VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN QUE ALCANZAN LOS ESTUDIANTES DE PRIMER GRADO DE SECUNDARIA EN LA RESOLUCIÓN DE UNA TAREA ESTRUCTURAL DE NÚMEROS RACIONALES

ALGEBRAIC SENSE THAT FIRST-YEAR SECONDARY SCHOOL STUDENTS REACH IN THE SOLUTION OF STRUCTURAL TASKS OF RATIONAL NUMBERS

Flor Carrillo, Cecilia Gaita, Johana Garcia
Pontificia Universidad Católica del Perú, Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas IREM-PUCP (Perú)
f.carrillo@pucp.edu.pe, cgaita@pucp.edu.pe, a20144218@pucp.pe

Resumen
El presente artículo tiene como objetivo analizar los rasgos de los niveles de algebrización de estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de una tarea que involucra operaciones y propiedades de los números racionales, actividad considerada como tarea estructural en el marco del Razonamiento Algebraico Elemental. La actividad demanda la elaboración de conjeturas y de su validación, lo que a su vez exige que se pongan en marcha procesos de generalización. Para el diseño y análisis de la actividad matemática desarrollada se emplean elementos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) y de la investigación cualitativa. Se concluye que los rasgos identificados en el trabajo de los estudiantes corresponden, predominantemente, al nivel de razonamiento algebraico 1, pues se identificó que trabajan con valores particulares cercanos y realizan operaciones de tipo aritmético, pero no identifican una relación que permita la generalización, lo que explica que tampoco empleen expresiones algebraicas para denotar variables.

Palabras clave: tarea estructural, razonamiento algebraico, ontosemiótico

Abstract
The objective of this article is to analyze the characteristics of the algebraic sense of first-year secondary school students in the solution of a task that involves operations and properties of rational numbers, an activity considered as a structural task in the framework of Elementary Algebraic Reasoning. The activity demands the elaboration of conjectures and their validation, which, in turn, demands generalization processes. For the design and analysis of the mathematical activity developed, we used elements of the Onto-Semiotic Approach and of the qualitative research. We concluded that the traits identified in the students' work correspond predominantly to the level of algebraic reasoning 1, since we could identify that they work with specific close values and perform arithmetic operations, but they do not find a relationship that allow the generalization, nor use algebraic expressions to denote variables.

Key words: structural task, algebraic reasoning, ontosemiotic.

Introducción

La presente investigación muestra un análisis de los rasgos de los niveles de algebrización de estudiantes de primer grado de educación secundaria en la resolución de una tarea estructural. La tarea estructural propuesta tiene como objetivo analizar de qué manera los estudiantes realizan conjeturas y validaciones, de modo que estas a su vez generen procesos de generalización que demanden el empleo de variables. Como base teórica se toman aspectos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) y del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE). En particular se considera la noción de idoneidad didáctica para el diseño de tareas, concepto fundamental del EOS tal como señala Godino (2013). Además, para el análisis de los resultados se consideran características de los rasgos del RAE, propuestas por Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012).

En este trabajo presentamos la tarea propuesta, las soluciones esperadas de esta tarea, así como las características de los sujetos que participaron de la experimentación. Se describen los resultados de los 15 estudiantes que participaron en el estudio y se analizan empleando los elementos teóricos considerados.

Aspectos teóricos y metodológicos

Nuestro trabajo emplea aspectos del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, centrados en la dimensión personal. En el marco de la noción de idoneidad didáctica de un proceso de instrucción, definida por Godino, Batanero y Font (2007) como la articulación coherente y sistémica de seis componentes (Idoneidad epistémica, Idoneidad cognitiva, Idoneidad interaccional, Idoneidad mediacional, Idoneidad emocional e Idoneidad ecológica), analizamos específicamente la idoneidad cognitiva, la cual se refiere al entendimiento del conocimiento de los estudiantes antes y después del aprendizaje de los contenidos de la tarea propuesta.

Algunas herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática

Siguiendo a Godino (2011), se realiza un análisis didáctico-matemático de la tarea estructural propuesta, la que desencadena la actividad matemática en la que emergen objetos matemáticos primarios, tales como:

- Elementos lingüísticos: Se utilizan al resolver problemas matemáticos para generalizar su solución o para describirlos. Para esto, se utiliza elementos del lenguaje, tales como términos, expresiones, notaciones, gráficos, entre otros.
- Conceptos y definiciones: Son nociones matemáticas que son necesarias para resolver una tarea mediante definiciones o descripciones características.
- Propiedades: Se manifiestan en las definiciones que se deben utilizar para la resolución de una tarea. Las propiedades son condiciones de realización de las acciones a características específicas de las situaciones y relaciones entre objetos.
- Procedimientos: Se emplean al resolver tareas propuestas a través de operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo y estrategias que los estudiantes deben conocer para resolver las diferentes tareas.
- Argumentos: Son enunciados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, en la solución de tareas. Estas justificaciones, para nuestra investigación, pueden ser deductivas o empíricas.

Se considera además la dimensión dualidad extensivo-intensivo que permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, que es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático (Godino, 2002). Del trabajo de García (2018), se ha tomado la siguiente tarea:

Encontrar una secuencia geométrica: $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$ para un término cercano, luego encontrar un patrón específico $t_{n=} 2.(\frac{1}{3})^{n-1}$.

A partir de los 3 términos dados en la secuencia geométrica, se debe hallar el término n-ésimo. Esto se llevará a cabo si se inicia identificando el primer término: $t_1 = 2.\left(\frac{1}{3}\right)^{1-1}$, luego se tiene el segundo término: $t_2 = 2.\left(\frac{1}{3}\right)^{2-1}$ y así sucesivamente, hasta que podemos encontrar un término genérico para la secuencia geométrica, representando por $t_{n\,=}\, t_1.q^{n-1}$, donde t_1 es el primer término y $q = \frac{1}{3}$ es la razón.

Por otro lado, una herramienta fundamental para el análisis de los resultados considerada en este trabajo son los niveles de algebrización descritos en Godino, Castro, Ake y Wilhelmi (2012), en donde además se describen las características asociadas a tales niveles. La asignación de un nivel está estrechamente relacionada con el tipo de actividad matemática desarrollada.

De acuerdo a Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014), se describen los siguientes niveles:
Nivel 0: Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero este valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. Nivel 1: Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con estos objetos. En tareas estructurales, se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. Nivel 2: Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico-literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales, las ecuaciones son de la forma. Nivel 3: Es el nivel consolidado de algebrización, ya que supone la intervención de objetos intensivos de grado 2 representados de manera simbólico-literal y se opera con ellos.

La investigación desarrollada es de tipo cualitativa y experimental; se empleó un instrumento que permitió reconocer la práctica operativa y discursiva desarrollada por los estudiantes en torno a los números racionales. Así mismo, se muestra un diseño estructural como el que propone Pino-Fan y Godino, (2014) con las cuatro fases que un diseño instruccional debe tener: Estudio preliminar, Diseño, Implementación y Evaluación.

Realizamos un análisis detallado de los rasgos que presentan las resoluciones dadas por los estudiantes; en particular, nos centramos en la dualidad extensivo-intensivo la cual indica rasgos característicos del razonamiento algebraico asociados a la generalización. Con esa información pretendemos responder a la pregunta: ¿Qué niveles de razonamiento algebraico predominan en la resolución de tareas estructurales sobre números racionales en estudiantes de primer grado de secundaria?

Experimentación y análisis de la tarea propuesta

Se ha considerado una de las tareas propuestas en el trabajo de García (2018), cuyo objetivo es que el estudiante analice inicialmente casos particulares con procedimientos aritméticos, pero luego debe realizar conjeturas, generalizar y verificarlas para valores cercanos.

Para esta experiencia, se consideró una muestra de 15 estudiantes de 12 a 13 años de edad, que cursaban el primer año de secundaria de un colegio particular de Lima, Perú, donde 10 estudiantes eran alumnos nuevos, que vienen de distintas instituciones, y solo cinco estudiantes eran alumnos antiguos, por lo que podemos decir que estos últimos tienen los conocimientos previos. La profesora era parte de equipo de esta investigación.

Se debe tener en cuenta que, en la institución particular, donde fue aplicado el experimento, se había enseñado los siguientes contenidos en el curso de razonamiento matemático sobre el tema de los números racionales partiendo desde la definición y continuando con su clasificación, operaciones (cálculos), propiedades, representaciones, entre otros, que fueron necesarios, como conocimiento previo, para el desarrollo de las tareas.

En la institución particular donde aplicamos el experimento se abordaron previamente los siguientes contenidos: Planteo de ecuaciones: Simbolización, problemas de ecuaciones y factorización. Progresiones aritméticas. Sucesiones. Razonamiento inductivo. Además del estudio de Perímetros. Áreas de regiones cuadrangulares y triangulares. Resolución de problemas de áreas usando ecuaciones y números racionales.

Los estudiantes recibieron las siguientes indicaciones antes de iniciar el trabajo:

- Debían mostrar todo su trabajo; los intentos de soluciones aunque fueron erróneos serían considerados como parte de la evaluación.
- El trabajo debería desarrollarse individualmente; para ello contarían con una hoja donde debían resolver cada pregunta; todas las hojas empleadas deben ser entregadas al finalizar la evaluación.
- El tiempo asignado sería de 12 minutos.

A continuación, presentamos el enunciado de la tarea propuesta.

Si al numerador de la fracción $\frac{19}{5}$ *se suma un número natural y se resta el mismo número al denominador, por ejemplo, si el número natural es 1 ¿qué sucede?, o si el número natural es 2 ¿qué sucede?, y si pruebas con otros números naturales ¿qué resulta? Entonces a partir de esto, ¿será cierto que* $\frac{19+n}{5-n}$ *siempre es número natural?*

Soluciones esperadas

Se esperan soluciones para casos particulares y conclusiones del tipo “siempre resultará un número natural”, así, por ejemplo, se pueden mostrar los siguientes cálculos.

$\frac{19+1}{5-1} = \frac{20}{4} = 5$ es un número natural
$\frac{19+2}{5-2} = \frac{21}{3} = 7$ es un número natural
$\frac{19+3}{5-3} = \frac{22}{2} = 11$ es un número natural

Y partir de esos resultados, concluirán que $\frac{19+n}{5-n}$ resultar ser un número natural.

También pueden aparecer respuestas donde, además de lo anterior, obtengan que con el número 5 se obtiene $\frac{19+5}{5-5} = \frac{24}{0}$ la cual es una división imposible de resolver en $\mathbb{N}$ y por lo tanto sería falso.

Otra posible solución de un estudiante es que reemplace un número mayor a 6 obteniendo:

$\frac{19+6}{5-6} = \frac{25}{-1} = -25$, el resultado ya no es un número natural.

Por lo que podrá concluir que $\frac{19+n}{5-n}$ será un número natural cuando $n = 1; 2; 3; 4$

Por último, también podemos suponer que un estudiante que manifieste que como “n” es un número natural, entonces el numerador siempre será positivo, así que como lo que piden que el resultado sea natural, el denominador debe ser mayor que 0, con denominador distinto de cero ya que sería indeterminado. Debido a que los estudiantes resuelven inecuaciones de primer grado, se plantea la siguiente resolución esperada:

$5 - n > 0$, donde n es un número natural
$(5 + -5) - n > 0 + -5$ …………………… suma $" - 5"$ a cada miembro
$-n > -5$ …………………………………... multiplica por -1 a cada miembro
$5 > n$

Así el estudiante concluye que “n” toma el valor del 1 al 4.

A continuación, en la tabla 1, tomado de García (2018) presentamos el análisis de las respuestas dadas por los 15 estudiantes, en el que se identifican rasgos característicos de los niveles de algebrización.

Tabla 1. Análisis y rasgos de nivel de 15 estudiantes respecto a la tarea propuesta

Estudiante	Procedimiento de la tarea propuesta	Análisis e Identificación de rasgos de los niveles de algebrizacion.
1	Consideró *n=1*, justificando que si suma el 1 al numerador y resto 1 al denominador resulta un número natural, luego reemplazó *n=2* justificando que si suma el 2 al numerador y resta 2 al denominador resulta un número natural, seguidamente reemplazó *n=3* justificando que si suma el 3 al numerador y resta 3 al denominador resulta un número natural. Finaliza declarando que no siempre $\frac{19+n}{5-n}$ saldrá un número natural, ya que a veces resulta fracciones.	Declaró el término general, lenguaje simbólico-literal, el cual se basó para decir que no siempre resulta un número natural, además de realizar correctamente las propiedades del conjunto numérico de los números racionales. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 2.
2	Consideró *n=1* y al resultado le colocó que es un número natural, luego reemplazó *n=2* y al resultado le colocó que es un número natural. Finaliza declarando que no siempre saldrá un número natural y colocó un ejemplo con *n= 10* colocando la respuesta como -5,8.	Aparecieron los objetos intensivos, esto quiere decir que los objetos de generalidad serán reconocidos de manera explícita en tareas estructurales. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 1.
3	Consideró *n=1* y al resultado le colocó que es un número natural y luego declara que siempre saldrá un número natural.	Intervinieron objetos extensivos, manipuló los objetos particulares sin encontrar una regla que generalice, pero aplicó adecuadamente la operación. Por lo anterior, el estudiante presenta en su solución rasgos de algebrización referente al nivel 0.
4	No entiende al inicio la tarea, ya que adicionó el número 1 a toda la fracción $\frac{19}{5}$ y luego le resta 1 al denominador por lo que obtiene 6 y de la misma forma aplica para el valor de 2. Luego se da cuenta y reemplaza correctamente para los números 1, 2 y 3 declarando que, para el valor de 5, no es número natural.	Se generalizó a partir de casos particulares. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 1.

5	Respondió las dos primeras preguntas de $n= 1$ y $n= 2$ colocando que resulta números naturales, seguidamente da valor $n= 5$ obteniendo como resultado algo no definido. Por último, reemplaza $n=6$ *y* $n=7$ resultando números enteros, por lo que finaliza diciendo que no siempre resulta número natural	Generalizó a partir de casos particulares y movilizó las propiedades de los números racionales. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 1.
6	Respondió para $n= 1$ obteniendo el número 5 pero no declara nada.	Manipuló los objetos particulares sin encontrar una regla que generalice. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 0.
7	Consideró $n=1$, $n=2$, $n=3$ *y* $n=4$ mencionando que no siempre resulta un número natural, ya que si, por ejemplo, $n = 6$ no un número natural ya que resulta un número negativo.	Generalizó a partir de casos particulares. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 1.
8	Consideró $n=1$ y al resultado le colocó que es un número natural, reemplazó $n=2$ y al resultado le colocó que es un número natural, reemplazó $n=3$ y al resultado le colocó que es un número natural, reemplazó $n=4$ y al resultado le colocó que es un número natural, luego reemplazó $n=7$ y al resultado le colocó que es un número entero, por lo que finaliza declarando que $\frac{19+n}{5-n}$ no siempre saldrá un número natural, ya que si coloca un número mayor que 5 es entero.	Declaró el término general al finalizar como lenguaje simbólico-literal, ya que, a partir de casos particulares, realizó conclusiones, en el que se basó para decir que no siempre resulta un número natural. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 2.
9	Consideró $n=1$ y al resultado le colocó que es un número natural, reemplazó $n=2$ y al resultado le colocó que es un número natural, reemplazó $n=3$ y al resultado le colocó que es un número natural, reemplazó $n=4$ y al resultado le colocó que es un número natural, luego reemplazó $n=5$ y al resultado le colocó como no definido, luego reemplazó $n=6$ y al resultado le colocó que es un número entero, por lo que finaliza declarando que no siempre saldrá un número natural, ya que si coloca un número mayor que 5 es entero.	Generalizó a partir de casos particulares. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 1.
10	Consideró $n=1$, $n=2$, $n=3$ luego reemplazó $n=5$ y al resultado le colocó que no existe y termina reemplazando $n= 7$.	Realizó operaciones adecuadas de tipo aritmético y no encontró algo en común para finalizar, pero sí aplicó adecuadamente las propiedades en los números racionales (Denominador de la fracción distinto de cero) y números enteros (Adición de números enteros). Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 1.
11	No entendió la tarea y operó incorrectamente.	Tuvo errores en las operaciones y, por ende, no llegó a encontrar algún término general.

		Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 0.
12	No entendió la tarea y dejó en blanco la hoja.	
13	No entendió la tarea, ya que colocó números diferentes al sumar y restar al numerador y denominador respectivamente.	
14	Consideró *n=1* y *n=2* declarando que no siempre saldrá un número natural mencionando un ejemplo con *n = 6*.	Se generaliza a partir de casos particulares y aplicó correctamente las propiedades. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 1.
15	Consideró *n=1, n=2, n=3 y n=4* mencionando que siempre resultará un número natural porque todos son naturales.	Realizó correctamente las operaciones, pero no consideró más casos para generalizar y encontrar un patrón. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 0.

Ahora, presentamos el análisis detallado de la solución de la tarea resueltas por algunos estudiantes.

La solución del estudiante 3 presentada en la figura 1, muestra que su estrategia inicial fue reemplazar algunos números naturales y verificar si se obtenían números naturales; o hizo para $n = 1,\ n = 2,\ n = 3,\ n = 4$, realizando correctamente las operaciones de adición en los números naturales, lo que corresponde a un conocimiento previo.

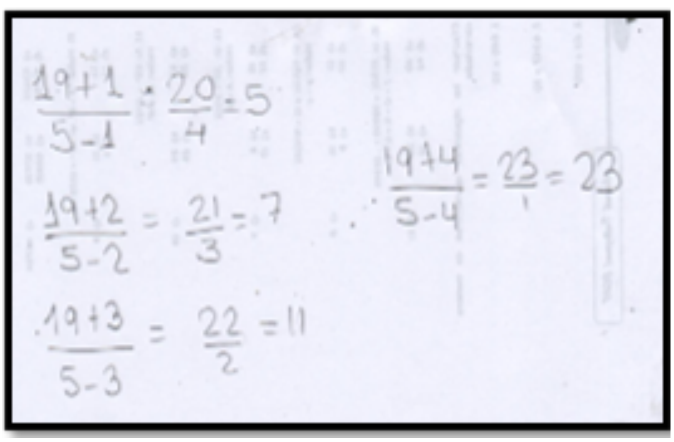

Figura 7. Solución del Estudiante 3-tarea 1
Fuente: (García, 2018, p. 68)

Dado que la actividad del estudiante solo se limita a la realización de cálculos aritméticos y no presenta ninguna conjetura, no se identifican rasgos correspondientes a los niveles de algebrización en su solución.

De otro lado, en la solución del estudiante 1, además de realizar operaciones para valores específicos $n = 1,\ n = 2,\ n = 3,\ n = 4$ y n=7, concluye que, si bien para valores de n entre 1 y 4 se obtiene un número natural, para $n = 7$

resulta un número entero. Reconocemos el uso de conceptos y propiedades en su procedimiento; por ejemplo, identifica los conjuntos numéricos como los naturales, enteros y racionales. Se pone de manifiesto la dualidad extensivo-intensivo cuando señala que el resultado de $\frac{19+n}{5-n}$ no siempre será un número natural, ya que argumentó que si el "n" mayor a 5 resulta un número entero y no un número natural.

Además, el empleo de expresiones simbólicas como la variable "n" y elementos lingüísticos como “número natural” de manera general, denota una actividad de generalización. Así, la generalización a partir de casos particulares y la obtención de un término general expresado empleando variables, permiten reconocer rasgos del nivel 2 de razonamiento algebraico en el trabajo de este alumno.

Algunos resultados

Después del análisis de las soluciones de los 15 estudiantes a la tarea propuesta, concluimos que son los rasgos del nivel 1 de razonamiento algebraico los que predominan; fueron 7 estudiantes los que dieron valores a “n” entre 1 y 10, es decir, estudiaron casos particulares, utilizando propiedades de la adición en números naturales y números enteros. En las configuraciones cognitivas construidas se reconoce que los estudiantes emplearon adecuadamente conceptos, propiedades y procedimientos. Luego, estos estudiantes generalizaron los resultados, pero no los simbolizaron (dualidad extensivo-extensivo Los estudiantes argumentaron (elemento del EOS) que para todos los valores mayores a cinco ya no se cumple que sea natural y terminan generalizando para un término general.

El nivel 2 de algebrizacion sólo se evidenció en las soluciones de dos estudiantes los que emplearon expresiones simbólicas para representar las variables. Se identifica el nivel 0 de algebrización en 4 estudiantes, ya que realizan algunos cálculos solo del tipo aritmético, pero no encontraron relación alguna que les permitiera generalizar. Estos estudiantes solo consideraron casos particulares. Finalmente, hubo dos estudiantes que no respondieron la tarea; al parecer no recordaban el concepto y las operaciones en el conjunto numérico de los números racionales.

Conclusiones

Del análisis realizado encontramos que predominan las generalizaciones para valores cercanos, a través de la aplicación de procedimientos aritméticos. Por ello, el nivel de algebrización predominante identificado es el nivel 1. Además, en cada solución de cada tarea, se encontró que predomina el lenguaje verbal, simbólico y en el caso de medida (Gráfico), realizando correctamente las propiedades y operaciones fundamentales de los números racionales.

Por otro lado, podemos resaltar que los argumentos emplean las dualidades extensivos- intensivos y podemos rescatar que la mayoría de estudiantes, a partir de este tipo de tareas, recién muestran argumentos para justificar sus soluciones. También hay que resaltar que algunos estudiantes están en proceso de pasar a un siguiente nivel.

Con esta información, se pueden diseñar actividades que permitan a los estudiantes avanzar a otro nivel de razonamiento algebraico en las que el énfasis esté puesto en el empleo de variables, así como en que cuenten con medios de control que les permitan verificar si sus conjeturas respecto a un patrón general son ciertas.

Finalmente, en base a esta propuesta de tarea estructural de números racionales, se espera que se produzcan más tipos de tareas que requieran de conjeturas, donde las generalizaciones lleven a realizar representaciones simbólicas y obtener procedimientos algebraicos.

Agradecimientos

Agradecemos al Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas a la Pontificia Universidad Católica del Perú (IREM-PUCP), específicamente a la línea investigación Desarrollo de la competencia didáctico matemático en profesores de matemática por el apoyo brindado para llevar a cabo la presente investigación.

Referencias bibliográficas

García, J. (2018). *Niveles de algebrización que alcanzan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de tareas estructurales de números racionales*. Perú. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques 22* (2/3), 237–284

Godino, J. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil. Obtenido el 20 de abril del 2017 de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

Godino, J. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. *Revista de didáctica de la Estadística, 2*, 1-15.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2), 127-135.

Godino, J., Castro, W., Aké, L., y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Boletín de Educación Matemática,* 26(42 B), 483-511. Obtenido el 30 de abril del 2017 de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291223574005

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. Enseñanza de las Ciencias, 32 (1), 199-219. Obtenido el 02 de mayo del 2017 de: http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Pino-Fan, L., y Godino, J. (2014). *Perspectiva ampliada del conocimiento-didáctico matemático del profesor*. Manuscrito enviado para su publicación. Obtenido el 23 de mayo del 2019 de: http://docente.ulagos.cl/luispino/wp-content/uploads/2015/07/2662-6235-1-PB.pdf