

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: MEDIACIÓN DE LA CALCULADORA CIENTÍFICA

REAL FUNCTION OF REAL VARIABLE; MEDIATION OF THE SCIENTIFIC CALCULATOR

Jesús Victoria Flores Salazar; Verónica Neira Fernández; Flor Isabel Carrillo Lara; Tito Nelson Peñaloza Vara

Pontificia Universidad Católica del Perú- Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas IREM-PUCP-grupo TecVEM (Perú)

jvflores@pucp.pe, vneira@pucp.pe, f.carrillo@pucp.edu.pe, a20123933@pucp.pe

Resumen

El artículo tiene como finalidad evidenciar cómo, por medio de la interacción con la calculadora científica Casio fx-991 ClassWiz, es posible movilizar conceptos y características de funciones reales de variable real, específicamente de la función cuadrática. La tarea que se analiza es una de las dos trabajadas en el curso corto realizado con profesores en formación continua en la que se presenta la descripción y análisis matemático y didáctico de la misma. Para ello, se toman aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica. En relación con la metodología, esta es cualitativa. Los resultados evidencian que al utilizar diferentes representaciones y la calculadora como medio tecnológico se favorece la movilización de conceptos sobre funciones reales de variable real.

Palabras clave: función cuadrática, formación docente, tecnología

Abstract

The paper aims at demonstrating how interacting with the scientific calculator Casio fx-991 ClassWiz makes it possible to mobilize concepts and characteristics of real functions of a real variable, specifically those of the quadratic function. One of the two tasks done in a short course carried out with teachers in continuous learning is analyzed to present its description, as well as its mathematical and didactic analysis. In order to do that, aspects from the Theory of Registers of Semiotic Representation are taken into account. The methodology is qualitative. Finally, it becomes evident that the use different representations, so the calculator is relevant as a technological means that favors the mobilization of concepts of real functions of a real variable.

Key words: quadratic function, teacher training, technology

■ Introducción

El trabajo tiene por finalidad evidenciar cómo, por medio de la interacción con la calculadora científica, es posible que docentes en formación continua movilicen conceptos y características de funciones reales de variable real. Se presenta en el artículo aspectos del curso dirigido a docentes en formación continua, quienes desarrollaron dos tareas mediadas por la calculadora científica *Casio ClassWiz fx-991*. Específicamente, se expone la tarea sobre función cuadrática y se realiza un análisis matemático y didáctico de la misma.

En cuanto a la función cuadrática, existen investigaciones como las de Surichaqui (2018), Ruiz et al. (2016), Salazar (2015) y Gómez (2011) y en las que la utilización de recursos tecnológicos (Ambientes de Representación Dinámica-ARD, Software con herramientas CAS, calculadoras científicas, entre otras) son presentados como medios para realizar tratamientos en las representaciones gráficas diferentes objetos matemáticos. Por ejemplo, las investigaciones de Gómez (2004, 2005) muestran que el uso de las calculadoras en el proceso de enseñanza y de aprendizaje no se utilizan sólo como herramientas de cálculo, sino como un medio en contextos de problemas para movilizar conocimientos matemáticos y señala que, para ello, los docentes deben estar familiarizados con la tecnología y con la manera en cómo deben incorporarla a sus clases.

Es importante aclarar el uso de la tecnología digital (Calculadora *Casio ClassWiz fx-991*) con la finalidad de favorecer la movilización del concepto función cuadrática. Se considera necesario incorporar progresivamente el uso de este modelo de calculadora, debido a que sus interfaces, tales como tabla y estadística ideales para los diferentes niveles de educación, permite la visualización en línea mediante el uso de código *QR*, es decir, que los gráficos y otros elementos se pueden visualizar en las pantallas de los teléfonos inteligentes o tabletas.

En ese sentido, se afirma que la tecnología puede simplificar procesos algorítmicos (técnicos) y enfocar la atención en la exploración, manipulación, contraste e interpretación de los resultados de cálculo, con lo que es posible realizar conjeturas de las propiedades y/o conceptos matemáticos involucrados en la tarea, ya que permite que la atención se centre en el análisis de la solución de esta.

Al respecto, Trouche (2004) manifiesta que en el trabajo con calculadoras necesita ser construido por los docentes de manera que potencien en sus estudiantes actitudes favorables y una mejor relación con el conocimiento matemático. En cuanto a los aspectos del análisis de la tarea, se utiliza como base teórica aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004) y la metodología utilizada es cualitativa.

■ Aspectos teóricos y metodológicos

En cuanto a la teoría de Registros de Representación Semiótica, Duval (2004) aclara que un objeto matemático no es factible de ser manipulado directamente sino a través de sus representaciones, las cuales pertenecen a registros de representación semiótica. Según el autor, dichos registros son: Lenguaje natural, figural, algebraico y gráfico.

De acuerdo con Duval (1995), para que el aprendizaje de un objeto matemático exista, necesariamente el sujeto debe realizar la conversión de la representación de dicho objeto, como mínimo, en dos registros de representación semiótica distintos. Es en este salto cognitivo donde el sujeto articula las distintas aprehensiones de la representación en un registro, movilizandando nociones y conocimientos previos mediante el planteamiento de estrategias que permitan dar solución a la situación, lo cual evidencia, según el autor, el aprendizaje del objeto matemático. Además, el autor definió las aprehensiones perceptiva, secuencial, operatoria y discursiva en el registro figural. En este artículo, se toman los aportes Peñalosa y Salazar (2018) en cuanto a las aprehensiones en el Registro Gráfico Dinámico, RGD.

Las distintas transformaciones realizadas en una representación dentro de un mismo registro se denomina, según el autor, *tratamientos*, los cuales obedecen las reglas propias de la representación, tales como operaciones algebraicas (Registro algebraico), traslación y rotación de figuras (Registro figural), aproximación gráfica de la recta secante a la tangente de una curva (Registro gráfico), entre otros, y al cambiar la representación de un registro de representación a otro distinto se denomina *conversión*.

Por ejemplo, la figura 1 muestra los registros de representación semiótica de la función cuadrática, así como las conversiones entre sus representaciones y los tratamientos en el registro algebraico.

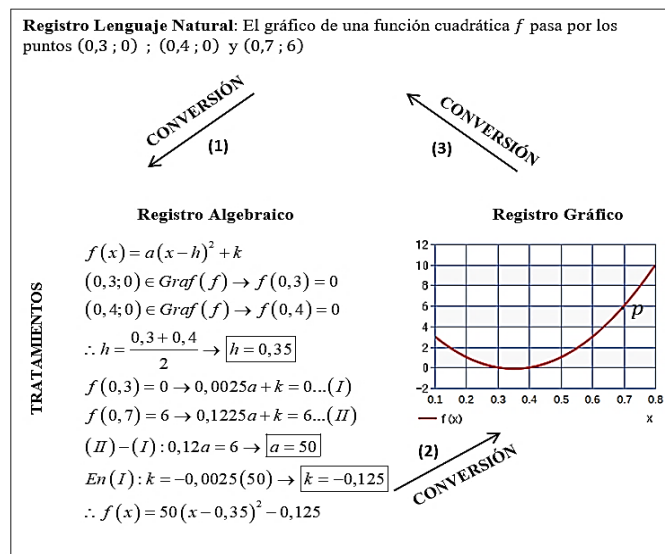


Figura 1. Tratamientos y conversiones en las representaciones de la función cuadrática
Fuente: Adaptado de Duval (2004, p.146)

En la figura 1 se observa que la información proporcionada sobre tres puntos de paso de la representación de la función cuadrática f (representación en lenguaje natural) permite plantear un modelo matemático que representa a dicha función con constantes desconocidas [conversión (1)], donde, por medio de los datos y las leyes del Álgebra, se determinan los valores de las constantes (tratamientos en el registro algebraico). Dada la representación algebraica de f , por medios tecnológicos (lápiz y papel, software graficador, calculadoras, entre otros), es factible representarla gráficamente [conversión (2)] y de la representación gráfica resultante puede identificarse los puntos de paso [conversión (3)], dando a este proceso un comportamiento cíclico, el cual también puede ser realizado en forma inversa ($3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$).

La representación de f en el registro gráfico, mostrado en la figura 1, ha sido realizada mediante la calculadora *ClassWiz fx-991*. Como se observa, no están representados los ejes X e Y , pero para propósitos del minicurso consideramos que los ejes cartesianos están *ocultos* o *fuera de la pantalla* y en los márgenes izquierdo e inferior se indican las intersecciones de cada cuadrícula guía con los ejes, por lo cual las coordenadas del punto p son $(0,7; 6)$.

En relación con los aspectos metodológicos, el estudio es de corte cualitativo. En ese sentido, Borba (2010), fundamentado en Bogdan y Biklen, describe las características de una investigación cualitativa y señala que una investigación cualitativa tiene la fuente directa de los datos en el medio natural; una investigación cualitativa es descriptiva; los investigadores cualitativos tienen más interés por el proceso que a los resultados o productos.

■ Procedimientos metodológicos

Para el desarrollo del curso, por medio de la utilización de la calculadora *ClassWiz fx-991*, se propuso la tarea sobre función cuadrática a los docentes participantes para que realicen el ciclo de conversiones ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$) mostrado en la figura 1, así como el ciclo de forma inversa ($3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$) y variantes.

Cabe resaltar que las representaciones semióticas dadas en lenguaje natural consisten en puntos de paso dados u obtenidos en forma de pares ordenados o en una tabla de datos.

Las representaciones gráficas se presentan en la tarea o pueden ser realizadas por medio del comando *SHIFT QR* y la aplicación *CASIO EDU+*. Las reglas de correspondencia de las funciones cuadráticas (representaciones algebraicas) se obtienen a lápiz y papel o por medio del comando *OPTN 2 – opción 4*.

A continuación, se presenta la descripción y respectivo análisis matemático y didáctico de la tarea.

Descripción y análisis de la tarea: función cuadrática

Esta tarea consta de dos actividades que procedemos a describir.

1. *Primera actividad:* dadas tres representaciones gráficas que llamamos A, B y C de distintas funciones cuadráticas.

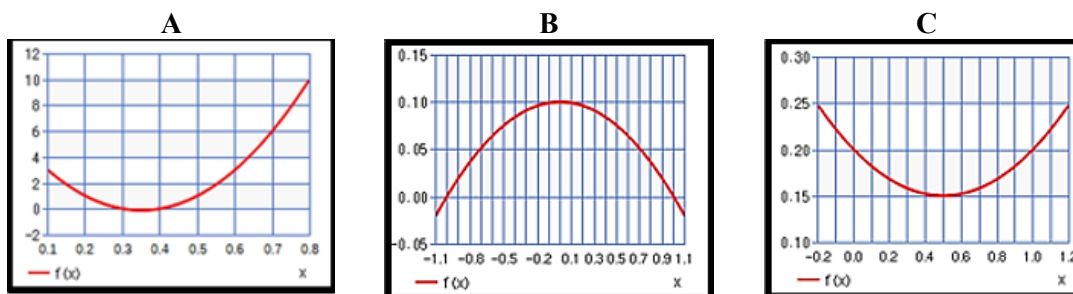


Figura 2. Representaciones gráficas A, B y C de la tarea.

Dadas las representaciones gráficas A, B y C que representan a una función cuadrática:

- a) Determine la regla de correspondencia de cada una de ellas.
- b) Replique las gráficas dadas haciendo uso de su calculadora.

En la figura 2, se muestra las representaciones gráficas en las que por simple lectura pueden obtenerse puntos de paso, obtener la regla de correspondencia de cada una de ellas y verificarlas realizando las gráficas correspondientes y compararlas con las dadas inicialmente.

Esta tarea corresponde a los tratamientos en el registro algebraico mostrado en la figura 1 y, por medio del uso de la calculadora, se obtiene directamente la representación algebraica en la forma general. En esta tarea, se efectúa el ciclo ($3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$) realizándose conversiones en tres registros de representación semiótica distintos.

2. *Segunda actividad:* se presentan dos tablas (Tablas 1 y 2) con datos y luego se pide responder a una serie de preguntas. La actividad se muestra a seguir:

Dadas las siguientes tablas:

TABLA 1		TABLA 2	
x_i	$f(x_i)$	x_i	$g(x_i)$
-7	-4.80	-7	-4.80
-6	-4.55	-6	-3.92
-5	-4.20	-5	-3.18
-4	-3.75	-4	-2.55
-3	-3.20	-3	-2.00
-2	-2.55	-2	-1.50
-1	-1.80	-1	-1.02
0	-0.95	0	-0.53
1	0.00	1	0.00
2	1.05	2	0.60
3	2.20	3	1.30
4	3.45	4	2.13
5	4.80	5	3.12
6	6.25	6	4.30
7	7.80	7	5.70
8	9.45	8	7.35
9	11.20	9	9.28
10	13.05	10	11.52
11	15.00	11	14.10
12	17.05	12	17.05

Determine:

- ¿Cuál de las tablas contiene datos que pertenecen a una función cuadrática?
- Explique, ¿Qué procedimientos realizó para hacer dicha determinación?
- Para aquella tabla cuyos valores no corresponden a una función cuadrática, ¿Podría afirmar entonces de qué tipo es?
- Determine con los datos proporcionados en las tablas la regla de correspondencia de la función cuadrática.
-

En la tabla 1, se observa que, según el crecimiento de los valores x_i , los valores $f(x_i)$ también aumentan, por lo cual f es creciente en los valores de x_i . Se puede elaborar la columna A con las diferencias $f(x_{i+1}) - f(x_i)$ y comprobar que esa diferencia se incrementa constantemente y en progresión aritmética cuya razón es 0.10, lo cual puede verificarse en la columna B.

TABLA 1			
x_i	$f(x_i)$	A	B
-7	-4.80	0.25	0.10
-6	-4.55	0.35	0.10
-5	-4.20	0.45	0.10
-4	-3.75	0.55	0.10
-3	-3.20	0.65	0.10
-2	-2.55	0.75	0.10
-1	-1.80	0.85	0.10
0	-0.95	0.95	0.10
1	0.00	1.05	0.10
2	1.05	1.15	0.10
3	2.20	1.25	0.10
4	3.45	1.35	0.10
5	4.80	1.45	0.10
6	6.25	1.55	0.10
7	7.80	1.65	0.10
8	9.45	1.75	0.10
9	11.20	1.85	0.10
10	13.05	1.95	0.10
11	15.00	2.05	
12	17.05		

Es posible afirmar que los datos de la tabla 1 sí corresponden a una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$; $-7 \leq x \leq 12$ y dado a que la variación de la variación es constante: $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 2a = 0.10$, el coeficiente del término cuadrático es $a = 0.05$, valor obtenido sólo con los datos de la tabla 1 y sin ningún cálculo riguroso.

De la tabla se obtiene que $f(0) = -0.95$, por lo tanto $c = -0.95$, y dado que $f(1) = a + b + c = 0$, entonces $b = -(a + c) = -(0.05 - 0.95) = 0.9$, por lo tanto, la regla de correspondencia de f es: $f(x) = 0.05x^2 + 0.9x - 0.95$; $-7 \leq x \leq 12$.

TABLA 2

x_i	$g(x_i)$	C	D	E
-7	-4.80	0.88	-0.14	0.03
-6	-3.92	0.74	-0.11	0.03
-5	-3.18	0.63	-0.08	0.03
-4	-2.55	0.55	-0.05	0.03
-3	-2.00	0.50	-0.02	0.03
-2	-1.50	0.48	0.01	0.03
-1	-1.02	0.49	0.04	0.03
0	-0.53	0.53	0.07	0.03
1	0.00	0.60	0.10	0.03
2	0.60	0.70	0.13	0.03
3	1.30	0.83	0.16	0.03
4	2.13	0.99	0.19	0.03
5	3.12	1.18	0.22	0.03
6	4.30	1.40	0.25	0.03
7	5.70	1.65	0.28	0.03
8	7.35	1.93	0.31	0.03
9	9.28	2.24	0.34	0.03
10	11.52	2.58	0.37	0.03
11	14.10	2.95	0.40	0.03
12	17.05	3.35	0.43	0.03

En la tabla 2, mediante un procedimiento similar al anterior, se encuentra que en la diferencia de valores consecutivos de la función g registrados en la columna C , no se aprecia un incremento constante, por lo cual se generó la columna D con valores correspondientes a la variación de la variación de valores de la función g . En la columna D , sí se aprecia una progresión aritmética de razón constante igual a 0.03, lo cual puede verificarse generando los datos en la columna E correspondientes a la diferencia de valores consecutivos de los datos de la columna D .

Por lo tanto, los valores $g(x)$ de la tabla 2 no corresponden a una función cuadrática, sino a una función cúbica.

Análisis de la tarea:

Con respecto a la primera actividad, el propósito es que los docentes reflexionen a partir de las representaciones gráficas dadas sobre los elementos y propiedades de la función cuadrática, además que empleen las diferentes maneras de expresar la regla de correspondencia de una función cuadrática.

A partir de la información que se observa en las representaciones gráficas (ver figura 2A), los docentes deberían identificar tres puntos, como mínimo, para poder hallar los parámetros a , b y c de la función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ (Usando la calculadora o lápiz y papel). Por otro lado, en la figura 2B, se puede considerar los puntos de corte de la gráfica de la función f con el eje X en el que se obtiene la siguiente expresión: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Finalmente, en la figura 2C se puede identificar el vértice de la gráfica dada, reflexionando con respecto a la propiedad de simetría y así obtener la regla de correspondencia a partir de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

En la figura 3, se muestra el desarrollo presentado por uno de los docentes participantes, en donde se aprecia que, al hacer una aprehensión perceptiva, identificó algunos puntos de la representación gráfica y luego realizó tratamientos en el registro algebraico para poder escribir las reglas de correspondencia.

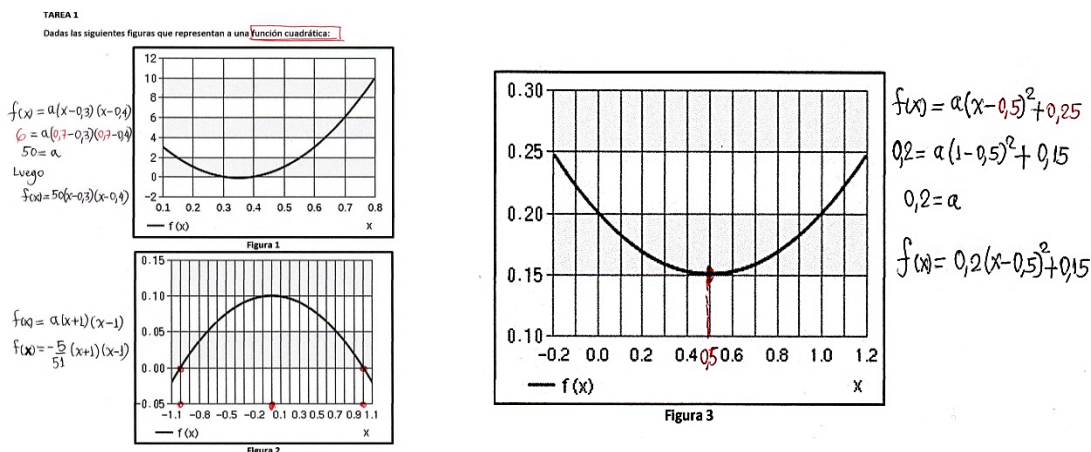


Figura 3. Desarrollo de la primera actividad presentada por uno de los docentes.

Con respecto a la segunda actividad, a partir de una tabla de valores, esperamos que el profesor comprenda el comportamiento de las sucesiones de las diferencias de ordenadas consecutivas cuando x toma valores en progresión aritmética, lo cual le permite identificar a una función cuadrática.

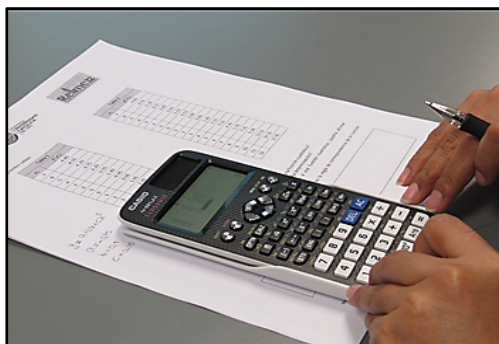


Figura 4. Desarrollo de la primera actividad con calculadora presentada por uno de los docentes.

En la figura 4, se muestra el momento en el que el docente ingresa los datos de las tablas en la calculadora que luego le permitirá crear el código QR para ver la representación gráfica a la que pertenecen los puntos dados y así indicar cuál de las tablas contiene datos que corresponde a la representación gráfica de una función cuadrática.

■ Conclusiones

Mediante tareas apropiadas es posible reconocer las diferentes reglas de correspondencia de la función cuadrática a partir de su representación gráfica, además de sus elementos (raíces, vértice, tres puntos no colineales definen una función cuadrática, valor máximo, valor mínimo) y propiedades (función par, simetría).

Por lo general, la enseñanza de funciones está, en la mayoría de los casos, enfocada con predominancia del registro algebraico, dejándose de lado la representación en los registros gráfico y tabular. Es por ello que se afirma que el

hecho de presentar objetos matemáticos, por medio de sus diferentes representaciones y coordinarlas entre sí, permite atender a ciertas particularidades de aprendizaje de estudiantes en función de sus estilos cognitivos.

El presentar la tarea en el registro gráfico permitió, por medio de la aprehensión perceptiva, que sea posible identificar puntos de paso que luego pueden ser utilizados en la representación algebraica. Es decir, en la regla de correspondencia de cada representación gráfica presentada. También permite realizar tratamientos en el registro de representación gráfica para identificar el punto que representa al vértice, a las raíces de la función y eje de simetría.

Por otro lado, se puede evidenciar que la calculadora es un medio que permite movilizar conocimientos mediante la coordinación de diferentes registros de representación semiótica de la función cuadrática. Por ejemplo, como la calculadora permite generar una tabla de datos (registro tabular), con el uso de un código permite el cambio al registro gráfico.

Se piensa que al incorporar de manera progresiva el uso de la *ClassWiz fx 991*, se puede explorar las distintas funciones de sus interfaces, que son ideales para la enseñanza de diferentes contenidos matemáticos, ya que admite realizar la conversión entre los diferentes registros.

■ Agradecimientos

Agradecemos a la línea investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática – TecVEM por el apoyo brindado para concretizar la presente investigación (PUCP-ID 054-06-01).

También agradecemos el apoyo brindado por el equipo académico de Casio Latinoamérica, representado en el Perú por el Sr. César Lau, por sus aportes en el diseño y desarrollo de las actividades con calculadoras científicas Casio del modelo fx-991 LAX.

■ Referencias bibliográficas

- Borba, M. (2010). *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*. São Paulo : Autentica.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
- Duval, R. (2012). Registro de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revista Electrónica de Educación Matemática, REVEMAT*, 7(2). pp. 266-297. Doi: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>
- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Universidad del Valle, Colombia.
- Duval, R. (2012). *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento*. (M. Thadeu, Trad.) Florianópolis, Brasil.
- Gómez, P. (2005). *Complejidad de las matemáticas escolares y diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje con tecnología*. *Revista EMA. Investigación e innovación en Educación matemática*, 10(2 y 3), pp. 354-374.
- Gómez, P. (2004). *Análisis didáctico y uso de tecnología en el aula de matemáticas*. En Peñas, M.; Moreno, A.; Lupiáñez, J. L. (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas: tecnologías de la información y la comunicación* (pp. 73-95). Granada: SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Gómez, F. (2011). *Implementación de una propuesta de una unidad didáctica interactiva mediada en las nuevas tecnologías para propiciar el aprendizaje de la función cuadrática en el grado noveno del Colegio Calasanz*. Tesis de maestría. Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

- Peñaloza, T. N. y Salazar, J.V.F. (2018). Aprehensiones y modificaciones en el registro gráfico dinámico del paraboloides elíptico. *Educação Matemática Pesquisa*, 20 (1), pp. 61-83. Recuperado de: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/34170/pdf>
- Ruiz, O., Flores, S., Luna, J., González, M., Salazar, M., Cruz, M., Ramírez, O. (2016). Uso de tecnología para la diferenciación a través del concepto de variación. Parte I. *Revista Orientación Educativa*, 30(57), pp. 83-94.
- Salazar, J.V.F. (2015). Génesis Instrumental: el caso de la función cuadrática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, UNION*, 1 (41), pp. 57-67. Recuperado de: <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/41/Artigo3.pdf>
- Surichaqui, F. (2018). *Aplicación del software GeoGebra en el aprendizaje de las funciones cuadráticas en los estudiantes del primer ciclo de la universidad para el desarrollo andino*. Tesis de maestría. Universidad Nacional Hermilio Valdizán, Huánuco, Perú.
- Touche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9, 281-307.