

SITUACIONES A-DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO MEDIANTE EL USO DE SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

A-DIDACTIC SITUATIONS FOR THE TEACHING ABOUT DERIVATIVE LIKE CHANGE RATE USING DYNAMIC GEOMETRY SOFTWARE

Jorge Enrique Fiallo Leal, Giovanni Rodríguez Santamaría
Universidad Industrial de Santander. (Colombia)
jfiallo@uis.edu.co, grodriguez349@unab.edu.co

Resumen

Diversas investigaciones muestran que la enseñanza de la derivada sigue siendo un compendio de desarrollos algebraicos y memorísticos que no están ligados a la comprensión del concepto fundamental como la razón de cambio de una magnitud de interés. Presentamos una propuesta de investigación cuyo interés es favorecer la enseñanza de la derivada como razón de cambio explorando diferentes representaciones simuladas por software de geometría dinámica (SGD). Diseñamos bajo la teoría de las situaciones didácticas (TSD) (Brousseau, 2007), actividades en Geogebra, con las cuales los estudiantes interactúan para lograr aprendizaje por adaptación. Utilizamos el análisis a priori como una de las fases de la (TSD) para evidenciar actividades programadas en javascript que generan retroacciones basadas en el uso del cociente de diferencias.

Palabras clave: razón de cambio, derivada, software de geometría dinámica (SGD)

Abstract

Research shows that the teaching of the derivative remains a compendium of algebraic and rote developments which are not linked to the understanding of the fundamental concept as the rate of change of a magnitude of interest. We present a research proposal whose interest is to encourage the teaching of the derivative as a rate of change by exploring different representations simulated by SGD. The Geogebra activities were designed under the theory of didactic situations (TDS) (Brousseau, 2007), in which students interact in order to achieve learning by adaptation. Using a priori analysis as one of the phases of TDS for show activities programmed in Javascript that generate feedbacks based on the use of the difference's quotient.

Key words: Rate of change, derivative, dynamic geometry software (DGS)

■ Introducción

Presentamos en este documento parte de una propuesta de investigación que tiene como interés favorecer el aprendizaje de la derivada como razón de cambio explorando diferentes representaciones mediante el diseño, aplicación y validación de situaciones a-didácticas simuladas por el software de geometría dinámica. El objetivo principal de la investigación es el de diseñar y aplicar situaciones a-didácticas que permitan el aprendizaje por adaptación de la noción de derivada.

Actualmente el trabajo de investigación se encuentra en la fase del análisis a priori contemplado en el marco de la TSD. En esta fase hemos anticipado las posibles acciones que un estudiante puede realizar sobre un medio digital previamente preparado para que este actúe de manera autónoma con diferentes retroacciones.

En Colombia, el Ministerio de Educación Nacional contempla el pensamiento variacional dentro de sus lineamientos curriculares y estándares básicos del conocimiento, con el fin de fortalecer el desarrollo del pensamiento matemático a partir de la solución de situaciones problema que provengan del entorno sociocultural o que provengan de disciplinas afines a las matemáticas, sin embargo la enseñanza de las matemáticas y particularmente del cálculo diferencial sigue siendo un compendio de desarrollos algebraicos, procedimentales y memorísticos que no están ligados a la comprensión de conceptos fundamentales de la derivada entendida como la razón de cambio de una magnitud de interés. Al respecto Vasco (2006) plantea que el objetivo del pensamiento variacional es entonces la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente las variaciones en el tiempo.

Por otra parte, Tall (2013) plantea que las reformas del cálculo han hecho uso de la computadora para mostrar gráficas dinámicas y así poder ofrecer el poder de la computación numérica y simbólica, más aún, la tecnología disponible permite tanto a estudiantes como a matemáticos dar sentido a las ideas de variación y cómo medir dicha variación.

Hitt (2013) analiza los ejemplos que utiliza un libro de texto guía para introducir la noción y concepto de derivada, así como la manera en que los profesores se apropian de estos ejemplos para exponerlos en el aula de clase de un Colegio de enseñanza general y profesional en Québec (Canadá). Plantea a su vez que la consideración de todas las representaciones de un concepto son importantes y no se debe priorizar una de ellas en detrimento de las demás. Así pues, creemos que es posible ayudar a los estudiantes a construir una mejor noción de la derivada a través de diferentes representaciones presentes en actividades elaboradas por el SGD dentro del marco teórico de las situaciones didácticas.

Flores (2013) realiza un trabajo con profesores de nivel medio superior para que puedan adquirir una mejor comprensión de los conceptos del cálculo y así hacerlos enseñables. Las actividades que se exploran con los docentes incluyen el concepto de la derivada, donde se hace un enfoque gráfico de funciones trabajando con la herramienta zoom del software Graphing Calculator para visualizar cuáles son localmente rectas además del uso de los cocientes de incrementos para hallar aproximaciones a la función derivada.

Siguiendo estas líneas de pensamiento junto con el aprendizaje por adaptación a un medio, mostraremos avances de una investigación en términos del diseño de actividades simuladas por computador bajo el marco teórico de las situaciones didácticas que permitan una aproximación de la derivada como razón de cambio sin el uso de procedimientos algebraicos.

■ Marco teórico

La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) desarrollada por Guy Brousseau se centra en la enseñanza de conocimientos matemáticos desde una concepción constructivista, afirmando que estos conocimientos no se construyen de manera sencilla.

Asumimos como supuesto que el aprendizaje se logra por medio de una adaptación del sujeto que aprende al medio creado por esta situación, haya o no intervención de un docente en el transcurso del proceso. Los conocimientos se manifiestan esencialmente como instrumentos de control de las situaciones (Brousseau, 2007, p.18).

Así pues, el conjunto de todas las relaciones establecidas explícitamente o implícitamente entre un alumno o conjunto de alumnos, un determinado medio (que involucra herramientas y conceptos a enseñar) y un sistema educativo (el maestro) que tienen como finalidad que los alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución, se denomina situación didáctica.

Situación a-didáctica

Brousseau (2007, p.31) define una situación a-didáctica así:

Los problemas, elegidos de modo tal que el alumno pueda aceptarlos, deben lograr, por su propio movimiento, que actúe, hable, reflexione y evolucione. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en que produce su respuesta, el profesor se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de los conocimientos que quiere ver aparecer... el alumno no habrá adquirido verdaderamente este conocimiento hasta no ser capaz de utilizarlo en situaciones que encuentre fuera de todo contexto de enseñanza y en ausencia de cualquier indicación intencional. Tal situación es llamada situación a-didáctica.

Se trata entonces de que el estudiante aprenda mediante adaptación a un medio pensado y propiciado por el profesor. Tal medio debe ser fuente de contradicciones, desequilibrios, dificultades, pero también puede estar cargado de refuerzos positivos que motiven al estudiante a no abandonar el problema al cual se enfrenta. Los resultados de la adaptación del estudiante serán el saber adquirido, puesto en manifiesto por sus respuestas nuevas que son la evidencia del aprendizaje.

El profesor pone en marcha una situación a-didáctica; el producto de la interacción entre el estudiante y el medio en esa situación a-didáctica es un conocimiento (personal y contextualizado); luego el profesor debe explicitar las relaciones entre el saber oficial y el conocimiento personal de los estudiantes con el fin de que no banalice ese conocimiento en la medida que no tenga con quién o qué comparar sus respuestas. Este último proceso recibe el nombre de institucionalización.

El papel del estudiante y del profesor es importante durante el desarrollo de la situación a-didáctica. Empero, nuestro trabajo pretende que el profesor se inmiscuya lo menos posible en las tareas que realizará el estudiante con el fin de evitar fenómenos que entorpezcan la actividad de enseñanza tales como el efecto Topaze y el efecto Jourdain (ver Brousseau, 1986).

La validación

Una de las características que define el rasgo a-didáctico de una situación es que el alumno tenga la posibilidad de decidir la validez de las acciones que realiza. Todo el ciclo de interacción de los estudiantes con el medio contribuye

a satisfacer esta condición de validez. Para Brousseau (1986), las pruebas y validaciones explícitas se supone que se apoyan unas sobre otras hasta la evidencia, pero la articulación de estas no es siempre automática, los saberes y conocimientos se están actualizando en una constante actividad de búsquedas o pruebas. Esto quiere decir que no puede haber validación, si no se realizan acciones y si no se identifican e interpretan las retroacciones del medio. Acosta (2010, p.133) resalta el concepto de validación en un entorno donde se usa el software de geometría dinámica como medio:

El sujeto valida su acción de acuerdo con la interpretación que hace de las retroacciones del medio. Esta validación puede tomar dos valores. Cuando la acción realizada le permite alcanzar su intención, la validación es positiva.

La devolución

Para Brousseau (1986), el estudiante no puede resolver de un primer golpe el problema, no importa qué situación a-didáctica el maestro prepare o arregle para los fines didácticos. Luego el profesor busca devolver al alumno una situación a-didáctica que provoque en él la interacción más independiente y fecunda posible. Las intervenciones del profesor durante una situación a-didáctica deben ser cuidadosas, puesto que podrían afectar el carácter a-didáctico de la situación. La TSD diferencia dos tipos de intervenciones, las que refuerzan el ciclo de interacción, y otras que lo interrumpen. A las intervenciones del primer tipo Brousseau las llama devolución.

Margolinas (2009) considera la devolución como un proceso que perdura durante toda la situación a-didáctica, donde el profesor es responsable de la relación a-didáctica del alumno con el problema. Nuestra investigación, posee un carácter empírico, por lo tanto, estamos interesados en observar los procesos de validación y devolución. Para que tales procesos sean observables contemplamos el uso del software Geogebra en el cual mediante programación Guión-script crearemos situaciones problema que apuestan a la validación y devolución de manera automatizada.

El medio

El medio es fundamental, puesto que el aprendizaje por adaptación está determinado por las acciones y retroacciones que este pueda ofrecer, por ende, el medio debe poseer intenciones didácticas que induzcan en el estudiante los conocimientos que se desea que adquiera. Entonces el medio también debe inquietar al estudiante aportando aprendizajes que lo modifican a él.

El medio es un sistema autónomo, configurado para lograr objetivos de aprendizaje. Para que la interacción del alumno con tal medio sea a-didáctica, Brousseau considera indispensable que el alumno reconozca en él una existencia tanto objetiva como ente autónomo independiente de la intención del profesor objetiva; y material teniendo en cuenta que el alumno debe interactuar con él mediante acciones.

En nuestro trabajo haremos uso de Geogebra como un medio físico con el cual los estudiantes interactúan para lograr aprendizaje por adaptación. Geogebra es ya un software muy conocido y difundido por ser de libre acceso, y que además de poseer una interface geométrica también posee una algebraica y numérica (hoja de cálculo), interfaces adecuadas para que el objeto matemático que deseamos abordar (la derivada) pueda ser asimilado por el estudiante. Por otra parte, existen opciones de programación (guión-script) bajo el lenguaje JAVA que permiten desencadenar una o varias acciones al momento de interactuar con algún objeto dentro de una construcción, pretendemos bajo este lenguaje de programación crear los procesos de validación y devolución implícitos en la situación a-didáctica.

Las retroacciones generadas por el software se manifestarán de manera visual en la pantalla del computador, será el caso por ejemplo de ingresar datos y operaciones entre estos para una determinada tarea con la posibilidad de que aparezcan mensajes que afirmen o refuten si los cálculos son correctos. Puede ocurrir también que, mediante una

acción realizada por el estudiante, la construcción diseñada con el software responde mediante una animación, un zoom, un arrastre, una colección de puntos o una gráfica.

■ Metodología

Por ser nuestra investigación de corte cognitivo, se utilizará una metodología cualitativa de tipo fenomenológico-experimental ya que las experiencias del estudiante sirven como guía y refuerzo del conocimiento que se va construyendo a medida que se ve inmerso en la situación didáctica.

Población y muestra de estudio

Para lograr el objetivo de la investigación se hará un estudio de casos con dos estudiantes de un curso de Precálculo adscrito a la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. La investigación tendrá como organismo metodológico la ingeniería didáctica, la cual se fundamenta en las siguientes fases a saber.

Análisis preliminar: En Artigue (1995) se contemplan tres facetas desde las cuales se debe realizar el análisis preliminar: la epistemológica, la cognitiva y la didáctica; las cuales están asociadas al saber, al estudiante y al sistema de enseñanza respectivamente.

La literatura revisada previamente en los antecedentes da cuenta de las facetas consideradas anteriormente en especial cuando los autores exponen diferentes obstáculos para el aprendizaje y la enseñanza de la derivada tales como que el predominio algebraico restringe la dimensión epistemológica, la dificultad en la transición de diferentes representaciones se vincula a la dimensión cognitiva, y por último el enfoque tradicional de la enseñanza sin el uso de tecnología computacional afecta la dimensión didáctica.

Análisis a priori: La intervención del investigador sobre algunas variables implícitas en la investigación, y dada una secuencia didáctica; se pretende “precisar las posibilidades que se han seleccionado, los valores de las variables didácticas que se producen como consecuencia de esta selección y el sentido que pueden tomar los comportamientos previstos teniendo en cuenta estos valores” (Artigue, 1995, p.12).

Artigue (1995) también considera que el análisis a priori está basado principalmente en un conjunto de hipótesis descriptivas y predictivas enfocadas en las características de la situación a-didáctica diseñada para llevar a los alumnos. Por consiguiente, en esta fase se analizarán las posibles acciones, selecciones y decisiones del estudiante al interactuar con el medio preparado, así como los mecanismos de control y validación de las cuales dispondrá éste.

Experimentación: Esta fase se destaca por la aplicación de las situaciones a-didácticas diseñadas que atañen a los estudiantes, a observar sus respuestas y justificaciones durante el desarrollo de las mismas, que permitan la recolección de datos a partir del estudio de casos.

Análisis a posteriori: A partir de la base de datos recolectada en la fase de experimentación, se hace la confrontación con el análisis a priori para rechazar o confirmar hipótesis planteadas en la investigación y por otra parte determinar si se han alcanzado los objetivos trazados.

La confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori es entonces lo que constituye la validación de la ingeniería didáctica y determina los resultados de investigación (Artigue, 1995).

■ Avances de la investigación

En esta investigación se han elaborado cinco actividades mediadas por SGD. En la primera actividad se dispone de una tortuga que debe recorrer un camino quebrado compuesto por segmentos horizontales y verticales.

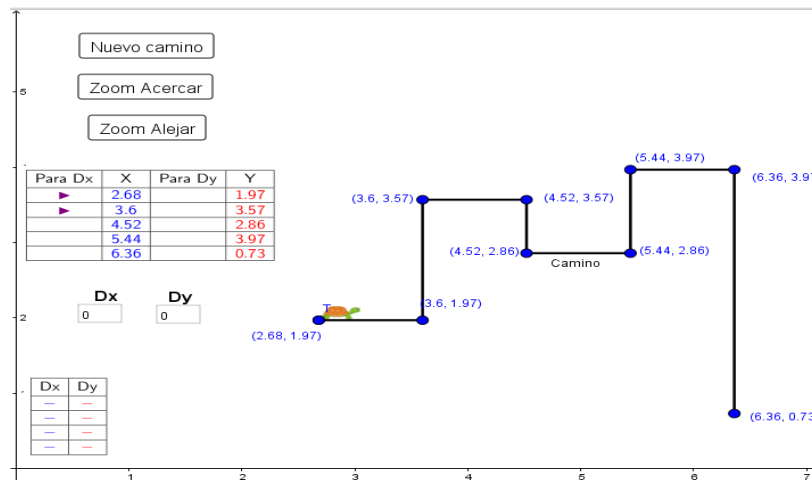


Figura 1. Actividad 1 - Camino generado con distancias aleatorias

El propósito de la actividad es que el estudiante reconozca la variación ya sea de una variable independiente o dependiente como una diferencia, y que a partir de estas pueda reconocer y formular el cociente de estas diferencias como una manera de resolver retos posteriores.

Para las actividades dos y tres se disponen dos móviles A y B que deben recorrer una distancia rectilínea de 15 unidades de distancia en 15 unidades de tiempo, uno de los móviles se mueve con rapidez constante mientras que el otro lo hace con rapidez variable, pero ambos recorren las 15 unidades de distancia en las mismas 15 unidades de tiempo, el reto consiste en lograr que los dos móviles completen el recorrido mediante diferentes retroacciones programadas en el medio en las que se deberán evaluar velocidades medias de cada móvil. Así mismo la actividad 3 requerirá evaluar velocidades medias de cada móvil, pero con cambios de tiempo “pequeños” que permiten empezar a hacer alusión al concepto de infinitesimal.

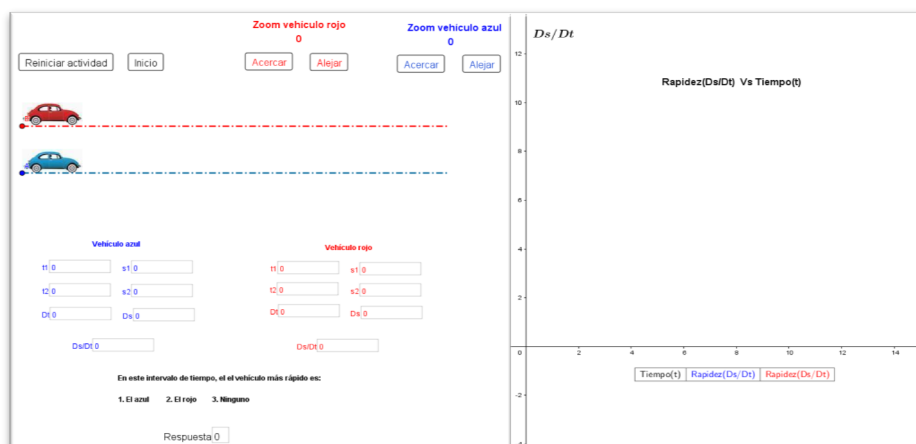


Figura 2. Actividad 2 y 3 – Móviles con rapidez constante y variable

La actividad cuatro se centrará en el móvil de velocidad variable usado en la actividad dos y tres, buscando una aproximación a la velocidad instantánea disponiendo de 1500 subintervalos de tiempo igualmente espaciados de una centésima que permiten generar una sucesión para el tiempo y para el espacio recorrido. Se deberá hacer avanzar el móvil en el recorrido usando el cociente de diferencias por medio de información obtenida a partir de representaciones numéricas y visuales del desplazamiento. Igualmente se propone un rompecabezas que permite generar aproximadamente la gráfica de rapidez del móvil.

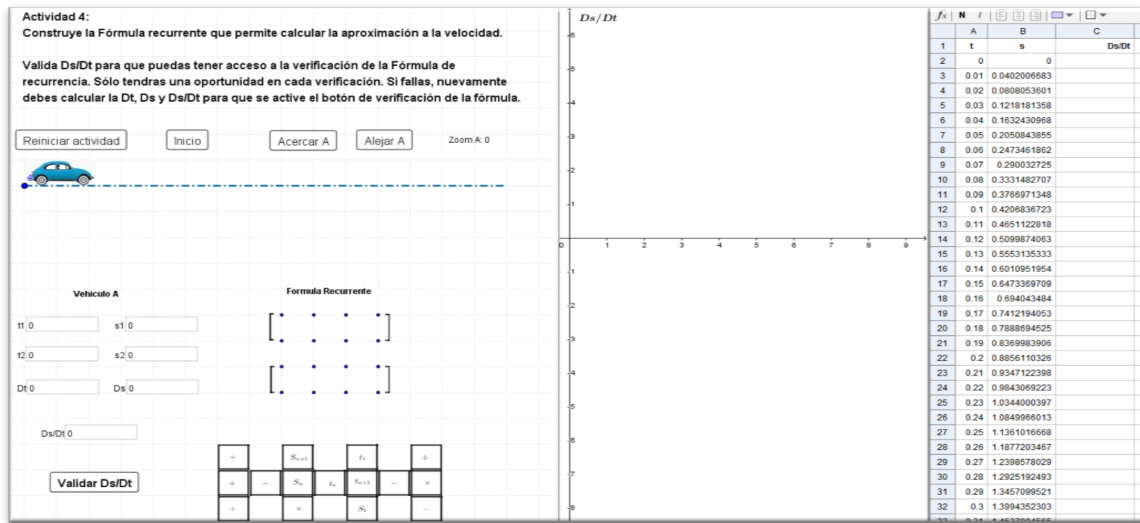


Figura 3. Actividad 4 – Móvil de rapidez variable

La solución de la actividad genera la gráfica de la rapidez del móvil, la cual es una aproximación a la función derivada. En la figura 4 se muestra el contraste entre la función derivada que utiliza el móvil (velocidad instantánea) y la que se obtiene por medio de las tasas de cambio medias a través de la actividad 4.

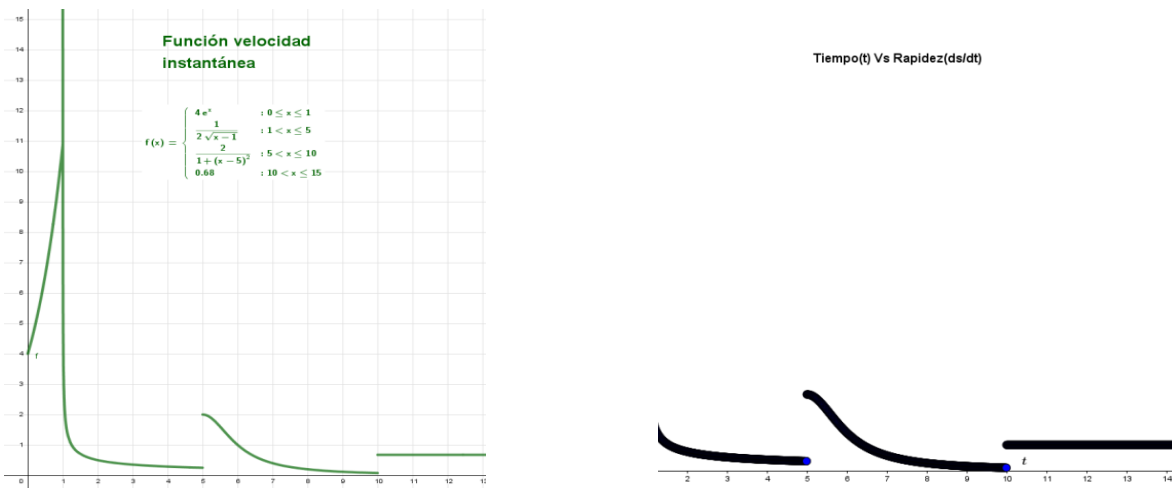


Figura 4. Velocidad instantánea versus tasas de cambio medias

La quinta actividad propone determinar las gráficas de rapidez con la que salen cuatro líquidos diferentes de un grifo en un lapso de tiempo, dando como información, gráficas del flujo de cada líquido de manera aleatoria. Cada flujo está representado por colores verde, naranja, azul y rojo; a su vez cada flujo está sujeto a una única función de tipo constante, lineal, cuadrática o cúbica. Para lograr este reto el estudiante reutilizará estrategias aprendidas en las actividades anteriores junto con las retroacciones proporcionadas por el medio. El objetivo es reforzar el hecho de que la rapidez instantánea de una magnitud de interés se puede obtener de manera aproximada mediante un cociente de diferencias (tasa de cambio media con denominador “pequeño”) y por otra parte deducir la relación que hay entre una función polinómica y su derivada.

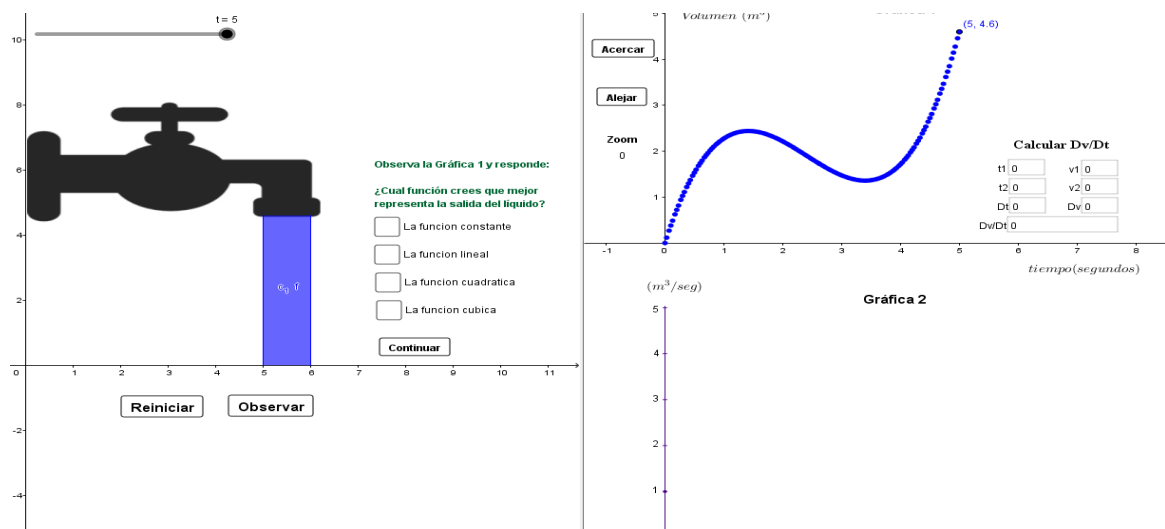


Figura 5. Actividad 5 – Flujo de líquidos aleatorios

■ Conclusiones

En general, hemos logrado desarrollar situaciones a-didácticas creando un medio que permite diferentes tipos de acciones y retroacciones como una manera no convencional de enseñar la derivada como razón de cambio y que deberían repercutir en un mejor aprendizaje. También se han integrado diferentes representaciones del mismo ente matemático en las que no priorizamos el uso de la representación algebraica y las reglas de derivación para resolver problemas.

La dificultad de integrar la TSD con el problema de la derivada y sus diferentes representaciones e interpretaciones radica en que la teoría y los medios computacionales funcionan muy bien bajo representaciones geométricas, más el uso y sincronización de otras representaciones es bastante escaso. Hemos conseguido en gran parte, mediante programación en Javascript el funcionamiento de la TSD con representaciones no solo geométricas sino también con las de tipo numérico y algebraico, aunque estas últimas no se muestran de manera explícita en las actividades.

■ Referencias bibliográficas

- Acosta, M. (2010). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica. *Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 132-142). Universidad Industrial de Santander.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59), Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en didactique des mathematiques*, 7(2), 33-115.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to study the theory of didactic situations: Didactico (Vol. 7)*. Buenos Aires: Zorzal.
- Flores, A. (2013). Ayudando a futuros profesores a mejorar la comprensión conceptual del cálculo. La enseñanza del cálculo diferencial e integral: Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa (pp. 43-82). México: Pearson.
- Hitt, F. (2013). Un análisis sobre la enseñanza del concepto de derivada en el nivel preuniversitario, del rol de un libro de texto y su posible conexión con el uso de tecnología. Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa (pp. 19-40). México: Pearson.
- Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander Ediciones.
- Tall, D. (2013). Una aproximación sensible al cálculo. Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa (pp. 127-157). México: Pearson.
- Vasco, C. E. (2006). *Didáctica de las matemáticas: Artículos selectos*. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.