VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

ESTUDO HISTÓRICO DO PARADOXO DE RUSSELL: A FECUNDIDADE DE UMA MATEMÁTICA FALÍVEL

HISTORICAL STUDY OF RUSSELL'S PARADOX: THE FERTILITY OF A FALLIBLE MATHEMATICS

Aline Germano Fonseca Coury, Denise Silva Vilela
Universidade Federal De São Carlos (ufscar) (Brasil)
alinee_fonseca@hotmail.com, denisevilela@ufscar.br

Resumen
Uma visão de matemática infalível, certa e perfeita é comumente aceita e disseminada em escolas e universidades, o que não condiz com o seu desenvolvimento histórico. Neste trabalho, apresentaremos discussões provenientes de resultados de pesquisa acerca do paradoxo de Russell, um importante registro histórico que mostra que erros e paradoxos foram cruciais para o desenvolvimento da matemática, da lógica e da filosofia. Para o campo da educação, as reflexões que serão apresentadas são fundamentais na formação de professores de matemática dado a relevância do paradoxo de Russell; de Frege, fundador da lógica matemática; da *crise dos fundamentos* na história e filosofia da matemática; e do desenvolvimento de outras lógicas.

Palabras clave: paradoxos; fundamentos matemáticos, lógica matemática

Abstract
Mathematics is frequently seen as infallible, exact and perfect. This view is commonly accepted and disseminated in schools and universities, which is not coherent with its historical development. In this paper, we shall present discussions about Russell's paradox, which is a historical element that shows how errors and paradoxes are fundamental for scientific development. The discussions presented here are significant for the mathematics teacher training due to the relevance of Russell's paradox and its importance for the development of mathematics and logic; Frege's work, since he is considered the mathematical logic founder; the foundation crisis in the history and philosophy of mathematics; and the development of non-classical logics.

Key words: paradoxes; mathematics foundation; mathematical logic

Introdução

Neste artigo, temos por objetivo discutir um dos mais significativos episódios da história da matemática, que corrobora a visão de uma ciência dinâmica, que possui limitações, restrições de validade e está em constante transformação. Trata-se do paradoxo de Russell, ou seja, o paradoxo construído por Bertrand Russell (1872-1970) a partir das obras de Georg Cantor (1845-1918). Ao analisar os trabalhos de outro matemático, Gottlob Frege (1848-1925), Russell percebeu que o mesmo paradoxo era gerado dentro do sistema axiomático construído por Frege para fundamentar a matemática. A discussão aqui apresentada é parte dos resultados de uma pesquisa histórico-bibliográfica que teve como objetivo a reconstrução histórica do paradoxo nas obras de Frege, englobando também as tentativas de solução do mesmo (Coury, 2015). Foram empregadas como fontes primárias as obras de Frege (*Ideografia*, 1879; *Os Fundamentos da Aritmética*, 1884; *As Leis Básicas da Aritmética*, volumes 1 e 2, 1893 e 1903) e, como fontes secundárias, comentadores de sua obra.

A relevância da temática na história da matemática e da lógica justifica a presente abordagem, mediante a qual serão destacados o paradoxo e os resultados que resultam numa visão de matemática como uma construção múltipla e falível. O artigo se justifica também porque, apesar de haver, na história da matemática, incontáveis registros que se contrapõem a uma visão de matemática exata, perfeita e sem erros, como é o caso, por exemplo, dos teoremas da incompletude de Gödel e dos paradoxos matemáticos (Batistela, 2017; Coury, 2016), estes episódios não são muito discutidos no meio acadêmico (Batistela, 2017; Guillen, 1989), o que pode corroborar a perpetuação de uma visão absolutista da verdade matemática nos cursos de licenciatura e, consequentemente, nas escolas.

Em 1900, diante da identificação de paradoxos nas teorias matemáticas, David Hilbert (1862-1943) proclamou a sua convicção na solubilidade de qualquer problema matemático, ou seja, na superação desses paradoxos.

> Esta convicção da solubilidade de um problema matemático nos dá um forte estímulo durante o trabalho, nós ouvimos um grito contínuo que vem de dentro: (...) aí está o problema, procura a solução. Você pode encontrá-la através do pensamento puro, pois na matemática não existe “ignoremos”! (Hilbert, 2003, p. 11)

Essa convicção, que esteve presente também antes de Hilbert, enraizou-se na história da matemática de modo que, ainda atualmente, a matemática é perpetuada como símbolo de verdade, apesar dos paradoxos (Guillen, 1989). Prevalece nos discursos dos professores um ideal de matemática “única, infalível” e que “está isenta das transformações constantes, por vezes, caóticas, as quais tudo e todos estamos sujeitos” (Garnica, 2008, p. 508).

Assim, o estudo dos paradoxos na formação do professor é relevante em termos da sua própria formação e por nos remeter a questões filosóficas. Para ressaltar aspectos da obra de Frege e resultados que possuem desdobramentos importantes na filosofia da matemática, na matemática, na lógica e na filosofia geral, organizamos o texto do seguinte modo. Na primeira seção, apresentaremos um breve panorama histórico acerca da lógica clássica e da matemática, abordando discussões sobre o conceito de verdade e certeza. Apresentaremos também os motivos pelos quais o paradoxo de Russell abalou as teorias matemáticas resultando na crise dos fundamentos no fim do século XIX e começo do século XX. Na seção seguinte, discutiremos o paradoxo de Russell na obra de Frege a partir dos resultados da reconstrução histórica realizada em nossa pesquisa (Coury, 2015), apresentando uma de suas muitas versões. Discutiremos também as consequências dos paradoxos na história da lógica e da matemática, bem como a reação da academia diante dessa contradição. Por fim, na última seção, abordaremos a importância dessas discussões na formação do professor de matemática, problematizando a crença em uma matemática certa, verdadeira e infalível.

A reconstrução histórica de conceitos e problemas matemáticos a partir de textos originais é relevante para o professor de matemática na medida em que proporciona a ele conhecer seu objeto de trabalho e a fundamentação da ciência que este leciona. Dessa forma, na educação matemática, um estudo histórico utilizando fontes primárias é também uma forma de aprofundar os estudos em matemática e lógica.

Da verdade matemática na geometria de Euclides à Crise dos Fundamentos

Apesar de ser "um estado de espírito natural", a dúvida é desconfortável, incômoda (Garnica, 2008, p. 499). Em contrapartida, a certeza e a verdade, tão almejadas pelo ser humano ao longo de sua história, se comportam como elementos pacificadores. "É como se a certeza fosse um tesouro escondido e desejássemos possuir um mapa que nos levasse até ele" (Guillen, 1989, p.19). Os Elementos, livro apresentado por Euclides por volta de 300 a.C., expunha um modelo matemático para a geometria que parecia alcançar a tão buscada certeza, pelo menos para este ramo da matemática. Euclides utilizou o método dedutivo da lógica aristotélica clássica para construir seu sistema axiomático, partindo de algumas poucas hipóteses e deduzindo as verdades geométricas a partir destas.

Para aquela época, a lógica sistematizada por Aristóteles era uma fonte segura de argumentação, pois distinguia o que era um argumento válido de um falacioso. Aristóteles reelaborou e refinou o método sofista de argumentação dedutiva (Santos, 1993), resultando nos escritos reunidos na obra *Organon*. O método dedutivo proposto por ele seria o caminho para alcançar o conhecimento seguro.

A lógica aristotélica parte de três princípios, que serão expressos a seguir também em linguagem matemática:

1. Princípio da identidade: qualquer coisa é idêntica a si própria, $\forall x(x = x)$;
2. Princípio da não contradição: nada pode simultaneamente ser e não ser, $\neg(A \wedge \neg A)$;
3. Princípio do terceiro excluído: qualquer coisa é verdadeira ou falsa, não havendo uma terceira opção, $(A \vee \neg A)$.

Os três princípios lógicos eram considerados verdades evidentes, intuitivas, ou do senso comum. O princípio da não contradição ocupa um lugar de destaque nas discussões aqui apresentadas, já que, quando este não é satisfeito, ou seja, uma afirmação e sua negação ocorrem, ou são ambas demonstráveis dentro de um mesmo sistema, gera-se um paradoxo.

Na lógica aristotélica, as proposições simples (aquelas que não tem outra proposição entre seus constituintes) são caracterizadas pela tripla: sujeito, predicado e afirmação (ou negação) de algo. No caso de "Todas as plantas com folhas largas são efêmeras", temos "Todas as plantas com folhas largas" como sujeito e "são efêmeras" como predicado. A partir das proposições, podem ser realizadas cadeias de raciocínio dedutivo, gerando os silogismos aristotélicos. Os silogismos são construídos a partir de três proposições. As duas proposições iniciais, denominadas premissas, possuem uma ligação através de um termo denominado termo médio. Esse termo é o sujeito de uma premissa e também o predicado da outra. Já a terceira proposição, proposição resultante ou conclusão, é aquela deduzida das premissas anteriores.

Se todas as plantas com folhas largas são efêmeras.
E todas as videiras são plantas com folhas largas.
Então todas as videiras são efêmeras.

No exemplo anterior, o termo de ligação entre as premissas é "plantas com folhas largas" que possibilita a dedução da conclusão. Ressaltamos que a validade de um argumento na lógica aristotélica não depende do conteúdo das proposições, ou seja, a lógica aristotélica trata da forma e não do conteúdo dos silogismos e proposições que a constitui. Dessa forma, a verdade ou falsidade das proposições não interferem na validade do argumento. Partindo, portanto, de premissas verdadeiras e utilizando o método dedutivo aristotélico corretamente, a verdade da conclusão decorre. O silogismo acima pode ser representado, então, do seguinte modo (Gomes e D'Ottaviano, 2011):

Enunciado usual
Se todo A é B.

E se todo C é A.
Então C é B.

Enunciado como feito por Aristóteles
(Se) B pertence a todo A.
(E) A pertence a todo C.
(Então) B pertence a todo C.

Dessa forma, o raciocínio é válido, quaisquer que sejam A, B e C, o que não garante a verdade das premissas e, consequentemente, da conclusão. A certeza lógica surge então a partir de uma conclusão que decorre dedutivamente de duas ou mais premissas. Os silogismos aristotélicos, instrumento da razão, pretendiam ser, e assim foram reconhecidos, como a forma de argumentação perfeita. No próprio *Organon*, Aristóteles afirma que "se a veracidade das definições e premissas está garantida, e se elas forem, quanto à quantidade, universais, sua conclusão, conforme as regras dos silogismos, garante uma conclusão *verdadeira*, universal e *eterna*" (Vilela e Deus, 2014, p. 69).

Euclides utilizou em seu sistema axiomático argumentos na forma "se...então" que foram deduzidos de acordo com as regras da lógica. Ao utilizar a lógica de Aristóteles em seu sistema, Euclides suscitou a crença na geometria como uma teoria que descrevia a *verdade* da terra ("medida da terra") e que era fonte da própria certeza matemática: "o *Organon* oferecia o caminho para a certeza lógica, enquanto os *Elementos* eram o tesouro da própria certeza" (Guillen, 1989, p.20). Dessa forma, nos 2000 anos seguintes, a obra *Elementos* de Euclides se tornou sinônimo de certeza, tendo "grande repercussão, ampla apropriação e forte influência no pensamento ocidental, considerada, em muitas ocasiões até o século XIX, um modelo do que o pensamento científico deveria ser". (Vilela e Deus, 2014, p. 64).

O sistema axiomático proposto por Euclides para a geometria possui dez hipóteses iniciais que são uma mistura de senso comum e afirmações admissíveis sobre pontos, linhas e planos (Guillen, 1989). Apesar da grande dose de intuição, ao mesmo tempo em que os axiomas eram admitidos como verdades, era importante garantir que cada um destes não fosse derivável dos outros. O quinto axioma de Euclides, o axioma das paralelas, chamou a atenção por não parecer ser trivial como os outros. De fato, as investigações acerca da derivação deste axioma a partir dos outros resultaram, no século XIX, na elaboração das geometrias não euclidianas, que, em geral, partiam de discussões referentes à não aceitação do quinto axioma. Essas novas geometrias evidenciaram, de certa forma, o fim do reinado da geometria euclidiana. Segundo da Costa, citado por D'Ottaviano e Feitosa (2003), o surgimento das geometrias não euclidianas pode ser percebido como um dos maiores marcos na história da cultura. Segundo Davis e Hersh (1989, p.372), "a perda da certeza na geometria foi filosoficamente intolerável, pois implicou na perda de toda a certeza no conhecimento humano". Isso porque, desde Platão, a geometria tinha servido "como o exemplo supremo da possibilidade dessa certeza" (Davis e Hersh, 1989, p.372).

Apesar de a crença na geometria estar abalada, a confiança dos matemáticos no método dedutivo se manteve e teve como consequência, no final do século XIX, buscar para a aritmética modelos axiomáticos e dedutivos semelhantes ao de Euclides para a aritmética. O ideal era encontrar uma fundamentação para a matemática como um todo, de modo que se a consistência da aritmética fosse garantida, então a consistência da matemática poderia ser reduzida a esta. Organizar a aritmética em um formato lógico foi objetivo de estudo de muitos matemáticos, dentre eles, o alemão Gottlob Frege. Frege trabalhou por mais de 20 anos na construção de uma fundamentação lógica para a aritmética e, em 1902, quando seu último livro estava para ser impresso, Bertrand Russell (1872-1970) comunicou-o da existência de um paradoxo em suas teorias. O *paradoxo de Russell*, como esse resultado contraditório ficou conhecido, foi devastador para a comunidade matemática, pois atacava o solo firme da matemática e da lógica aristotélica clássica, como discutiremos a seguir.

O paradoxo de Russell se destacou em uma época em que a matemática estava cercada por paradoxos (Silva, 2007). O papel central deste paradoxo se deve ao fato de que este atacava "em um nível elementar duas das mais exatas das ciências, a matemática e a lógica", o que instaurou a chamada crise dos fundamentos (Fraenkel, Bar-Hillel e Levy, 1984, p. 2). David Hilbert, já citado neste texto, foi um matemático de grande influência neste período que usou desta influência para incitar seus colegas a buscarem uma solução para a situação incômoda gerada pelos paradoxos: "o estado atual das coisas, em que nos chocamos com paradoxos, é intolerável (...) Se o pensamento matemático é defeituoso, onde encontraremos verdade e certeza"? (Hilbert citado em Davis e Hersh, 1989, p. 378).

A situação gerada pelos paradoxos, em particular pelo paradoxo de Russell, culminou em uma grande mobilização dos matemáticos em torno da busca por uma solução para os paradoxos. A solução dos paradoxos retomaria a garantia de certeza matemática. Alguns matemáticos permaneceram adeptos da lógica clássica, procurando uma maneira de reformular as teorias, sobretudo a teoria dos conjuntos, com o objetivo de evitar os paradoxos e, dessa forma, salvar o projeto de Frege. Outros se voltaram para princípios diferentes, como o formalismo e o intuicionismo (Davis e Hersh, 1989). Por fim, constatou-se que nenhuma dessas três escolas de pensamento poderiam reestabelecer os fundamentos (Davis e Hersh, 1989).

A conclusão inesperada surgiu em 1931 quando o lógico Kurt Gödel abalou a comunidade matemática com seus dois teoremas da incompletude, os quais exibiam provas de que não seria possível construir um sistema lógico dedutivo, utilizando lógica clássica, que fosse capaz de provar todas as afirmações aritméticas dentro do sistema. Ou seja, atestava a impossibilidade de criar um sistema axiomático completo e consistente para aritmética utilizando a lógica clássica. A consequência alarmante é que sempre existirão proposições indecidíveis, afirmações matemáticas as quais não é possível provar se são verdadeiras, nem se são falsas; cada hipótese matemática se tornou uma verdade possivelmente indemonstrável (Guillen, 1989, p. 20). A partir disso, "a maior parte dos matemáticos aprenderam a aceitar a dúvida como uma componente familiar do seu trabalho, conquanto alguns se revelem ainda muito relutantes e acalentem a esperança de recuperar a certeza que em tempos se acreditou ser apanágio da matemática" (Guillen, 1989, p.20). Apesar disso, este resultado e suas consequências não são comumente discutidos nas universidades (Guillen, 1989), mesmo em cursos de licenciatura em matemática (Batistela, 2017), o que perpetua a crença na matemática como fonte de verdade e certeza, o que será discutido mais profundamente adiante.

Segundo Davis e Hersh (1989, p.366), essa crise foi resultado da discrepância entre o "ideal tradicional da matemática", ou seja, o ideal sustentado pelo "mito de Euclides" (matemática como fonte de certeza) e a "realidade da matemática", sistema com paradoxos. De certo modo, a crise se configurou como um resultado de tensões entre a filosofia da matemática e a própria matemática.

A partir do panorama histórico apresentado até aqui, na próxima seção daremos foco à obra de Frege, ressaltando a diferença de sua lógica com relação à lógica aristotélica, a história do sistema lógico construído por ele e as consequências do paradoxo de Russell gerado ali.

O caminho de Frege na busca pela verdade e a identificação do paradoxo

A importância do paradoxo de Russell na história da matemática é inquestionável, este teve um papel central na instauração da crise dos fundamentos e as tentativas de superação do mesmo podem ser vistas como precursoras de respeitadas teorias da lógica e da matemática, como será discutido nesta seção. Desta forma, apresentaremos alguns aspectos da teoria de Frege que permitem compreender a maneira como o paradoxo é gerado em seu sistema.

Frege dedicou mais de vinte anos à construção de um sistema lógico axiomático para fundamentar a aritmética. Ele acreditava que a aritmética era um ramo da lógica e que seria possível criar um sistema capaz de descrever e demonstrar todas as verdades aritméticas e, consequentemente, de toda a matemática. Seus trabalhos culminaram na publicação de três obras que esboçam bem o caminho percorrido por ele na tentativa de fundamentar a aritmética, são estas: *Begriffschrift* ou *Ideografia* (1879), *Die Grundlagen der Arithmetik* ou *Fundamentos da Aritmética* (1884) e Grundgesetze der Arithmetik ou *Leis Básicas da Aritmética* volume 1 (1893) e volume 2 (1902).

A primeira obra de Frege, *Ideografia,* apresenta uma linguagem artificial construída por ele com o intuito de expressar as verdades aritméticas. Apesar de utilizar os princípios da lógica aristotélica e o método dedutivo expresso nos silogismos, Frege acreditava que a linguagem natural (linguagem escrita/falada) não era capaz de abranger as particularidades das proposições matemáticas. Segundo Frege, a linguagem aristotélica é limitada para representar proposições de generalidade múltipla (Sluga, 1999), como "todo filho é a criança de algum pai"; proposições de generalidade múltipla são comuns em matemática. Além disso, ele acreditava ser importante para a sua linguagem não fazer distinções entre proposições que tenham o mesmo conteúdo conceitual, como é o caso das proposições "Os gregos derrotaram os persas na Platea" e "Os persas foram derrotados pelos gregos na Platea".

Dessa forma, ele abandona a caracterização sujeito e predicado, como feita por Aristóteles e adota função e argumento. A mudança pode ser melhor entendida a partir do exemplo dado por Frege na *Ideografia*:

"O hidrogênio é mais leve que o dióxido de carbono".

Pela lógica aristotélica teríamos como sujeito "o hidrogênio" e como predicado "é mais leve que o dióxido de carbono". Utilizando função e argumento, teríamos como argumento "o hidrogênio" e como função "é mais leve do que o dióxido de carbono". O que diferencia os dois modos de delimitar uma proposição é que, para Frege, esta última não é a única possibilidade, ou seja, podemos tomar como argumentos "o hidrogênio" e "o dióxido de carbono" e como função "é mais leve que", ou ainda "dióxido de carbono" como argumento e "mais pesado que o hidrogênio" como a função.

Frege utiliza a simbologia $\varphi(a)$ para representar suas proposições, de modo que $\varphi(\quad)$ é a função, algo que necessita de complemento, enquanto a é o argumento, completo em si. Uma função de dois argumentos seria representada por $\varphi(a, b)$. $\varphi(a)$ também pode ser vista como uma função de argumento φ, que pode ser substituído por outras funções. Esta última afirmação foi questionada por Russell, como veremos a seguir.

A lógica construída por Frege apresenta portanto uma linguagem e simbologia emprestada da própria matemática e, por isso, visualmente distintas da lógica aristotélica. Suas proposições quando verdadeiras são denominadas "juízo" que é representado por ele como $\vdash A$, onde A é uma afirmação. Na *Ideografia*, a proposição condicional, atualmente representada por $B \rightarrow A$, por exemplo, era representada por:

Utilizando esta linguagem e os mesmos princípios lógicos da lógica aristotélica, o sistema lógico de Frege é capaz de representar proposições matemáticas e desenvolver demonstrações a partir do método lógico-dedutivo. A importância da *Ideografia* para a lógica e a matemática é inegável, pois esta caracteriza a instituição de uma lógica matemática (Alcoforado, 2009; Dummett, 1991; Sluga, 1999).

Após a apresentação de seu sistema lógico exposto na *Ideografia*, no seu segundo livro, os *Fundamentos da Aritmética: uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número*, Frege discute, sem utilizar a linguagem apresentada na *Ideografia*, uma tentativa de construir um sistema axiomático para a aritmética utilizando a lógica. O objetivo de Frege nos *Fundamentos* é investigar a natureza das verdades aritméticas e a definibilidade do conceito de número através de estruturas lógicas. Para ele o número é um objeto lógico que pode ser adequadamente construído através de noções puramente lógicas, negando qualquer caráter subjetivo ou psicológico na construção desse conceito. É também nesta obra que Frege enuncia, pela primeira vez, a redutibilidade da aritmética à lógica, ou seja, para ele a aritmética nada mais é do que um ramo da lógica.

Nos *Fundamentos*, Frege apresentou pela primeira vez a noção de extensão de um conceito, um paralelo para a noção de classes utilizada atualmente (Silva, 2007), e que foi fundamental na construção de seu sistema axiomático para a aritmética e também possibilitou a geração do paradoxo.

As *Leis Básicas da Aritmética,* cujo primeiro volume foi publicado em 1893, e o segundo em 1902, representavam o desfecho final para o programa de Frege. Nesta obra, encontram-se expressos os ideais de redutibilidade da aritmética à lógica, expostos nos *Fundamentos,* utilizando uma versão mais refinada da linguagem artificial proposta por Frege na *Ideografia*. As *Leis Básicas* possuem forte influência da lógica clássica, sendo proposta como modelo de certeza, pois usou princípios lógicos dedutivos (Guillen, 1989). Em particular, o volume 1 das *Leis Básicas* é importante, como já mencionado acima, pois é a obra na qual o paradoxo é gerado.

Quando o segundo volume das *Leis Básicas* já estava na gráfica, em 1902, Frege recebeu a famosa carta de Russell, na qual ele apontou que, ao estudar a *Ideografia,* encontrou uma contradição: "tenho encontrado uma dificuldade em apenas um ponto. *Sua afirmação (p.17) de que uma função pode também constituir o elemento indeterminado. Isso é o que eu costumava acreditar, mas agora este aspecto me parece ser duvidoso"* (Russell, 1980, p.130). Nessa mesma carta, Russell enunciou a versão predicativa da contradição. "*Seja* w *o predicado de ser um predicado que não pode ser predicado de si mesmo. Pode* w *predicar ele mesmo? Para qualquer resposta segue a contradição*" (Russell, 1980, p. 130). Frege percebeu que esta contradição não poderia ser gerada em seu sistema na *Ideografia*, onde as funções (Frege não utilizava o termo "predicado" em suas teorias) possuem níveis e uma função jamais poderia ser função de si mesma. Entretanto, Russell mencionou mais adiante a versão das classes, a qual Frege reconhece como derivável dentro de seu sistema nas *Leis Básicas*. O paradoxo de Russell pode ser enunciado em linguagem atual como:

Seja C a classe das classes x que não pertencem si mesmas: $C = \{x/x \notin x\}$.

Pergunta-se: C pertence a si mesma?
Se sim, então por pertencer a si mesma, deve possuir as qualidades que esta enuncia e, portanto, não pertence a si mesma. Por outro lado, se C não pertence a si mesma, então, esta possui a qualidade que enuncia e, desse modo, deve pertencer a si mesma. Dessa forma, C pertence a si mesma se, e somente se, não pertence a si mesma, o que infringe o princípio da não contradição, gerando o paradoxo.

$$C \in C \leftrightarrow C \notin C.$$

O paradoxo de Russell foi devastador para os matemáticos, principalmente porque este mostrou que "seguindo as regras da própria lógica, podemos ser levados a resultados contraditórios" (Guillen, 1989, p. 23).

Frege e Russell trocaram correspondências durante os anos de 1902 e 1912 discutindo maneiras de contornar o paradoxo. Apesar de não conseguirem restaurar o sistema de Frege, suas discussões abriram caminho para teorias desenvolvidas posteriormente e que foram bem aceitas pela comunidade matemática para lidar de alguma forma com a situação gerada (Coury, 2015). Este é o caso das formalizações da teoria de conjuntos, cujas mais utilizadas são a Zermelo-Fraenkel (ZF) e a Neumann-Bernays-Gödel (GBN), e a teoria dos tipos de Russell e Alfred Whitehead (1861-1947) (Coury, 2016). Essas teorias têm como base a lógica clássica aristotélica e permitem eliminar os paradoxos parcialmente ou totalmente, mas não garantem uma fundamentação para a matemática.

As lógicas não clássicas também ganharam força após a crise dos fundamentos. Estas se apoiam na manutenção da autorreferência, resultando em alterações fundamentais na lógica clássica aristotélica. Apesar das inúmeras aplicações tecnológicas destas e da riqueza das teorias das lógicas não clássicas, sua criação também não garantiu a fundamentação da matemática clássica, o que nos direciona para uma das possibilidades de solução previstas por Frege para este problema. Ocorreu que, ao receber a carta de Russel, Frege afirma que talvez a construção de uma fundamentação para a aritmética utilizando a lógica não fosse possível, o que posteriormente foi demonstrado pelo lógico Kurt Gödel (1906-1978), em 1931, em seus teoremas da incompletude. Gödel provou através de seus dois teoremas a impossibilidade de criar um sistema lógico completo e consistente capaz de englobar a matemática como um todo.

Dessa forma, os paradoxos, em particular o paradoxo de Russell, as obras de Frege e os teoremas da incompletude de Gödel representam um momento de construção de teorias matemáticas. Estes mostram, por um lado a fertilidade que erros e paradoxos podem trazer para o desenvolvimento das teorias matemáticas, culminando em novas teorias a partir das tentativas de superação dos mesmos e; por outro, que a matemática é uma área de conhecimento em construção e que, segundo Gödel, está longe de ser perfeita e de ser fonte da verdade. Estes episódios contrapõem uma visão historicamente perpetuada de que a matemática é a fonte do conhecimento certo, exato, imutável e verdadeiro.

Concluiremos a presente discussão acentuando, a seguir, a relevância dos paradoxos e dos teoremas da incompletude na formação do professor de matemática.

■ Conclusões: as consequências de uma matemática falível

As discussões apresentadas anteriormente mostram que a matemática é um campo de conhecimento em construção, em constante desenvolvimento, passível de erros e paradoxos. Além disso, essas discussões mostram também a importância do erro no processo de desenvolvimento científico levando, muitas vezes, a caminhos inexplorados e impensados anteriormente. A história do paradoxo de Russell, de suas consequências e dos teoremas da incompletude de Gödel, são bons exemplos do processo de desenvolvimento matemático.

Apesar disso, a crença na verdade e certeza matemática tem estado presente tanto nas universidades, quanto nas escolas. Nas universidades e cursos de licenciatura em matemática, pouco é discutido acerca dos paradoxos, da crise dos fundamentos e dos teoremas de Gödel (Batistela, 2017; Guillen, 1989). Nas escolas, essas crenças se perpetuam através dos professores, e dos professores dos professores (Batistela, 2017) que, geralmente, concebem a matemática como infalível e verdadeira (Garnica, 2008). Esta crença também se manifesta nas orientações curriculares, como o PNLD (Vilela e Deus, 2014).

Como discutido por Vilela e Deus (2014), os valores de verdade, certeza e irrefutabilidade da matemática entram na escola, dentre outras maneiras, através da demonstração, cuja ausência em um livro didático é um dos critérios eliminatórios na análise dos livros didáticos no PNLD. Dessa forma, o ciclo se mantém: a demonstração, enquanto forma de comprovação de resultados, e a busca pela verdade matemática, ambas valorizadas na academia, chegam nas escolas de ensino fundamental e médio através das orientações curriculares como o PNLD, o que dissemina "valores de rigor, precisão e verdade", perpetuando a "crença no conhecimento verdadeiro" (Vilela e Deus, 2014, p. 73).

De fato, os teoremas da incompletude de Gödel, maior símbolo da incerteza que assombra a matemática, tem sido aparentemente ignorados pela maioria dos matemáticos, tanto na sua prática diária, quanto na divulgação e discussão desses resultados. A discussão se volta para o motivo pelo qual a aceitação do teorema não ocorreu, já que ninguém discutirá ou divulgará resultados matemáticos que confrontem suas próprias crenças.

> Contudo, as disposições mais recentes orientam-se para uma não completa acomodação às incertezas de Gödel. Talvez porque lhes custe conviver com incertezas, os matemáticos preferem viver ainda o

> seu dia a dia como se os acontecimentos fundamentais deste século nunca tivessem ocorrido, ou talvez porque, como sugere Kline, lhes custe imenso acreditar que respeitem à sua atividade as questões levantadas pelas incertezas de Gödel, como se elas fossem uma espécie de desastre que só acontece aos outros. (Guillen, 1987, p.28).

Diante da ausência de discussões sobre o tema, Batistela (2017), propõe a inserção dos teoremas da incompletude de Gödel em cursos de licenciatura de matemática, indicando inclusive em quais disciplinas essas discussões poderiam ser inseridas. Para a autora, os licenciandos geralmente participam de uma atmosfera que apresenta a matemática como soberana, induzindo a uma visão incompleta da mesma. Dessa forma, as discussões acerca dos teoremas de Gödel e dos paradoxos podem se caracterizar como reguladores das expectativas acerca da matemática.

> É imprescindível que este tema seja trabalhado na Educação Matemática com professores que se ocuparão oficiosamente de ensinar matemática em escolas em qualquer que seja o nível, pois, este teorema apresenta a dimensão de alcance do que a matemática pode produzir, é um teorema que se relaciona aos fundamentos desta ciência. (Batistela, 2017, p. 129).

Neste artigo, optou-se por apresentar a história do paradoxo de Russell, dos teoremas da incompletude de Gödel, tanto em seus aspectos lógicos como filosóficos. Em particular, as discussões acerca dos teoremas de Gödel são relevantes sobretudo para a filosofia da matemática já que traz a possibilidade de problematizar a compreensão atual de rigor matemático (Batistela, 2017). A análise de currículos de cursos de licenciatura no Brasil (Gatti e Nunes, 2009) apontam a quase total ausência de discussões filosóficas. Isto acentua a relevância da presente abordagem.

O professor de matemática pode, por esta discussão do paradoxo de Russell e dos teoremas de Gödel, conhecer mais profundamente seu objeto de trabalho e aspectos da sua história, o que pode favorecer novas formas de pensar e ensinar matemática (Baroni e Nobre, 1999).

Referências

Alcoforado, P. (2009). *Lógica e Filosofia da Linguagem*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo.

Baroni, R., Teixeira, M. e Nobre, S. (2011) História da Matemática em Contextos da Educação Matemática: contribuições do GPHM. *Boletim de Educação Matemática* 25(41), 153-171.

Batistela, R. F. (2017). *O teorema da incompletude de Gödel em cursos de licenciatura em matemática*. Tese de Doutorado não publicada. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, Brasil.

Coury, A. G. F. (2015). *Frege e as leis da aritmética: do ideal de fundamentação ao paradoxo*. Dissertação de Mestrado não publicada. Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

Coury, A. G. F. (2016). O impacto dos paradoxos na história e desenvolvimento das teorias da matemática. Em Vilela, D. S. e Monteiro, A. (org.) *Paradoxos do infinito e os limites da linguagem* (pp.129-160). São Paulo: Editora Livraria da Física.

Davis, P.J. e Hersh, R. (1989). *A Experiência Matemática*. Rio de Janeiro: Francisco Alves.

D'Ottavianno, I. M. L e Feitosa, H. A. (2003). *Sobre a história da lógica, a lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas*. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência/Unicamp. Recuperado dia 05 de agosto de 2018 de ftp://ftp.cle.unicamp.br/pub/arquivos/educacional/ArtGT.pdf

Dummett, M. (1991). *Frege: philosophy of mathematics*. London: Duckworth.

Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y. e Levy, A. (1984). *Foundations of set theory.* Netherland: Elsevier Science Publishing.

Frege, G. (1970). *Begriffsschrift: a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought.* Cambridge: Harvard.

Frege, G. (1983). *Os Fundamentos da Aritmética: uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número.* São Paulo: Abril Cultural.

Frege, G. (1964). *The Basic Laws of Arithmetic: exposition of the system*. Berkeley e Los Angeles: University of California Press.

Garnica, A. V. F. (2008) Um ensaio sobre as concepções de professores de matemática: possibilidades metodológicas e um exercício de pesquisa. *Educação e Pesquisa* 34(3), 495 – 510.

Gatti, B. A. e Nunes, M. R. (2009) *Formação de professores para o Ensino Fundamental: estudo de currículos das licenciaturas em Pedagogia, Língua Portuguesa, Matemática e Ciências Biológicas.* São Paulo: FCC.

Gomes, E.L. e D'Ottaviano, I. M. L. *Um panorama da teoria aristotélica do silogismo categórico*. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência/Unicamp. Recuperado dia 05 de agosto de 2018 de ftp://ftp.cle.unicamp.br/pub/Thematic-LogCons-FAPESP/Report-01-2011/ [DG12].pdf

Grattan-Guinness, I. (1978). How Bertrand Russell Discovered his Paradox. *Historia Mathematica* 5(2), 127-137.

Guillen, M. (1983). *Pontes para o Infinito: o lado humano das matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

Hilbert, D. (2003). Problemas Matemáticos: conferência proferia no 2° congresso internacional de matemáticos realizado em Paris em 1900. Nobre, S. (tradução). *Revista Brasileira de História da Matemática* 3(5), 5-12.

Nagel, E. e Newman, J. P. (1958). *Gödel's proof*. New York: New York University Press.

Russell, B. (1980). *Gottlob Frege: Philosophical and Mathematical Correspondence*. Chicago: University of Chicago Press.

Santos, L.H.L. (1993). A essência da proposição e a essência do mundo. Em Wittgenstein, L. *Tractatus Logico-Philosophicus* (pp. 11-112). São Paulo: Editora Universidade de São Paulo.

Silva, J. J. (2007). *Filosofias da matemática*. São Paulo: Editora Unesp.

Sluga, H. D. (1999). *The Arguments of the Philosophers: Gottlob Frege*. London: Routledge.

Vilela, D. (1996). *Análise das Críticas de Frege à Cantor: a noção de número e o emprego da abstração nas definições*. Dissertação de Mestrado não publicada. Universidade Estadual de Campinas, Brasil.

Vilela, D. S e Deus, K. A. (2014). Matemática, adjetivo: a demonstração pela ótica da cultura. *Revista Horizontes* 32(2), 63-76.