

## ANÁLISE DO PERCURSO DE UM ESTUDO E PESQUISA (PEP) PILOTO EM GRANDEZAS E MEDIDAS EM UMA ESCOLA DE ENSINO MÉDIO EM SÃO PAULO – BRASIL

### ANALYSIS OF A PILOT “STUDY AND RESEARCH PATH” (SRP) ABOUT QUANTITIES AND MEASURES AT A MIDDLE SCHOOL IN SÃO PAULO – BRAZIL

José Valério Gomes da Silva, Marianna Bosch i Casabò, Marlene Alves Dias  
Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco (Brasil), Universitat Ramon Llull (Espanya),  
Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)  
valerio.gomes@yahoo.com.br, marianna.bosch@iqs.edu, maralvesdias@gmail.com

#### Resumo

Apresentamos neste artigo um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) piloto implementado para identificar as possibilidades de desenvolvimento dessa metodologia com estudantes do Ensino Médio (15 - 17 anos) de cursos técnicos. O referencial teórico foi a Teoria Antropológica do Didático (TAD). A metodologia é da pesquisa qualitativa realizada através da análise da intervenção por meio de um PEP. Os resultados mostram que os estudantes ficaram motivados, o que ampliou a mesogênese, modificou na topogênese, mas indicou problemas com a cronogênese, pois seriam necessárias mais sessões para os próprios estudantes tentarem sanar suas dificuldades. O Modelo Epistemológico de Referência (MER) desenvolvido como suporte teórico para a implementação, observação e análise da evolução e resultados do PEP auxiliou também na identificação das intervenções necessárias realizadas pelo pesquisador durante as seis sessões do PEP.

**Palavras-chave:** PEP, TAD, mesogênese, topogênese, cronogênese

#### Abstract

In this article we present a pilot Study and Research Path (SRP) implemented to identify the possibilities of developing this methodology with high school students (15 to 17 years) of technical courses. The theoretical reference was the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). The methodology is a qualitative research carried out through the analysis of the intervention through an SRP. The results show that students were motivated, which increased the mesogenesis, modified the topogenesis, but indicated problems with the chronogenesis, as more sessions would be needed for students to try to heal their difficulties. The Epistemological Model of Reference (EMR) developed as a theoretical support for the implementation, observation and analysis of the evolution and results of the SRP also helped to identify the necessary interventions carried out by the researcher during the six sessions of the SRP.

**Key words:** SRP, ATD, mesogenesis, topogenesis, chronogenesis

## ■ Introdução e problemática

A presença da matemática na escola, segundo Chevallard (1992), é consequência de sua utilização na sociedade, ou seja, a matemática não é algo feito exclusivamente para ser ensinado na escola. Seu valor social não se reduz a um mero valor escolar e o ensino da matemática não deve ser encarado como um fim em si mesmo. Cada sujeito deve saber um pouco de matemática para resolver ou, simplesmente, reconhecer os problemas com os quais se depara na convivência social. Considerando esta matemática numa dimensão ampla, e após o estudo das praxeologias existentes sobre as noções de área e perímetro em livros didáticos brasileiros (Silva, 2011) para o ensino Fundamental (alunos entre 11- 14 anos), e em função dos resultados encontrados, nos pareceu importante saber como os estudantes dos cursos de ensino médio e técnicos utilizam esses conhecimentos e quais as dificuldades que encontram. Diante do exposto será que é possível aplicar um percurso de estudo e pesquisa (PEP) relacionado com as noções de área e perímetro, construídas a partir das necessidades do campo da construção civil, como situação motivadora para o desenvolvimento dessas noções com estudantes do ensino médio?

Este estudo trata-se de uma experimentação piloto do PEP desenvolvido na tese de doutorado finalizada em 2016. O objetivo da pesquisa foi identificar como os estudantes do ensino médio e do ensino técnico (15 – 17 anos) utilizavam as noções de área e perímetro nesses níveis da Educação Básica. Para este artigo analisamos um percurso de estudo pesquisa (PEP), desenvolvido com um grupo de estudantes do 1º ano do ensino médio (14 – 15 anos), ou seja, estudantes que terminaram o ensino fundamental (6 – 14 anos) e iniciam o ensino médio.

## ■ Revisão de literatura

Ressaltamos que dentre as pesquisas mais significativas que discute as grandezas e as medidas está a de Douady & Perrin-Glorian (1989) cujo objetivo da investigação foi elaborar um processo de aprendizagem da noção de área, relacionando-a com o lugar ocupado por uma superfície no plano. As autoras identificaram três dificuldades recorrentes, por elas apresentadas, no desenvolvimento de tarefas que envolvem as noções de área e perímetro. Uma das dificuldades observada pelas autoras está associada às tarefas em que é preciso ladrilhar superfícies, cuja forma difere do quadrado, por exemplo, um triângulo, as pesquisadoras apontam a dificuldade de expressar a área dessas superfícies, em particular do triângulo, em  $\text{cm}^2$ , justificando que esta dificuldade está associada à impossibilidade de cobrir superfícies não quadradas com uma unidade quadrada.

Ao identificar tais erros e dificuldades, Douady e Perrin-Glorian (1989) os classificam em duas concepções: uma concepção geométrica, na qual o aluno associa a área à superfície de uma figura plana e uma concepção numérica, na qual o estudante associa a área ou o perímetro ao número resultante dos cálculos.

Em função destas duas concepções, as pesquisadoras concluíram que os estudantes, em geral, utilizam, seja o quadro geométrico, seja o quadro numérico, não considerando a relação entre estes dois quadros, ou seja, não são capazes de efetuar a articulação entre estes dois quadros. Além disso, a identificação dos erros e dificuldades dos alunos e a classificação desses enquanto concepções geométrica e numérica auxiliaram as pesquisadoras a formularem duas hipóteses didáticas que destacamos a seguir. (1) O desenvolvimento no ensino da noção de área enquanto grandeza permite que os alunos estabeleçam a relação necessária entre os quadros geométrico e numérico. (2) Uma identificação muito precoce entre grandezas e números favorece o amálgama das diferentes grandezas. A partir dessas hipóteses, Douady e Perrin-Glorian (1989) desenvolveram uma engenharia didática que foi experimentada em duas turmas da escola elementar da França.

A partir das observações anteriores, Perrin-Glorian (1992) introduz a problemática matemática da sua pesquisa, apresentando suas opções. Assim, para a pesquisadora, a noção de superfície corresponde a uma parte do plano, mesmo que na sequência será necessário se referir a outros usos deste termo. Ainda na ótica de Perrin-Glorian

(1992), o problema matemático de interesse para a pesquisa é a *comparação do lugar ocupado pelas superfícies no plano, e como facilitador dessa comparação a possibilidade de associar a uma superfície um número que permita compreender o lugar por ela ocupado de forma a substituir a comparação das superfícies pelos números*. Assim, o problema matemático se traduz pela definição de *uma função medida ( $\mu$ ) do conjunto das superfícies planas em  $IR^+$*  (para o qual é preciso acrescentar um valor infinito quando não nos limitamos a superfícies limitadas), que verifica “boas propriedades” da aditividade e de invariância quando do deslocamento.

### ■ Fundamentação teórica

O referencial teórico da pesquisa foi a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard e seus colaboradores. Em particular, foi explorada a noção de Modelo Epistemológico de Referência (MER), segundo os estudos de Bosch & Gascón (2010), para fundamentar o PEP. Segundo os pesquisadores, o MER terá que partir de um modelo de atividade que precisa ser explicitado e interpretado para, a partir dele, formular um problema didático que será transformado num problema científico. Na ação de explicitação desse modelo surgirá a dimensão epistemológica do problema, para, em seguida, aparecer a dimensão básica do problema didático que finalmente se materializará no MER. Segundo Lucas (2015) o objetivo de um MER é analisar e interpretar a justificativa “oficial” para a eleição de determinados conteúdos no ensino.

O modelo dessa pesquisa, sobre as grandezas área, perímetro e suas relações, foi inspirado no MER de Sierra (2006) e na organização conceitual de Douady & Perrin-Glorian (1989). Desse modo, apresentamos (Figura 1) o MER da pesquisa, construído por Silva (2016).

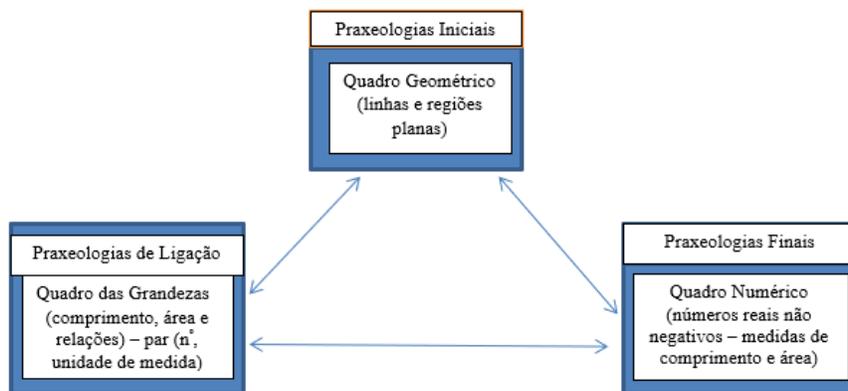


Figura 1: MER da pesquisa.

O MER em torno das grandezas geométricas área, perímetro e suas relações, nos guiaram na definição da questão inicial e das questões e respostas (dialética pergunta resposta) que poderiam surgir durante a experimentação do PEP, que foi arquitetado para ser desenvolvido com estudantes do Ensino Médio.

Desse modo, o PEP foi fundamentado levando-se em conta as pesquisas de Chevallard (2009) e Bosch (2010). O PEP é uma nova engenharia didática introduzida por Chevallard como “didática da investigação codisciplinar”, que é esquematizado pelo autor a partir da noção de sistema didático  $S(X; Y; \square\square)$ , no qual a instância estudantes será indicada por  $X$ , a instância ajuda ao estudo será indicada por  $Y$ , e o desafio didático  $\heartsuit$  é a obra designada para ser

estudada (por  $X$ ) e a fazer estudar (por  $Y$ ). No PEP o desafio didático  $Q$  é substituído por uma questão geradora  $Q_0$ , formando assim o sistema didático  $S(X; Y; Q_0)$  para o qual se procura uma resposta  $R$ .

O pesquisador explica que, para desenvolver tal investigação, é preciso utilizar um conjunto de ferramentas praxeológicas originárias de diversas disciplinas, ou seja, engajar-se em tal investigação implica trabalhar em um percurso de estudo e de pesquisa (PEP) motivado por esta mesma investigação.

Assim, para elaborar  $R$ , é conveniente juntar e organizar um meio de trabalho  $M$ , reunindo um conjunto de recursos antigos e novos, que serão empregados por  $X$ . Entre esses recursos, alguns serão repostas “prontas” para  $Q_0$ , validadas por determinada instituição e que são indicadas por:  $R^\diamond$  (« $R$  punção»), uma vez que essas respostas podem ter recebido um “rótulo” institucional. A análise dessas respostas fornecerá materiais para a construção da resposta  $R$ , indicada  $R^\heartsuit$  ( $R$  coração). Outras respostas correspondem às obras  $O$  da cultura, qualquer que seja o “sentido” cultural, que fornecerão as ferramentas de análise das respostas  $R^\diamond$  e da construção da resposta esperada  $R$ . As obras  $O$  fazem parte das diversas disciplinas estabelecidas, mesmo de algumas que se revelam como não reconhecidas, porque nasceram ou são culturalmente difamadas.

Chevallard (2009) resume esse trabalho de investigação por meio do que ele nomeia “esquema herbatiano”, que é indicado da seguinte forma condensada:  $[S(X; Y; Q) \rightarrow M] \rightarrow R$  e em sua forma desenvolvida por:  $[S(X; Y; Q) \rightarrow \{R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{m+1}, \dots, O_m\}] \rightarrow R$ .

Para as análises dos resultados encontrados, utilizamos as seguintes ferramentas: os descritores mesogênese, cronogênese e topogênese, que segundo Chevallard (1991) correspondem, respectivamente, à: descrição da construção do meio, ou da sucessão dos meios na classe; descrição do avanço dos saberes na classe, isto é, o funcionamento do tempo didático; e a descrição das responsabilidades a serem assumidas pelo professor e pelo estudante quando se trata dos saberes em jogo, ou seja, a divisão epistêmica.

A mesogênese será estudada usando a dialética mídias e meios, conforme definição de Chevallard (2007). Para o pesquisador, a noção de mídia designa todo sistema de representação de uma parte do mundo natural ou social endereçado a um determinado público, por exemplo: o “curso” do professor de Matemática, um tratado de química, o diário de um apresentador de TV, um jornal regional ou nacional, um site de internet, entre outros, constituem algumas das mídias que podemos encontrar atualmente no nosso cotidiano. A noção de *meio* (“milieu”), segundo Chevallard (2007), é considerada por associação a um sentido vizinho ao de “meio” didático, definido na Teoria das Situações Didáticas (TSD). Desse modo, o autor designa como sendo um meio todo sistema que pode ser visto como desprovido de intenção para a resposta que pode ser dada, de maneira explícita ou implícita, a uma determinada questão. O sistema considerado se comporta, sob este olhar, como um fragmento “natural”. Em contraste, a propósito de numerosas questões que pretendemos apresentar, as mídias são, em geral, movidas de uma determinada intenção, por exemplo, a intenção de “informar”. Certamente, uma mídia pode, a propósito de uma questão particular, ser vista como um meio, e ser utilizada como tal.

O PEP experimentado parte da questão  $Q_0$ : Deseja-se construir uma edícula, sem custo de mão de obra, nos fundos de um terreno. A obra será composta de três ambientes: uma cozinha, um quarto e um banheiro. Qual a quantidade mínima de materiais de construção que podem ser usados nessa obra para um custo total entre R\$ 45.000,00 e R\$ 50.000,00?

### ■ Percurso metodológico

A primeira etapa do PEP aconteceu por meio do seu desenho em torno da análise *a priori* com a dialética de perguntas e respostas apresentadas e organizadas num mapa conforme Silva (2016). Nesse mapa, surgiram cinco

questões decorrentes da questão geradora ( $Q_0$ ):  $Q_1$  – Qual a forma do terreno?;  $Q_2$  – Qual o “pé direito” da edícula?;  $Q_3$  – Qual a disposição dos 3 ambientes da edícula?;  $Q_4$ : Qual o modelo de edícula adequado para nosso custo?;  $Q_5$  – Quais são as quantidades mínimas de materiais necessários e seus respectivos custos para a construção da edícula? Essas questões geradas a partir de  $Q_0$  também serviram de questões geradoras de outras pequenas questões na composição do mapa.

Após a definição da questão  $Q_0$  e da construção do mapa de perguntas e respostas, a questão foi aplicada a um grupo de 12 estudantes voluntários do 1º ano do ensino médio de uma escola pública de tempo integral da cidade de São Paulo – Brasil. A experimentação do PEP, ou seja, o percurso foi realizado em seis encontros de 1h e 40 minutos em horários diferentes (manhã e tarde), no laboratório de informática da escola. Os estudantes foram organizados espontaneamente em duplas (cada dupla dispunha de um computador). Além dos estudantes, estavam presentes durante os encontros: o professor mediador (o pesquisador), uma professora da regional da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo que atuou como observadora, uma estagiária de informática e um profissional em filmagem. Os dados foram coletados por meio de filmagens, áudios e material escrito. A dinâmica dos seis encontros era composta de momentos iniciais/apresentação com uma pergunta para os alunos refletirem, de pesquisa na internet, de estudo dirigido quando se tinha alguma questão a ser discutida para o desenvolvimento do PEP e, no final, a apresentação diária da produção por cada dupla do que havia realizado e na última sessão a apresentação da resposta coração para a questão geradora.

### ■ Desenvolvimento do PEP

A 1ª sessão (28/05) iniciou-se com a apresentação do observador e do pesquisador (mediador) do PEP. Na apresentação dos estudantes levamos um chocolate e uma pergunta para cada um sobre as grandezas e medidas. Cada estudante se apresentava, pegava o chocolate na mesa e lia a pergunta para todos, podendo responder ou pedir ajuda aos colegas do grupo. Tais perguntas tiveram o objetivo de iniciar as interações entre todos do grupo: aluno/pesquisador/observador, como também avaliar os conhecimentos prévios dos estudantes relacionados ao ensino fundamental (alunos de 6 – 14 anos). As perguntas eram, por exemplo, “se fosse possível cercar a cidade de São Paulo, qual a unidade de medida adequada iríamos utilizar?” ou “Qual a largura e comprimento do seu quarto, aproximadamente?”.

Na sequência, perguntamos ao grupo o que era comum em todas as perguntas? E algumas respostas sugeriram como: “construção civil”; “unidades de medida” etc. Depois explicamos a organização do trabalho, as datas das próximas sessões e a dinâmica do estudo. Pedimos para um aluno ler a questão geradora, e veio a pergunta: “entenderam a questão?” e dois alunos responderam que não. Um aluno questionou o que era “edícula”? e o outro queria saber o que significava “quantidade mínima de materiais”?

Nesse momento, nosso mapa já começava a ser modificado, pois não contemplava a questão: “o que é edícula?” Esclarecidas as dúvidas do enunciado da  $Q_0$  passamos para o PEP propriamente dito, os alunos discutiam em pares e pesquisavam na mídia internet, o que oportunizou momentos de discussões e pesquisas ao longo de toda a sessão. Finalizamos a primeira sessão com a apresentação de cada dupla sobre suas respectivas produções naquele dia.

Observamos que as discussões giraram em torno de: o que é uma edícula; a forma e as medidas do terreno e da edícula; a disposição dos três cômodos da edícula; a construção de uma planta baixa; como decidir se a edícula iria ocupar todo o terreno ou parte do terreno.

Ao escolherem a forma do terreno as seis duplas optaram pela forma retangular, isto é, as formas menos tradicionais não foram pesadas (formas como: triângulo, trapézio, losango etc.). Ao percebermos certa dificuldade de algumas duplas em organizar o trabalho, ou seja, em estabelecer o papel de cada componente na dupla. Na sequência,

combinamos que o custo do terreno e da mão de obra não estava incluso no valor estipulado para construção da edícula, ou seja, de 45 – 50 mil reais.

Nas 2<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup>, 4<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> sessões (01/06; 02/06; 08/06; 10/06) a frequência dos alunos não foram 100%, ou seja, a cada sessão pelo menos um aluno faltava, o que pode ter prejudicado a compreensão de algumas noções em torno das grandezas e medidas. Para evitar problema de continuidade, entregávamos uma nova ficha e as fichas das sessões anteriores, pois dessa maneira os estudantes podiam consultar as fichas anteriores, e assim não correríamos o risco de alguma dupla ter dificuldades associada à falta de informações sobre o trabalho já realizado.

Em cada ficha entregue constava da parte de identificação, do número da sessão, do enunciado da questão geradora e uma folha sulfite em branco para as futuras anotações e cálculos. Em cada sessão liamos o enunciado de  $Q_0$  no início e antes das apresentações da produção do dia no final da sessão. Ao perceber o leque amplo de materiais na construção da edícula, propomos terceirizar a instalação elétrica, hidráulica, as louças, as madeiras, portas, janelas e as ferragens pagando pelo serviço 10 mil reais.

Desse modo, apenas areia, “brita”, cimento, barro, tijolos, tintas, azulejos, lajotas para os pisos, lajotas para o “rodapé”, gesso, “moldura de gesso do teto”, telhas, argamassa, e lajes para o teto foram os materiais considerados nos orçamentos para a construção da edícula no decorrer das quatro sessões. O custo desses materiais não poderia ultrapassar de 40 mil reais. Observamos aqui a importância do MER, que serviu de suporte nos auxiliando a restringir o encaminhamento do PEP em função do tempo que dispúnhamos.

Após a reorganização do PEP em função do tempo que dispúnhamos e considerando as dificuldades dos estudantes, pudemos destacar como principais pontos discutidos pelas duplas nas quatro sessões foram: comparação entre as áreas de cômodos da edícula; comparação entre perímetros dos cômodos; se a mudança da forma de um cômodo iria ou não mudar sua área; se a mudança da forma do cômodo mudava ou não seu contorno (perímetro); a necessidade de identificar a unidade adequada de perímetro e/ ou de área; a importância da noção de escala para a construção da planta baixa e da maquete; o questionamento que é “pé direito” e sua importância na construção civil; a existência de um comprimento adequado do pé direito da edícula; se a mudança da unidade da medida de área, em termos de quantidade, implicaria na mudança da medida da área de um mesmo cômodo, ou seja, se mudamos o tamanho das lajotas para revestir um cômodo da edícula, a quantidade de lajotas também muda, o que corresponde ao questionamento sobre a invariância da área em relação à medida; qual a unidade de medida para comprarmos uma quantidade de areia? Alguns desses pontos foram dúvidas de todas as duplas, logo necessitou de um estudo mais detalhado, como por exemplo, na elaboração da planta baixa e da maquete da edícula, foi preciso uma abordagem expositiva e uma mediação sobre o trabalho de cada dupla, o que mostra ser um conhecimento prévio ainda não mobilizado pelos estudantes mesmo tendo sido introduzido no ensino fundamental (alunos de 6 – 14 anos).

Alguns questionamentos das duplas eram discutidos no grande grupo (decisão do pesquisador), pois poderiam ajudar a todos, como por exemplo, quantos tijolos necessito para construir  $1\text{ m}^2$ ? Quantos  $\text{m}^3$  de tinta são necessários para pintar  $1\text{ m}^2$  de parede se consideramos apenas uma mão?

Em função das dificuldades em visualizar as paredes para calcular a área de cada uma, mesmo já tendo definido o “pé direito” da edícula, surgiu a ideia entre as duplas de construir uma maquete. Ressaltamos que o cálculo das áreas das paredes da edícula era necessário para pintá-las ou revesti-las com azulejos. Mais uma vez o MER nos auxiliou a propor novos rumos para o desenvolvimento do PEP.

Sendo o grupo de alunos do ensino médio, em função da idade e da falta de experiência e de desconhecem as práticas do campo da construção civil, alguns termos e práticas sobre esse campo necessitaram de esclarecimento. Isso nos conduziu a finalizar as sessões realizando uma sistematização para a organização das falas: o que vocês

avançaram na sessão de hoje? O que ainda é dúvida? O que foi discutido hoje, vocês já sabiam? Quais os termos técnicos que foram pesquisados hoje?

Esta sistematização se mostrou necessária, uma vez que as duplas discutiam diversas ideias, faziam muitas pesquisas, porém, tinham dificuldades de sistematizar e organizar essas ideias, para realizar os cálculos e efetuar o orçamento adequado considerando os diferentes materiais.

Por sugestão do pesquisador, nos últimos 20 minutos da 5ª sessão, antes da apresentação do dia, foi pedido para o grupo que desligassem os computadores e escrevessem os pontos importantes observados durante as cinco sessões, pois na 6ª sessão (do dia 15/06), ou seja, a última, cada dupla deveria apresentar sua resposta para a questão geradora.

Iniciamos a 6ª sessão deixando 20 minutos para as duplas realizarem uma última discussão e fazerem os ajustes finais. Enquanto as duplas finalizavam suas respostas para a questão geradora, organizamos na lousa a forma de apresentação, ou seja, as duplas iriam mostrar a planta baixa e/ou a maquete, informar o custo de alguns materiais, apresentar os cálculos e o custo de outros materiais, e finalmente, informar o custo total para a construção da sua maquete. Reduzimos os cálculos e o custo para apenas quatro materiais, a saber: as cerâmicas do piso, os azulejos das paredes, a cerâmica do rodapé e a “moldura” de gesso no teto.

## ■ Resultados e conclusões

O MER pensado para este artigo foi elaborado em Silva (2016) a partir de adaptações de Sierra (2006) e da organização conceitual de Douady & Perrin-Glorian (1989), serviu de base para o desenho e a experimentação do PEP piloto apresentado nessa pesquisa envolvendo um grupo de alunos do 1º ano do ensino médio. As praxeologias (iniciais, de ligação, finais) representadas na *figura 1*, foram identificadas nas seis sessões do PEP piloto, porém, com intensidades diferentes. A escolha do terreno ou a construção da planta baixa, por exemplo, estão inseridos nas ações de manipulação e de comparação de objetos (desenhos), ou seja, nas praxeologias iniciais. Nessas ações contém elementos do quadro geométrico.

Na busca de algebrizar as relações entre as grandezas geométricas comprimento, área e perímetro, os alunos pesquisados passavam para a 2ª etapa do MER, que era o momento das praxeologias de ligação, no qual os estudantes trabalharam com várias unidades de medida, vários conjuntos numéricos e várias escritas simbólicas, por exemplo, na escolha das lajotas adequadas (custo, tamanho, forma etc) para cobrir o piso do quarto da edícula. As ações envolvendo as praxeologias de ligação dispõem de elementos que estão contidos no quadro das grandezas. E por fim, na busca de unificar as unidades de medida e os conjuntos numéricos os estudantes elaboram praxeologias finais e apresentam elementos que pertencem ao quadro numérico, por exemplo, quando o estudante definiu o tamanho, a quantidade, a forma e o custo das lajotas adequadas para revestir o piso da edícula.

Em relação às articulações entre os quadros e as praxeologias no desenvolvimento do PEP piloto, observamos que algumas atividades que contribuíram para a resposta coração. Algumas ações das praxeologias iniciais passavam diretamente para as praxeologias finais sem considerar as praxeologias de ligação, ou seja, as ações de experimentação de várias unidades de medida antes de definir a unidade de medida adequada eram inexistentes. Mesmo identificando ações que se desenvolve rapidamente, de um modo geral, consideramos que o PEP piloto estudado contribuiu na interação entre as praxeologias e os quadros.

Ao longo da experimentação do PEP o mapa de perguntas e respostas foi sendo modificado, pois foram surgindo questões que o pesquisador não havia pensado antes, por exemplo, O que é edícula?

No transcorrer dos encontros já era possível identificar as dificuldades associadas à compreensão das noções de: ordem de grandeza; escala; relacionar área ou perímetro com unidades adequadas; distinção entre o cálculo de área e o de perímetro. Os gestos didáticos pensados durante a elaboração do projeto contribuíram para auxiliar os estudantes a chegarem a uma resposta para a questão geradora. Dentre esses gestos destacamos: abordagens expositivas para o grande grupo, mediação das discussões de uma dupla por meio de questionamentos de outras duplas, validação de respostas diferentes para uma mesma questão, confrontando e envolvendo todos na discussão. Estes gestos estavam associados a três dimensões: o professor/investigador, os estudantes e o meio e as mídias presentes. Nas seis sessões utilizamos a mídia internet que em alguns momentos fez parte também do meio, pois ao funcionar como meio de execução e controle, revelou-se importante no desenvolvimento do PEP, permitindo que os estudantes encontrassem a resposta ‘coração’, superando a expectativa do pesquisador.

Ao longo do trabalho, surgiram questões não previstas, cujas respostas foram pesquisadas pelos estudantes, em particular, na mídia internet, e quando as respostas encontradas não eram por eles compreendidas, a mediação pelo pesquisador possibilitou a ampliação da mesogênese.

Foi possível observar ainda que a questão geradora era muito ampla, exigindo um tempo maior, ou seja, houve interferência na cronogênese, o que levou a uma nova questão após este piloto.

No decorrer do PEP ficou clara a transferência de responsabilidades ao grupo de estudantes, uma vez que estes se apropriaram da questão e se propuseram a encontrar uma resposta para  $Q_0$ . Apesar de apresentarem algumas dificuldades, os estudantes utilizaram métodos não escolares para os cálculos de área e perímetro, o que nos auxiliou na reconstrução de algumas praxeologias matemáticas junto aos estudantes do ensino médio, considerando mais especificamente o estudo das noções de área, de perímetro e suas relações. Além disso, por se tratar de estudantes do ensino médio, constatamos que algumas duplas já tinham naturalizado conhecimentos sobre as noções de área e de perímetro, inclusive considerá-las enquanto grandezas, o que facilitou o trabalho em termos de topogênese e cronogênese.

Em relação às dificuldades para o desenvolvimento da questão geradora, apareceram, em função da falta de mobilização e disponibilidade de conhecimentos prévios, supostos disponíveis, o que interferiu na cronogênese, exigindo um maior número de intervenções do mediador/pesquisador, ou seja, grande parte da topogênese foi discutida pelo mediador. Certamente, este trabalho também influenciou na mesogênese, pois as abordagens expositivas desenvolvidas pelo mediador interferiram na sucessão dos meios.

Mas precisamos articular os conhecimentos encontrados nessa aplicação para melhor compreendermos as novas condições necessárias para a implementação e gestão de PEP, bem como seus efeitos na aprendizagem do tratamento das áreas e perímetros em matemática.

Ressaltamos finalmente que o MER enquanto modelo teórico do domínio da matemática serviu como quadro de referência para as ações e as mudanças necessárias realizadas durante o desenvolvimento do PEP, assim como para a análise e interpretação dos resultados.

## ■ Referências

- Bosch, M. (2010). Plans d'épargne et modélisation algébrique. Vers une ingénierie didactique des PER.
- Bosch, M. & Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estudio e investigación". En A. Bonner, (Éds.), Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action (p. 1-10). Montpellier, Francia : IUFM.

- Chevallard, Y. (2009). La notion de PER : problèmes et avancées. UMRADDEF. Toulouse. Recuperado de <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Chevallard, Y. (2007). Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. Recuperado de <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en didactique des mathématiques (73-112). Recuperado de <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Chevallard, Y. (1991). La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble, Francia: La Pensée sauvage.
- Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. Repères *IREM* 6 (132-158).
- Douady, R. & Perrin-Glorian, M.J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics* 20(4), 387-424.
- Lucas, C. O. (2015). Una Posible "Razão de Ser" del Cálculo Diferencial Elemental en el Ámbito de la Modelización Funcional. Tesis de doctorado. Universidade de Vigo.
- Sierra, T. A. (2006). Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes. Tesis de doctorado. Universidad Complutense de Madrid.
- Silva, J. V. G. (2016). Grandezas e medidas: um percurso de estudo e pesquisa para a prática profissional. Tese de Doutorado. Universidade Anhanguera de São Paulo.
- Silva, J. V. G. (2011). Análise da abordagem de Comprimento, Perímetro e Área em livros didáticos de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Pernambuco.