apresentados por eles se pautaram quase sempre na relação entre a caixa que tem mais (brancas ou pretas) e a caixa que tem menos que é um pensamento presente em concepções de crianças, que se utilizam da intuição para estabelecer relações comparativas de probabilidades. Por falta de um maior arcabouço de conhecimentos, as crianças recorrem aos julgamentos que possuem em sua vivência, independente de instrução - são as intuições primárias (Fischbein, 1987).

Observou-se ainda justificativas considerando sorte ou azar, que é uma característica de linguagem presente na probabilidade intuitiva (Batanero e Diaz, 2007). O uso da linguagem proposto por Gal (2004) diz respeito a um dos cinco aspectos cognitivos concernentes ao letramento probabilístico. No entanto, apenas a linguagem não torna uma pessoa letrada probabilisticamente é necessário o desenvolvimento dos demais *aspectos cognitivos:* grandes tópicos, cálculo e comunicação de probabilidades, contexto e questões críticas, além dos *aspectos disposicionais* (Gal, 2004) que não foram explorados neste texto.

Nesta ótica, considerando este estudo, não podemos afirmar que os participantes desenvolveram habilidades referentes ao letramento probabilístico, ao longo de sua jornada na escola, para resolução de situações diversas envolvendo comparação de probabilidades em conformidade com os pensamentos de Gal (2004).

Conclusões

O presente estudo confirmou as dificuldades dos estudantes em relação ao raciocínio proporcional em situações probabilísticas (Bryant e Nunes, 2012), apontando as fragilidades dos participantes em refletirem sobre situações comparativas aparentemente simples, mas que envolvem o raciocínio proporcional. Apesar desta pesquisa representar uma pequena amostra, a impressão que se tem é que parece que estamos estagnados no que diz respeito especificamente à comparação de probabilidades se formos comparar com os resultados do PISA de 14 anos atrás. A ideia que se tem é que não avançamos, neste sentido. Ao menos, este grupo não avançou.

Considerando o percurso escolar de, ao menos 11 anos, dos estudantes pesquisados esperava-se, que os adolescentes tivessem compreensões mais elaboradas e apresentassem argumentos mais consistentes que as crianças geralmente o fazem e tivessem avançado em suas compreensões proporcionais e, consequentemente, probabilísticas. Mas isto não foi observado neste grupo.

Por isso, julgamos importante estudos interventivos a fim de apontar caminhos para minimizar o atual quadro: o que fazer no chão da escola para que os estudantes avancem em suas compreensões no tocante à probabilidade e se tornem letrados probabilisticamente? A compreensão da proporcionalidade é um caminho, mas não o único. E como fazer?

Espera-se que, com as alterações curriculares, a partir da homologação da BNCC no Brasil, os avanços sejam mais significativos, uma vez que o documento exige que os objetos do conhecimento relativos à probabilidade sejam vivenciados desde o primeiro ano de escolaridade da criança no Ensino Fundamental.

Referências

Batanero, C. Diaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case probability. In JP.Van Bendengen y K. François (Eds); Philosophical Dimmensions in Matehematics Education. New York: *Spinger.* 107-128.

Brasil (2017). Ministério da educação básica. Base nacional curricular comum. Brasília, DF: *MEC*. Recuperado de http://basenacionalcomum.mec.gov.br/download-da-bncc/.

Bryant, P. e Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability: a literature review*. University of Oxford: Nuffield Foundation. ISBN: 978-0-904956-86-3

Costa, M S e Allevato, N. S. G. (2015). Proporcionalidade: eixo de conexão entre conteúdos matemáticos. *Em Teia*, 6 (1). Recuperado de https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2263

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*: *an educational approach.* Netherlands: D. Reidel Public, Mathematics Educational Library.

Gal, I. (2004). Towards 'probability literacy' for all citizens. In G. Jones (ed.), Exploring probability in school: challenges for teaching and learning, 43-7. *Kluwer Academic Publishers.*

Godino, J. Y Batanero, C. (2002). *Proporcionaliad y su didáctica para maestros*. Projecto Edumat-maestros. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/3_Proporcionalidad.pdf