UN ESTUDIO SOBRE EL PAPEL DE LA COMPARACION EN GEOMETRIA

A STUDY ON THE ROLE OF COMPARISON IN GEOMETRY

Selvin Nodier Galo-Alvarenga, Ricardo Cantoral
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Honduras, México)
selvin.galo@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen
Nuestra investigación parte de la hipótesis de que la comparación vive entre diversas formas de pensamiento. Con base en ello, realizamos un estudio de dos obras: los *Elementos* de Euclides –Geometría Clásica– contrastado con un texto escolar de Geometría Plana –parte del discurso Matemático Escolar– para confrontar la forma de presentar los conocimientos geométricos y las prácticas emergentes entre ambos, es decir, la confrontación de sus racionalidades. Como resultado se hace evidencia de que la *comparación* es una práctica que sustenta el sistema axiomático deductivo presente en ambas obras.

Palabras clave: pensamiento geométrico, comparación, prácticas

Abstract
The present study is guided on the hypothesis that the comparison lives between several thinking ways. Based on it, we made a study on two works: the Euclid´s Elements, as Classical Geometry, contrasted with a school text of Plane Geometry, part of School Mathematical discourse, to compare the way of presenting the geometric knowledge and the emerging practices in both contexts, that is, the contrast between both approaches. As a result, we give evidence that the comparison is a practice that sustains the deductive axiomatic system present in both works.

Key words: geometrical thinking, comparison, practices

Introducción

Partimos de una premisa básica: el conocimiento matemático se construye socialmente y está asociado a un conjunto de prácticas humanas, con un origen y función social determinados. En su proceso de difusión institucional se los modifica (Cantoral, 2013), y en muchas ocasiones se los desliga de las prácticas asociadas en su construcción. Se van olvidando aspectos esenciales de su proceso de construcción y se potencian significados que en la mayoría de los casos se orientan a las últimas prácticas asociadas a este proceso, tales como la aritmetización que reporta Montiel (2005) para el caso de la trigonometría y Reyes-Gasperini (2016) para el caso de la proporcionalidad.

La Geometría desde sus inicios –de acuerdo con la evidencia con la que se cuenta, por ejemplo, el papiro de Rhind (Chace, Manning y Archibald, 1927)– surge vinculada con la agrimensura egipcia, develando enigmas o problemas prácticos (Struik, 2002), ligada también a la astronomía y la construcción, entre otras ramas del quehacer humano. Los *Elementos* de Euclides, por ejemplo, son producto de una racionalidad griega basada en la argumentación del pensamiento mediante primeros principios. Esto se infiere de las discusiones, diálogos y debates, que surgían en torno al pensamiento filosófico que se observan en obras como los diálogos de Platón, por lo que se volvía necesario el convencimiento de la audiencia o interlocutor por medio de argumentos sólidos, irrefutables. Recordemos su tradición por pensar en los primeros principios del universo y de todo cuanto existe, el *arjé*, ya desde la época de Tales de Mileto. En comentarios de algunos estudiosos de los griegos clásicos como Proclo citado por Vega (1991) se muestra su opinión acerca de que "sólo si se cuenta con unos elementos de geometría, cabe entender el resto de esta ciencia" (p. XXII). En el mismo sentido, Heath (1921) menciona que los Peripatéticos decían que "la retórica, la poesía y la música popular podían ser entendidas sin un curso de instrucción, pero no se puede adquirir conocimiento de unos temas llamados con un nombre especial *matemáticas*" (p. 3). A lo que Boyer (1994) agrega: "los Elementos: se trataba claramente de un libro de texto... un texto introductorio que cubría toda la matemática elemental" (p. 145). Entonces, los *Elementos* son un texto dirigido a un principiante en Geometría y los problemas que esta disciplina matemática resuelve están relacionados con otras ramas, como es el caso de la trigonometría que surge para resolver problemas astronómicos de la época, o la Óptica donde se usa una geometría para estudiar del fenómeno visual en aquel contexto griego (Espinoza, Vergara y Valenzuela, 2017).

Por otro lado, como menciona Jan Struik (2002): "la mayor parte de nuestra geometría escolar está tomada, a menudo literalmente, de ocho o nueve de los trece libros". Pero en ese proceso de introducción a la escuela se olvida la racionalidad con la cual fue escrita la obra y la naturaleza de ese conocimiento; en la escuela actual se orienta a aspectos como lo algorítmico, pues la mayor cantidad de problemas están relacionados con encontrar áreas, volúmenes, relaciones proporcionales aritméticas, o en otros casos; la mayor importancia se le dedica al método deductivo, sin estudiar su uso, ni razón de ser de esta forma de razonamiento. La cual es relativa a la época donde se construye, con criterios de validez y rigor diferentes a los que tenemos hoy en día.

Pretendemos entonces un estudio sobre la Geometría Clásica plasmada en los *Elementos* de Euclides, buscando develar la racionalidad detrás de esta obra, la forma de concebir la Geometría y las prácticas asociadas a la construcción de este conocimiento matemático; posteriormente contrastando con un texto escolar de Geometría como parte del discurso Matemático Escolar actual, para confrontar el papel de las prácticas, significados y usos asociados en ambos casos.

Por otra parte, de acuerdo con lo reportado en algunas investigaciones, postulamos que la comparación es una de las prácticas presentes en la construcción de conocimientos geométricos, además de otros campos del conocimiento matemático; por lo que iniciamos describiendo algunos antecedentes referentes a esta noción. Dichos antecedentes forman parte de dos grupos de investigaciones: por un lado, aquellas relacionadas con las ideas variacionales desde la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV); por el otro, ubicamos algunos estudios que aluden a la comparación dentro de una variedad de disciplinas de la matemática, como ser la Geometría o el Álgebra.

Salinas (2003) postula como idea central en el Pensamiento y Lenguaje Variacional a la comparación; asociada a la "acción de establecer diferencias entre estados" (p. 5). Al respecto, Caballero (2013) agrega la especificación acerca de esos estados, caracterizando a la comparación como:

> "la acción de establecer diferencias entre estados, uno anterior y uno posterior, o bien, dos estados de dos fenómenos diferentes, lo que permite identificar si hubo un cambio y poder analizarlo con base en las características de esos cambios y la variación en esos estados" (p. 33).

Uno de los propósitos de la investigación de Salinas (2003) es estudiar nociones variacionales desde etapas escolares tempranas, caracterizando su evolución para plantear una secuencia didáctica que fortalezca las estrategias variacionales que son base para la construcción de la noción de máximos y mínimos; encontrando que la comparación esta en la base del PyLV.
Siguiendo esta misma idea el trabajo de Fernández (2004) argumenta que en la optimización de funciones se pone en juego la práctica de comparación. Agregando que una característica trascendental que deberán abordar los jóvenes en la secuencia didáctica que propone para el Método de Multiplicadores de Lagrange es "la comparación de las alturas [imágenes] en el punto de restricción… parte vital en la construcción del método" (p. 134).

Trabajos posteriores como el de Caballero (2013) centrado particularmente en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato, se interesa por las dificultades alrededor del desarrollo de este pensamiento, analizando las prácticas propias del estudio de la variación. Para alcanzar tal fin diseña un conjunto de actividades en las que analiza las estrategias de respuesta de los profesores. Aportando para dicho análisis una caracterización de las estrategias –prácticas– variacionales.

En cuanto al otro grupo de investigaciones que forman parte de los antecedentes, están las aportaciones de Guacaneme (2012) quien, en su examen del libro V de los *Elementos* de Euclides considera la comparación de magnitudes, en tanto, procedimiento matemático; describiendo que para "parejas de magnitudes homogéneas aparece el proceso general de comparación para establecer cuándo una excede, es igual o resulta inferior que la otra. A través de estas comparaciones se colige cuándo una magnitud es igual, desigual, mayor o menor que otra" (p. 111). Haciendo alusión a la actividad de comparación para inferir o deducir acerca de la relación –igualdad o desigualdad– que guardan las magnitudes homogéneas. En cuanto a la proporción Guacaneme (2012) argumenta que "las razones se pueden comparar para establecer si están en la misma razón, o si una es mayor o es menor que otra, de manera análoga a como se hace con los números y las magnitudes" (p. 114). Siguiendo la misma idea, en su trabajo sobre la proporcionalidad Reyes-Gasperini (2016) refiere a la proporción como una relación de relaciones, donde se comparan dos relaciones –razones–. Reporta la evolución pragmática (una anidación de prácticas) *comparar–equivaler–conmensurar*, que acompaña la evolución conceptual *razón–proporción–proporcionalidad*. La autora ubica a la comparación en el nivel de *acción* –en el modelo de anidación de prácticas–, como el acto de "elegir y relacionar las magnitudes" (p. 269). Igualar–equivaler como la actividad de "construir una unidad de medida" y medir–conmensurar como la práctica socialmente compartida de "aritmetizar la relación" (p. 540). Además, agrega que la comparación en torno a la proporcionalidad "es intrínseca a la idea de razón" (p. 550). Argumenta que la "acción de *comparar* es intuitiva, deliberada, pues no precisa explicación que fundamente su accionar". Por otro lado, describe que "*equivaler* es una actividad ya que precisa de una mediación, la igualdad de comparaciones, en la acción de construir una unidad de medida". Además, afirma que "*medir* es determinar por comparación una longitud (extensión, volumen, o capacidad), se compara una magnitud con un patrón de referencia". (p. 552)

En torno a otro estudio donde interviene la comparación –en este caso orientado a la generalización de patrones con base en el PyLV– se considera esta en el sentido que: "corresponde a la identificación de la transformación que un valor sufre para convertirse en otro. Implica reconocer la variación que existe entre dos valores" (López-Acosta, 2016, p. 29). Además, alude a que la comparación entre un estado y otro (una figura y otra) del patrón permite identificar el cambio de un caso a otro en la secuencia. Añadiendo que, en el caso numérico, la comparación se hace con base en diferencias y en el caso visual sobre la agrupación de elementos.

Después de lo mencionado anteriormente, donde resaltamos investigaciones en las cuales se hace explícitamente alusión a la comparación, desde diferentes puntos de vista, ubicados en disciplinas diferentes, que van desde la aritmética, el álgebra, la geometría y el cálculo; nos disponemos a estudiar las prácticas presentes en la construcción del conocimiento geométrico desde los *Elementos* de Euclides en el libro I, en contraste con las presentadas en el discurso Matemático Escolar expresadas en el texto escolar de Geometría de la autoría de Wentworth y Smith. Pretendemos identificar las prácticas asociadas a la construcción social del conocimiento geométrico, los usos y significados asociados a las nociones geométricas en los Elementos y contrastar con los usos y significados promovidos en el texto escolar, parte de la ideología del discurso Matemático Escolar actual.

Consideraciones teóricas

Desde nuestra postura teórica, la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa –TSME– nos ocupamos por el estudio de la construcción social del conocimiento y su difusión institucional (Cantoral, 2013), asociada a un conjunto de prácticas alrededor de dicha construcción que dan sentido y significado a dicho conocimiento mediante el uso –saber–. Se considera al saber en sus cuatro dimensiones: didáctica, referente a cómo se produce la difusión institucional del saber matemático; cognitiva, relativa a la apropiación del saber y a la forma en cómo se desarrolla el pensamiento matemático; epistemológica, que trata sobre la naturaleza del saber; y sociocultural concerniente al estudio situado del saber, histórica, contextual y funcionalmente (Cantoral, 2013; Reyes-Gasperini, 2016).

Respecto al estudio en cuestión, consideramos estas dimensiones del saber centrándonos en una obra original –los *Elementos* de Euclides– y en un texto escolar de Geometría plana (Wentworth y Smith, 1913). El primero por ser una de las primeras obras en Geometría, además de ser la base, no solo de los conocimientos geométricos, sino de la matemática en general y la enorme influencia que ha tenido en la enseñanza de la Geometría hasta nuestros días. El segundo por ser un texto muy utilizado en las décadas anteriores y que aún forma parte de la bibliografía en varias universidades mexicanas.

Aunado a la contemplación del saber en todas sus dimensiones antes mencionadas, se encuentran los principios de la TSME que rigen las consideraciones en torno al estudio de la construcción social del conocimiento matemático: la racionalidad contextualizada, el relativismo epistemológico, la normatividad de la práctica social y la resignificación o significación progresiva (Cantoral, 2013; Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014; Reyes-Gasperini, 2016).

Como ya hemos resaltado, también prestaremos particular interés a las prácticas asociadas a la construcción del conocimiento geométrico y su difusión institucional; ya en el apartado anterior se mencionó la postulación de la comparación como una práctica en la base de los mencionados conocimientos. Al respecto, (Salinas, 2003) resalta que esta práctica puede tener manifestaciones diferentes dependiendo el contexto donde se encuentre, así su naturaleza puede variar, manteniendo su esencia.

Aspectos metodológicos

Desde la TSME se considera que el saber es una construcción social, que se significa y resignifica, en un tiempo y espacio; para estudiarlo se debe explorar desde la mirada de quien lo construye, quien lo usa, quien lo aprende, desde la perspectiva histórica, cultural e institucional (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014). Cómo ruta metodológica realizamos una problematización alrededor de la génesis de los conocimientos geométricos, para responder a las preguntas ¿Cuáles son las prácticas asociadas a la génesis del conocimiento geométrico y en su difusión institucional?, ¿qué usos y significados de las nociones geométricas se promueven en los *Elementos* y en el texto escolar? Realizamos un análisis de contenido basado en las consideraciones de Mayring (2000) y Cáceres (2003), entre otros. Este es explicitado en una componente contextual donde estudiamos los *Elementos* de Euclides situado histórica, contextual y funcionalmente, con la intención de conocer la naturaleza de la construcción de los conocimientos geométricos compilados en la obra; y de igual manera en el texto escolar de Geometría de Wentworth y Smith. La primera obra por ser el primero con el que contamos en cuanto a conocimiento geométrico estructurado, que como es sabido, ha marcado la tendencia de enseñar y concebir la Geometría por más de dos milenios; la segunda obra por ser un texto extensamente utilizado en el siglo pasado y en el actual –forma parte de la bibliografía para Geometría en algunas universidades mexicanas–.

Aunado a un análisis textual, proponemos una dialectización –la confrontación– de los *Elementos* con el texto escolar de Geometría plana. Analizamos de forma global cada obra, su intencionalidad, la forma en que desarrollan las proposiciones. Posteriormente se estudian de manera detallada los procedimientos descritos en cada una de las proposiciones del primer libro de los *Elementos*, colocando a la par la proposición homóloga del texto escolar; cada una de estas proposiciones representa una unidad de análisis. Luego de la descripción, se intenta develar aquellas prácticas detrás de los procesos argumentativos en las respectivas construcciones y demostraciones de cada proposición, atendiendo a preguntas del tipo. ¿que y como lo hacen?, ¿para qué lo hacen? Posteriormente se agrupan las proposiciones en categorías de análisis emergentes del mismo análisis; esto es, con base en las herramientas geométricas puestas en juego y la intencionalidad que observamos de un conjunto de proposiciones. Esto permitirá una discusión alrededor de usos y significados de nociones geométricas presentes en la obra de Euclides y que se han opacado por el discurso Matemático Escolar actual; además de reportar una categorización más específica de las proposiciones de los Elementos, esto con base en la puesta en juego de herramientas y nociones geométricas.

Ejemplos del análisis y resultados

Para ejemplificar nuestro análisis presentaremos algunos esbozos del trabajo realizado con las proposiciones de ambas obras relativas a Geometría.

Ubicándonos en el libro primero de los Elementos, se trabaja alrededor de métodos y herramientas que le posibiliten la demostración de proposiciones; por ejemplo, el triángulo equilátero que construye en la proposición 1 permite trasladar distancias iguales sobre el extremo de un segmento y posteriormente usar la propiedad de la congruencia entre sus lados para encontrar segmentos congruentes que posibilitaran el establecimiento de la congruencia de un triángulo. Para designar las proposiciones se una la letra “P” seguida del número de la proposición y “Prob.” o “T” si es un problema de construcción o un teorema como tal, seguido del número de los mimos. Las imágenes son construidas mediante el software Geogebra y las proposiciones y su demostración tomadas de la triangulación entre la traducción anotada por Puertas (1991), la versión en castellano antiguo de Zamorano (1576) y la versión en inglés por Fitzpatrick (2008) para el caso de los *Elementos* de Euclides; y por el lado del texto escolar de Wentworth y Smith se consideran las versiones en inglés de 1913, la edición mexicana de 1979 y 2001.

Proposición en los Elementos
P1 Prob. 1

Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada.
Sea AB la recta finita dada.
Así pues, hay que construir sobre la recta AB un triángulo equilátero.

Descríbase con centro en A y la distancia AB el círculo BCD (Post. 3) y con centro en B y a la distancia BA descríbase otro círculo ACE (Post. 3) y a partir del punto C donde las circunferencias se cortan, trácese las rectas CA y CB hasta los puntos A y B (Post. 1).

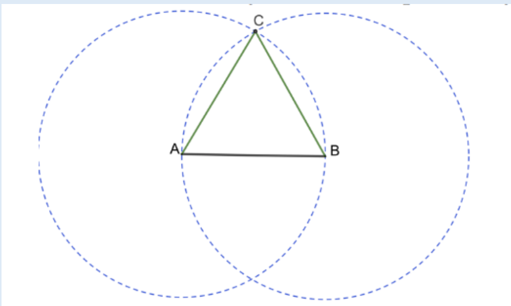

Figura 1. Construcción del triángulo equilátero (elaboración propia a partir de Puertas, 1991)

Y porque A es el centro del círculo CBD, AC será igual a AB (D15), puesto que el punto B es a su vez el centro del círculo CAE, BC es igual que AB (D15); luego CA y CB son iguales a AB; las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí (NC1); por lo tanto, CA es también igual a CB; luego las tres CA, AB y BC son iguales entre sí.
Por consiguiente, el triángulo ABC es equilátero y ha sido construido sobre la recta finita dada AB. Que es lo que había que hacer.

En esta primera proposición hace uso de la circunferencia para construir u obtener segmentos iguales, esto por la propiedad de la circunferencia que permite la obtención de una infinidad de segmentos congruentes que llamamos radios. En la definición de circunferencia, Euclides utiliza la propiedad: todas las rectas que caen sobre ella desde un punto dentro de ella son iguales entre sí. Una vez construidas las circunferencias, traza los segmentos AC y BC, formando el triángulo ABC, seguido de la argumentación del por qué el triángulo que se construyó es equilátero. Se toman dos de los segmentos –a saber, AC y AB– y se comparan, como ambos son radios de la misma circunferencia, entonces son iguales. Seguidamente se toman otros dos segmentos –esta vez BC y AB– se comparan y se concluye que son iguales, por ser también radios de una misma circunferencia. Ahora bien, falta establecer la relación entre los tres segmentos; entra en juego la transitividad de la relación de igualdad, expresada en los elementos mediante la noción común NC1: “cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí” (Puertas, 1991, p. 13). Como dos de los segmentos son igual a otro, entonces son iguales entre sí. De este modo se llega a la igualdad –congruencia– entre los tres segmentos. Argumentando de esta manera, que la construcción realizada es un triángulo equilátero.

Proposición homóloga en el texto escolar

E.4. Construir un triángulo cuyos lados sean todos iguales.
Sea AB la recta dada.
Se trata de construir un triángulo cuyos lados sean iguales a AB.

Haciendo con centro en A y en B, y con radio AB, descríbanse arcos que se corten en C. Trácese las rectas AC y BC.

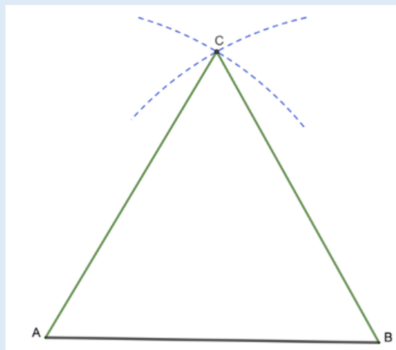

Figura 2. Construcción del triángulo equilátero (elaboración propia a partir de Wentworth y Smith, 2001)

El triángulo ABC es el pedido.

Como se observa en el texto escolar, se trazan arcos y no circunferencias, además de que solamente se presenta el procedimiento de construcción de un triángulo equilátero. Es importante recalcar que se hace mención explícitamente de la construcción de arcos mediante el uso del compás actual.

En esencia los procedimientos son similares, pues se hace uso de la circunferencia para obtener o construir segmentos iguales. Sin embargo, en la escuela solamente construimos arcos, lo que no permite observar claramente las circunferencias, de las cuales si sabemos explícitamente que los radios son iguales; con los arcos no se ve tan claramente este hecho.
Esta proposición y las dos siguientes en los *Elementos*, conforman la primera categoría, están dedicadas a la construcción de segmentos congruentes. En las tres se encuentra el invariante del uso de la circunferencia, y se utilizan para la construcción de segmentos congruentes que posibilitará en proposiciones posteriores la congruencia de triángulos que a su vez conlleva a la congruencia de los elementos de este, a saber, lados y ángulos, además de la congruencia de áreas.

De manera similar se estudian las 48 proposiciones del primer libro de los Elementos, confrontadas con su homóloga en el texto escolar –en el caso que exista–, agrupándolas en categorías de con base en el uso y significado de las nociones geométricas involucradas y la finalidad que cumplen en el compendio de proposiciones que conocemos como libro primero de los *Elementos.*

De manera general, hemos encontrado evidencia de la puesta en juego de la práctica de comparación desde las definiciones, nociones comunes hasta las proposiciones relativas a la congruencia y aplicación de áreas; en el sentido de comparar dos magnitudes homogéneas para determinar su relación de igualdad o desigualdad.

Discusión

Como describimos en el apartado anterior, las tres primeras proposiciones de los Elementos están dedicadas a la construcción de segmentos iguales, con el invariante uso de la circunferencia para este hecho. Postulamos entonces que la construcción de iguales es una de las primeras tareas en los Elementos, la construcción de iguales, en un nivel posterior está la comparación, esta para argumentar la relación entre elementos geométricos. Además, vemos la comparación, en dos sentidos: por un lado, en cuanto a la relación de igualdad entre segmentos en el caso de las proposiciones descritas; por el otro, cuando se realiza la transitividad entre las relaciones, como cuando compara las dos igualdades entre segmentos. Llamaremos a estas, comparación del tipo I y de tipo II respectivamente; un tercer tipo no es tratado en este ensayo. La comparación del tipo I es la comparación entre magnitudes homogéneas, ya sean segmentos, ángulos, áreas, volúmenes. Por otra parte, la comparación del tipo II, que es necesaria para el establecimiento de relaciones entre elementos geométricos, propiedades como el paralelismo, la perpendicularidad o relaciones de relaciones.

Para Salinas (2003), la comparación no siempre se utiliza de la misma manera; esta puede tener naturalezas diferentes dependiendo el contexto. En nuestro caso, vemos puesta en juego la comparación como práctica necesaria para establecer o argumentar la relación de igualad o desigualdad entre elementos geométricos, a saber, segmentos, ángulos, figuras. Que justamente contrasta con los resultados planteados por Espinoza, Vergara y Valenzuela (2017) donde reportan el carácter comparativo en la geometría de la *Óptica* de Euclides, donde se estudia el fenómeno de la percepción visual de los objetos. Declarando que la heurística comparativa está presente en toda la *Óptica* de diversas formas: “desde relaciones de igualdad, de diferencias, de orden y fundamentalmente, desde la transitividad de las relaciones de orden” (p. 28-29).

Estamos reportando en este escrito que la comparación en el contexto de Geometría permite analizar la relación existente entre elementos geométricos para establecer de manera argumentada la relación entre otros elementos geométricos de los cuales no podíamos asegurar su relación.

Referencias bibliográficas

Boyer, C. (1994). *Historia de la matemática*. Tercera reimpresión. Madrid. Alianza editorial

Caballero, M., y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 1197-1205.

Cáceres (2003). Análisis cualitativo de contenido: una alternativa metodológica alcanzable. *Revista de la escuela de psicología facultad de filosofía y educación Pontificia Universidad Católica de Valparaíso,* 2, 53-82.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Un estudio sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática 7(3*) 91-116.

Chace, A., Manning, H. y Archibald, R. (1927). The Rhind mathematical papyrus. Volume I. Mathematical Association of America. Ohio, USA.

Çamorano, R. (1576). *Los seis libros primeros de la geometría de Euclides*. Traducción a la lengua española. Sevilla, España.

Espinoza, L., Vergara, A. y Valenzuela D. (2017). La geometría escolar en crisis: una confrontación con la olvidada “óptica de Euclides”. *Revista Premisa, 19 (74)*

Fernández, (2004). *El Método de Multiplicadores de Lagrange*. Tesis de maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México

Fitzpatrick, R. (2008) Euclid´s Elements of Geometry. Edited and provide with the modern English translation of: The Greek Text of J. L. Heiberg (1883-1885).

Guacaneme, E. (2012). *Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los Elementos*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Pedagógica Nacional. Colombia.
Heath, T. (1921). A History of Greek mathematics. Volume I. Oxford, USA: At the Clarendon Press.
Jan Struik, D. (2002). *Historia concisa de las Matemáticas*. Tercera reimpresión. México: Instituto Politécnico Nacional.
López-Acosta, L. (2016). *Generalización de patrones. Una trayectoria hipotética de aprendizaje basada en el pensamiento y lenguaje variacional*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.
Mayring, P. (2000). Qualitative Content Analysis. *Forum Qualitative Sozialforschung/Forum: Qualitative Social Research, 1(2).* Disponible en: http://nbn-resolving.de/urn: nbn:de:0114-fqs0002204.
Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica. Tesis doctoral no publicada*. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México.
Puertas, M. (1991). *Elementos. Libros I-VII* (traducción anotada). Madrid: Gredos.
Reyes-Gasperini (2016). Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.
Salinas, C. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al cálculo*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.
Wentworth, G., y Smith, D. (1913). Plane Geometry. Bostón, USA: The Atheneum Press.
Wentworth, G y Smith, D. (1979). Geometría Plana y del Espacio. Porrúa: México
Wentworth, G y Smith, D. (2001). Geometría Plana y del Espacio. Vigesimotercera edición. Porrúa: México.