VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

SIGNIFICADOS DE LA LÍNEA Y EL ÁNGULO EN LA ESFERA: HACIA UNA EXPLORACIÓN DIDÁCTICA

MEANINGS OF THE LINE AND THE ANGLE IN THE SPHERE: TOWARDS A DIDACTIC EXPLORATION

Melvin Cruz-Amaya, Gisela Montiel Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México)
melvin.cruz@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

Resumen

La geometría euclidiana representa un buen modelo del espacio en que vivimos, de ahí que no nos preguntamos por qué funciona y qué es lo que hace que funcione; y muchas de las nociones geométricas que utilizamos no son cuestionadas. Estudiar una noción geométrica en un espacio distinto al común, lo consideramos fuente primordial de información para aportar en la teorización sobre el desarrollo del pensamiento matemático, ya que, potencia la significación de la geometría euclidiana y permite la comprensión, descripción y representación del espacio en el que vivimos. En esta dirección, perfilamos y presentamos avances de un proyecto de investigación, sustentado teóricamente en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), cuyo objetivo es caracterizar un proceso de significación progresiva relativo a la línea y al ángulo en la esfera, mediante una exploración didáctica, reconociendo la variedad y complejidad de significados en la esfera y en el plano, de ambas nociones.

Palabras clave: geometría, geometría esférica, exploración didáctica

Abstract

Euclidean geometry represents a good model of the space in which we live, hence we do not ask ourselves why it works and what makes it works; and many of the geometric notions we use are not questioned. Study a geometric notion in a space other than the common, we consider it a primordial source of information to contribute to the theorization on the development of mathematical thought, since, potency the significance of Euclidean geometry and allows the understand, describe and represent the space in which we live. In this direction, we profile and present advances of a research project, supported theoretically in the Socio-epistemology Theory of Educational Mathematics (TSME), whose objective is to characterize a process of progressive significance relative to the line and the angle in the sphere, through a didactic exploration, recognizing the variety and complexity of meanings in the sphere and the plane of both notions.

Key words: geometry, spherical geometry, didactic exploration

Introducción

Ante la necesidad de explicar fenómenos naturales y generar una mejor forma de vida, se estructura y teoriza la matemática; reconocida actual e históricamente como una ciencia primordial en la formación de cualquier individuo. Al ser una ciencia amplia, podemos encontrar en ella diversas ramas, siendo una de las más antiguas, la geometría. Tanto Heródoto como Aristóteles situaron su origen en la civilización egipcia, el primero sostenía que había surgido a partir de la necesidad práctica de volver a trazar los linderos de las tierras después de la inundación anual del valle del río Nilo y el segundo sostenía que el cultivo de la geometría en Egipto se impulsó por la existencia de una clase sacerdotal ociosa (Boyer, 1968). Sin embargo, desde el periodo neolítico se revela un camino hacia la geometría, mediante relaciones espaciales en diferentes superficies.

Tradicionalmente en la enseñanza escolar de la geometría no entran en juego discusiones referentes al trabajo en superficies no planas, y los trabajos sobre mediciones de superficies reales se resuelven considerándolas planas. Aunque la Geometría Euclidiana —GE—, permite localmente una buena descripción del mundo físico, no puede aplicarse a la navegación en la superficie de la tierra, a la astronomía y a la topografía (Guven y Baki, 2010). Como la GE representa un buen modelo para el espacio en que vivimos, no solemos preguntamos por qué funciona y qué es lo que hace que funcione, y muchas de las nociones geométricas no son cuestionadas. Refiriéndose a la geometría en la superficie de la esfera, Junius (2008) sostiene que, posibilitar a los aprendices ir y venir entre el plano y la esfera provocará que estos, al descubrir que muchas ideas no funcionan en la esfera se pregunten, por qué sí lo hacen en el plano. Dentro de la matemática escolar es común atribuirle a la geometría el papel de desarrollar un pensamiento que permite comprender, describir y representar el mundo en el que vivimos, lo cual nos hace preguntarnos si realmente la geometría escolar —geometría que se trabaja en la escuela— potencia dicho propósito, o la noción de nuestro entorno es acotada.

Dicha reflexión muestra uno de los motivos que nos hace considerar la posibilidad de tratar con una geometría diferente a la GE —la cual es potencialmente trabajada en la escuela— y estructurar un proyecto de investigación en esa línea. Presentamos en este documento, un avance de dicho proyecto, donde mostramos una necesidad de investigación en el área; el fundamento teórico; las decisiones metodológicas; y el método, en tanto obtención, organización y análisis de los datos.

Una problemática

Las Geometrías No Euclidianas —GNE— además de potenciar la significación de la GE, desarrollan un pensamiento que permite describir el espacio en el que vivimos, es decir, conocimientos cotidianos —aquellos conocimientos adquiridos en la educación básica, a través de nuestras experiencias con tareas prácticas y por medio de las tradiciones de nuestros pueblos—, que permiten comprender nuestro entorno. Son conocimientos dependientes del espacio-tiempo, nos referimos al conocimiento actual, que la mayoría posee, podría poseer o necesita poseer, dependiendo del contexto en el cual se desarrollan. Comúnmente enfrentamos situaciones que, aunque no son de nuestro cotidiano, están en nuestro entorno, y al tratar con ellas, las herramientas que tenemos son insuficientes y no logramos su compresión.

Uno de los primeros aprendizajes adquiridos en geometría es que la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta. También en la escuela utilizamos mapamundis en los que la superficie de la tierra se representa en el plano, aun cuando sabemos que la Tierra es casi una esfera, representación que puede conllevar algunas distorsiones. Una situación particular para ejemplificar dichos argumentos, es cuando viajamos en avión y observamos en los monitores la ruta del recorrido o simplemente cuando pensamos en ella, es común pensar automáticamente en una línea recta —en el sentido de la línea recta en el plano— que une los aeropuertos de origen y destino, dicho resultado puede alejarse de la realidad o no comprender la ruta del viaje, en especial cuando más largo sea el vuelo o cuanta más diferencia de latitud —medida angular de la distancia entre un punto de la Tierra y el ecuador— haya entre el origen y el destino del viaje.

Este tipo de fenómenos resultan de interés para nuestra disciplina —la Matemática Educativa—, en particular para los enfoques sobre el desarrollo del pensamiento matemático interesados en entender cómo se pone en funcionamiento el conocimiento adquirido en la escuela para interactuar con el mundo fuera de ella, y así identificar el impacto de la educación matemática en la formación del ciudadano y la transformación de su entorno. Este interés disciplinar se reflejó en la reciente revisión que se presentó en el Congreso Internacional en Educación Matemática (ICME-13) sobre educación de la geometría (Sinclair, Bussi, Villiers, Jones, Kortenkamp, Leung, y Owens, 2016), donde uno de sus apartados fue dedicado a los nuevos enfoques en geometría, la enseñanza y el aprendizaje de la geometría 3D y las GNE, principalmente se muestran las ventajas de conocer sobre la geometría esférica, un caso particular de la geometría elíptica.

Actualmente a nivel latinoamericano, las GNE han tenido como alcance su incorporación en algunos currículos escolares de educación preuniversitaria, principalmente en Brasil, como: Las Directrices Curriculares del Estado de Paraná (2008), Currículo Básico del Ayuntamiento Municipal de Curitiba (1988), y la Propuesta Curricular para las Matemáticas de la Enseñanza Fundamental de Sãu Paulo (1991); además se incorporaron en algunos currículos de universidades formadoras de profesores de matemáticas como la Universidad de Buenos Aires, Argentina y la Universidad Estatal a Distancia (UNED) de Costa Rica. Otras universidades las han incorporado en actividades académicas extra-clases, por ejemplo: charlas sobre estos temas en el Club de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile; y seminarios del Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México, México; entre otros. Dicha incorporación, ha sido influenciada por lineamientos curriculares generales, como el Currículo y los Estándares de Evaluación para las Matemáticas Escolares, por el NCTM (1989):

> College-intending students also should gain an appreciation of Euclidean geometry as one of many axiomatic systems. This goal may be achieved by directing students to investigate properties of other geometries to see how the basic axioms and definitions lead to be quite different – and often contradictory – results. For example, great circles, which play the role of lines in spherical geometry, always meet. Thus, in spherical geometry, instead of having exactly one line parallel to a given line through a point not on the line, there are no such lines. NCTM (1989, citado por Guven y Karatas, 2009, p. 331)

Donde se muestra a la geometría esférica como una fuente de significación de la GE. Por su parte los Lineamientos Curriculares de Matemáticas en Colombia, MEN (1998), nos hablan de las necesidades de desarrollar el razonamiento espacial en relación con el contexto, al igual que los Parámetros Curriculares Nacionales - PCN, (Brasil en 1998). Esta incorporación de forma general se ha justificado, por la necesidad de atender fenómenos naturales, mediante herramientas cognitivas en nuevas o combinadas disciplinas científicas. Como nos indican Bruce, Davis, Sinclair, MeGarvey, Hallowell, Drefs y Woolcott (2017) el razonamiento espacial —capacidad de reconocer y (mentalmente) manipular las propiedades espaciales de los objetos y sus relaciones— es un eje transversal en diversas disciplinas científicas y proporciona un tratamiento del contexto, el cual cada vez se vuelve más necesario, dado que, puede concebirse como un tratamiento molecular o astronómico, donde las GNE describen los fenómenos con mayor precisión. Desde la problemática anteriormente descrita, perfilamos un proyecto de investigación, buscando estudiar la construcción de significados de la línea y el ángulo al trabajar geometría sobre la superficie de una esfera, para ello, se realizó una revisión de la literatura referente a nuestro interés.

De la revisión de literatura

A través de las consideraciones histórico-epistemológicas, cognitivas y didácticas de las investigaciones en la disciplina sobre la línea recta, el ángulo y otras nociones geométricas trabajadas en el plano y en la esfera. Respecto a la línea recta, rescatamos (1) dos características de la línea recta potenciadas en la escuela, la infinitud y la densidad (Liñán, Montes, y Contreras, 2015), las cuales no necesariamente permiten la comprensión de la *rectitud*; (2) los significados de la línea recta: como la distancia más corta entre dos puntos, como simetría y como círculo de radio infinito, emergen a través del uso de la noción de línea en diferentes contextos geométricos (Henderson y Taimina, 2016); (3) existen dos características asociadas al uso de la línea recta, una noción perceptible y otra hermética; y (4) cuatro elementos fundamentales para su significación en la esfera: el lenguaje, las analogías, la imaginación y los movimientos físicos (Junius 2008).

Con relación al ángulo, además de sus diferentes definiciones, las categorías aristotélicas —ángulo como cantidad, relación y cualidad— y la clasificación según la cantidad de lados visibles, se reconoce al ángulo con propiedades estáticas y dinámicas, las cuales según Rotaeche y Montiel (2011) están asociadas a las definiciones y representaciones utilizadas como soporte en el manejo del concepto en la escuela. Además, al asumir que los estudiantes “reconocerán las nociones de ángulo en sectores de área (significado cualitativo-estático), en los giros (significado cualitativo-dinámico), en la porción de una circunferencia (significado cuantitativo-estático) y en la parte de vuelta (significado cuantitativo-dinámico)” (Rotaeche y Montiel, 2011, p. 205), se caracterizan significados asociados a dicha noción.

Desde lo cognitivo retomamos, el modelo para el desarrollo de la noción de ángulo que proponen Mitchelmore y White (2000), que intenta relacionar los conceptos angulares de los estudiantes con sus experiencias angulares físicas, donde reconocen progresivamente similitudes entre diferentes experiencias angulares, seguidamente las clasifican en situaciones específicas —primera etapa, ángulo situado—, luego en contextos generales —ángulos contextuales—, con el fin de llegar a la abstracción del concepto e incluso definirlo —ángulo abstracto—. Además, tomamos en cuenta la complejidad de trabajar con el ángulo por su naturaleza multifacética, por ello, la importancia de relacionar diferentes situaciones y contextos angulares. Si bien identificamos la falta de investigación didáctica relativa al ángulo esférico, encontramos e integramos diversas exploraciones e innovaciones didácticas centradas en la enseñanza y el aprendizaje de nociones geométricas en la superficie de la esfera; de las cuales resaltamos: situaciones problemas en una secuencia didáctica, el uso de materiales concretos y recursos digitales en el proceso de enseñanza y aprendizaje, y la obtención de una visión general de la centración de las investigaciones recientes en la disciplina sobre dicha temática.

Apreciamos el devenir histórico de la noción de línea y ángulo tanto en el plano como en la esfera; al igual que el origen, desarrollo y estructura de las GNE, principalmente la geometría esférica. Esto enmarca, contextualiza, argumenta y justifica algunas problemáticas planteadas alrededor de dichas nociones. Donde reconocemos la complejidad al caracterizar nociones como la línea y el ángulo, y la polémica en la que se envuelve el surgimiento de las GNE, mediante la negación del quinto postulado de Euclides. Dado que Bernhard Riemann (1826-1866) niega el V postulado de Euclides como: dada una recta r y un punto P no perteneciente a ella, no existen rectas que pasen por P y sean paralelas a la recta r, permite la emergencia de una geometría donde no existen paralelas, pues todas las líneas rectas se intersecan. Mientras que en la GE solo hay una recta entre dos puntos, en la geometría de Riemann puede haber más de una, incluso infinitas, así que resulta posible que dos líneas rectas encierren un área.

Lo anterior muestra una necesidad de hacer investigación en el ámbito antes descrito, teniendo esto en cuenta, perfilamos nuestro proyecto de investigación en torno al proceso de significación progresiva de la línea, la línea recta y el ángulo en la geometría esférica, un caso particular de la geometría elíptica, una de las GNE, es decir, su objeto de estudio es el proceso de significación progresiva de la línea recta y del ángulo en la esfera, de estudiantes de bachillerato —entre 16 y 18 años—, por medio de una exploración didáctica del trabajo geométrico en la superficie de la esfera de tipo laboratorio de matemática. Tiene como pregunta de investigación, ¿qué significados de la línea y el ángulo se construyen a partir de su uso en la esfera?, y como objetivo general, caracterizar un proceso de significación progresiva relativo a la línea y al ángulo en la esfera, mediante una exploración didáctica.

De las consideraciones teóricas

Nuestro proyecto está sustentado teóricamente en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), en tanto que "La socioepistemología propone como base de significación no solo a la matemática misma, sino a todo aquello que rodea y en lo que se involucra el humano al hacer matemática" (Buendía, 2012, p.14), por lo que, las herramientas, los argumentos emergentes, las estrategias y los contextos de uso, durante la interacción con la noción matemática son considerados fundamentales para su significación. Dicha teoría desde su construcción busca la democratización del aprendizaje a través de la teorización de formas de pensamiento matemático, a causa de ello, indaga como objeto de estudio en la explicación de la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional, siendo una teoría contextualizada, relativista, pragmática y funcional (Cantoral, 2013), estima a la matemática como producción humana situada cultural, histórica e institucionalmente, por lo que el saber mismo puede ser popular, técnico y culto, y en conjunto formar la sabiduría humana. Características que la hacen ser una herramienta eficaz para conocer, caracterizar, analizar e interpretar los fenómenos didácticos relativos a la matemática.

La TSME, está cimentada en cuatro principios: la *racionalidad contextualizada*, desde la cual, se entiende a la relación del sujeto con el saber en dependencia del contexto, es decir, desde el momento y el lugar en la que se encuentre el sujeto; el *relativismo epistemológico*, ya que, al tener en cuenta todo tipo de saber desde el contexto donde emerge, se reconoce que su validez la adquiere al seno del grupo que lo construye; la *significación progresiva*, es considerada el mecanismo de base en el desarrollo del pensamiento matemático y se da, cuando un primer significado asociado a una noción matemática se pone en juego en una nueva situación, este se usa de forma diferente y con ello, se resignifica, generando nuevas caracterizaciones, argumentos y conocimientos, los cuales, son la base para una nueva fase de significación; y la *normatividad de la práctica social*, la cual regula cualquier desarrollo del colectivo, como la construcción del conocimiento, considerando a la práctica social no la acción que realiza el individuo sino lo que le hace hacerla, es decir, lo que norma lo que hacemos.

Cuando el conocimiento matemático se pone en uso, se constituye el saber matemático, es decir, ese conocimiento adquiere un sentido mediante su uso y se convierte en un saber; por lo tanto, las formas en que puede encontrarse o las dimensiones que componen sistemáticamente dicho saber requiere un apartado importante. Dentro de la socioepistemología se contemplan cuatro dimensiones del saber: la dimensión didáctica, la dimensión cognitiva, la dimensión epistemológica y la dimensión social, que interactúa entre sí sin desligarse una de la otra. A la TSME le interesa el conjunto de prácticas asociadas a una noción o nociones matemáticas, las cuales van a surgir desde la interacción del sujeto con el objeto, la organización de las actividades mediadas y situadas socioculturalmente, la intencionalidad de la práctica socialmente compartida, la regulación de la práctica de referencia y finalmente todas éstas normadas por la práctica social; con eso nos referimos al interés por la evolución de prácticas que explica la construcción social del conocimiento matemático, y constituyen el modelo de anidación de prácticas, herramienta que permitirá la explicación de la construcción de significados asociados a la línea y el ángulo en la esfera.
Al tratar con tareas geométricas en la superficie de la esfera nos interesa caracterizar, las prácticas asociadas al desarrollo del trabajo geométrico —manera de hacer/estudiar geometría—, para ello, usaremos el modelo de trabajo geométrico que propone Rubio-Pizzorno (2018), el cual surge de un estudio sistémico de la naturaleza de la geometría desde diferentes esferas de conocimiento y sus convergencias. Se enmarca en un esquema que tiene a los objetos teóricos y concretos como polos, distingue como mecanismos para transitar de un polo al otro, la práctica geométrica de *abstracción* y la práctica geométrica de *representación*. La primera se compone por la intuición empírica —permite percibir las propiedades gráfico-espaciales de los diagramas— y la intuición sofisticada

—permite abstraer las propiedades teóricas que los diagramas están representando, mediante la interpretación de diagramas, el reconocimiento e identificación de invariantes—; por su parte la práctica geométrica de representación genera dos tipos de diagramas, *el bosquejo* —no refleja las propiedades geométricas— y *la construcción* —refleja las propiedades geométricas y pueden ser construcciones generales y particulares— (ver figura 1).

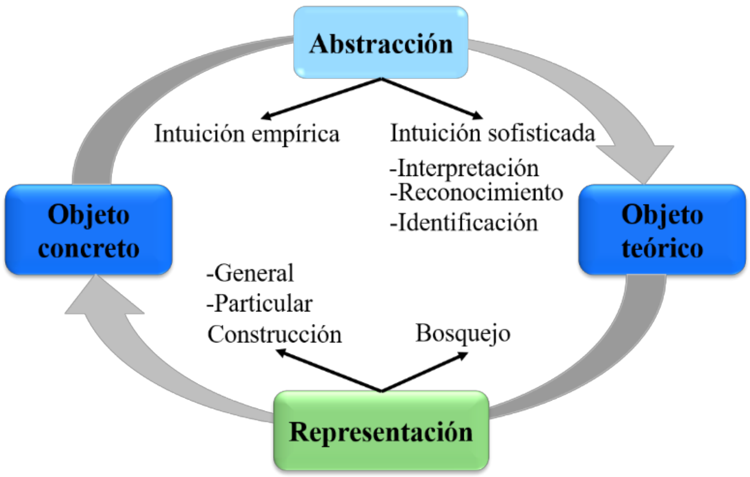

Figura 1. Modelo de trabajo geométrico (Rubio-Pizzorno, 2018, p. 102)

De las consideraciones metodológicas

Es un estudio cualitativo-interpretativo en el área de matemática educativa. Dicha investigación la enmarcamos metodológicamente basados en el esquema metodológico para la investigación socioepistemológica que proponen Montiel y Buendía (2012), entre el primero y el segundo nodo de su esquema, la acción relacionante —*análisis socioepistemológico*—, trastocando el tercer nodo —con algunas adaptaciones—. Entre las tres dimensiones del análisis socioepistemológico, nuestro proyecto está enmarcado en la resignificación del saber en escenarios diversos. Comenzamos con la descripción y definición de una problemática, para pasar del primero al segundo nodo del esquema, se desarrolló el análisis socioepistemológico, para lo cual, primero se realizó una revisión de la literatura desde las consideraciones histórico-epistemológicas, cognitivas y didácticas de la línea, el ángulo y otras nociones de geometría tanto en el plano como en la esfera.

Por medio de las consideraciones teóricas, basadas en la TSME, se estructuraron y plantearon las estimaciones del método: donde para la recolección de datos se constituyó una exploración didáctica de tipo laboratorio de matemáticas, fundamentada desde la revisión de la literatura y desde las consideraciones teóricas; la organización de los datos, desde los procesos planeados en la intervención didáctica y las fuentes de los datos —primarias y secundarias—; y para el análisis, se consideró el modelo de trabajo geométrico, propuesto por Rubio-Pizzorno (2018) y el modelo de anidación de prácticas, desde la TSME. De la organización y análisis de los datos llegamos al segundo nodo del esquema —epistemología de prácticas—, como un producto del análisis. De igual forma, nuestro proyecto busca una etapa más, un análisis retrospectivo del laboratorio de matemáticas, para proponer un rediseño de este, fundamentado en la epistemología de prácticas propuesta, por lo que la evolución pragmática jugará un papel importante para repensar y modificar las situaciones problema, logrando un acercamiento al tercer nodo del esquema metodológico —situación problema— (ver figura 2).

Figura 2. Esquema metodológico de la investigación. Elaboración propia

Constituimos un método, al que llamamos *Exploración Didáctica*, con el que recolectamos, organizamos y analizaremos los datos. Éste emerge de la naturaleza del contenido matemático tratado y del propósito, la estructura y la fundamentación del proyecto de investigación. El diseño que sirve de instrumento para la intervención, donde estudiaremos la significación progresiva de la línea recta y el ángulo en la esfera se fundamenta en la revisión de la literatura —que incluyen algunas aportaciones relativas a significados y usos de la línea, la línea recta y el ángulo— y en los constructos de la TSME, y no estrictamente hablando en una epistemología de prácticas —por ejemplo, producto de una historización—. De ahí el estatus de exploración.

La exploración didáctica como método de investigación está enmarcada en las tres grandes categorías antes mencionadas —recolección, organización y análisis de los datos—, para lograr estos tres procesos requerimos pasar por 5 pasos —planeación del instrumento de investigación (una experiencia didáctica de tipo laboratorio de matemáticas), protocolo previo a la puesta en escena, puesta en escena, organización de los datos y análisis de los datos—, buscando cumplir un ciclo de la Investigación Basada en el Diseño (IBD) —preparación y diseño, experimento de enseñanza y análisis retrospectivo— (ver figura 3).

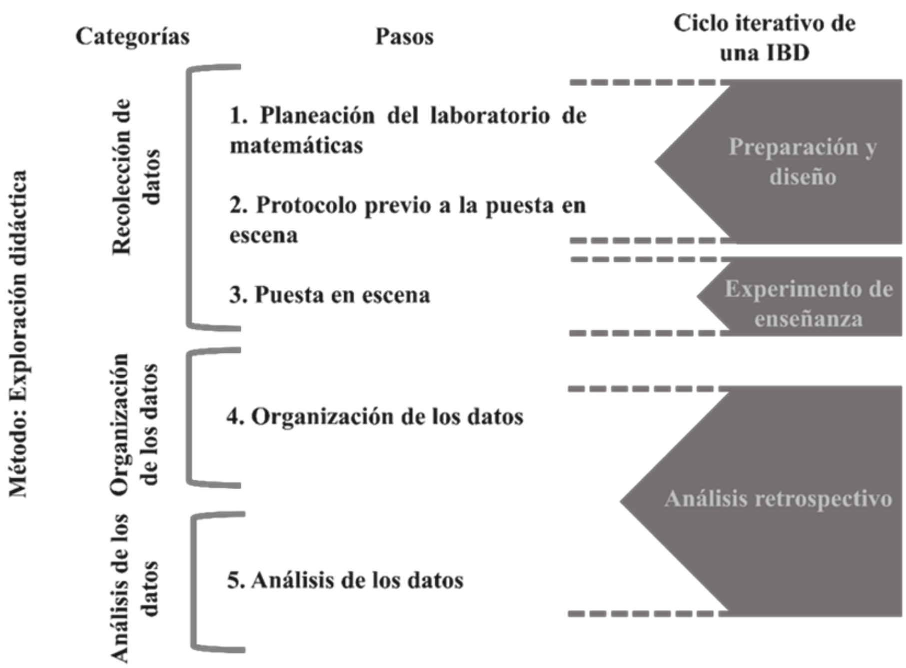

Figura 3. Exploración didáctica como método. Elaboración propia

Desde un plano didáctico llamamos a la experiencia *laboratorio de matemáticas*, considerando que metodológicamente un espacio pedagógico con dicha acepción permitirá lograr el propósito de nuestro proyecto de investigación; dado esto retomamos y adaptamos la caracterización de laboratorio de matemáticas que proponen Pérez, Gil, Navarro, Ruiz, Gil, Sepulcre y Gil (2016), los cuales indican que un laboratorio de matemáticas se fundamenta en tres categorías: el aprendizaje colaborativo, situación problema y el aprendizaje significativo. Dados nuestros referentes teóricos, consideramos a las situaciones problemas desde lo contextual y a la última categoría como el proceso de significación mediante el uso.

La población participante en la experiencia didáctica, fueron 6 estudiantes de último año (entre 16 y 18 años) de bachillerato de la Escuela Preparatoria Oficial Anexa a la Normal Núm. 3 de Nezahualcóyotl, Estado de México, México. De ellos 5 mujeres y 1 hombre. La obtención de los datos se desarrolló en 4 sesiones de 2 horas y media cada una, en las instalaciones de la institución educativa. Y la organización de los datos se realizó desde los cuatros procesos en los que se estructuró el diseño —concebir a la esfera como una superfie en la que podemos hacer geometría, caracterización de la línea recta esférica, caracterización del ángulo esférico y la caracterización de polígonos esféricos—, además de una clasificación interna, según la fuente de datos.

■ Reflexiones preliminares

Este proyecto de investigación está en desarrollo y hasta el momento identificamos la manera en cómo los diferentes significados asociados a la línea recta y el ángulo, descritos en la revisión de la literatura, se manifestaron en la aplicación de nuestro laboratorio de matemáticas. Al caracterizar la línea recta y el ángulo en la superficie de la esfera, surgió la necesidad de afirmar lo que "conocían" en un escenario usual —el plano—, con el propósito de trasferir ese conocimiento al trabajo geométrico en la esfera, es decir, los estudiantes pretendían caracterizar dichas nociones desde sus concepciones en el plano. Las situaciones problemas, el uso de materia manipulable, exploraciones y experimentos vivenciales, generaron una interacción del sujeto con el objeto, que permitió reflexión individual y de grupo alrededor de las características asociadas a la noción de línea, línea recta y ángulo, tanto en la esfera como en el plano, generando argumentos y conclusiones desde lo contextual, que permitieron dar sentido a las situaciones presentadas. Además, el papel que jugaron las nociones geográficas, en dicha caracterización resultó primordial, ya que, al relacionarlas con nociones de geometría esférica, les dieron razón de ser a dichas nociones.

En la fase de familiarización con los datos, percibimos superficialmente que al interpretar los diagramas presentados —ya sean bosquejos o construcciones—, los estudiantes lograron la interpretación de signos en los diagramas, el reconocimiento e identificación de invariantes en dichos diagramas, es decir propiedades o características asociadas a las nociones; además, al pensar en dichas características para lograr una representación, fue evidente cómo pusieron en juego concepciones asociadas a las nociones en el plano. Será la fase de análisis a profundidad la que nos permita caracterizar el proceso completo de resignificación de todas las nociones involucradas.

En general, resultó pertinente el laboratorio de matemática como espacio didáctico-pedagógico, para la construcción de conocimiento matemático que, basados en un análisis exhaustivo y detallado usando nuestras herramientas teóricas, pretendemos explicar puntualmente. Cabe indicar que las investigaciones de esta naturaleza, en tanto contenido matemático tratado y decisiones metodológicas, focalizan explicaciones de fenómenos didácticos matemáticos, que son y exigen ser, fuertemente explicados a nivel latinoamericano.

Referencias bibliográficas

Boyer, C. (1968). *Historia de la matemática*. Nueva York, United States of America: Wiley

Bruce, C., Davis, B., Sinclair, N., MeGarvey, L., Hallowell, D., Drefs, M., y Woolcott, G. (2017). Understanding gaps in research networks: using “spatial reasoning” as a window into the importance of networked educational research. *Educ Stud Math*, 95, 143-161. doi:10.1007/s10649-016-9743-2

Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas. *Educación Matemática, 24*(2), 09-35.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona: Gedisa.

Guven, B., y Baki, A. (2010). Characterizing student mathematics teachers´levels of understanding in spherical geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(8), 991-1013. doi:10.1080/0020739X.2010.500692

Guven, B., y Karatas, I. (2009). Students discovering spherical geometry using dynamic geometry sofware. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40*(3), 331-340. doi:10.1080/00207390802641650

Henderson, D., y Taimina, D. (2016). Experiencing Meanings in Geometry. En N. Sinclair, Pimm, D., & Higginson, W., *Mathematics and the Aesthetic* (pág. 58-83). New York, United States of America: Springer. doi:10.1007/978-0-387-38145-9_4

Junius, P. (2008). A case example of insect gymnastics: how is non-Euclidean geometry learned? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39*(8), 987-1002. doi:10.1080/00207390802136529

Liñán, M., Montes, M., y Contreras, L. (2015). Conocimiento sobre la recta de una maestra de tercer ciclo de educación primaria. *Investigación en Educación Matemática XIX*, 335-342.

Mitchelmore, M., y White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstractions and generalization. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 209-238.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. *Metodología en matemática educativa: visiones y reflexiones*, 61-88.

Pérez, J., Gil, S., Navarro, J., Ruiz, M., Gil, A., Sepulcre, J., y Gil, M. (2016). Laboratorio de Matemáticas. *Alicante: Universidad de Alicante*, 1411-1425.

Rotaeche, A., y Montiel, G. (2011). Desarrollo histórico como mirador de conocimientos para la enseñanza del concepto de ángulo. En G. Buendía, *Reflexión e investigación en Matemática Educativa* (págs. 191-218). Ciudad de México, México: Lectorum.

Rubio-Pizzorno, S. (2018). Integración digital a la práctica del docente de geometría (Tesis de Maestría no publicada). Cinvestav-IPN, México. doi: 10.13140/RG.2.2.15488.94728/1

Sinclair, N., Bussi, M., Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM mathematics Education, 48*, 691-719. doi:10.1007/s11858-016-0796-6