UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA PARA EL CRITERIO DE SEGUNDA DERIVADA. UN ESTUDIO DESDE LA MODELACIÓN-GRAFICACIÓN

A DIDACTIC ENGINEERING FOR THE SECOND-DERIVATIVE TEST. A STUDY FROM MODELING-GRAPHING

Amaranta Viridiana Jiménez Villalpando, José David Zaldívar Rojas
Universidad Autónoma de Coahuila (México)
amaranta.jimenez@hotmail.com, david.zaldivar@uadec.edu.mx

Resumen
En este trabajo presentamos algunos resultados de una investigación en curso que tiene como objetivo resignificar la noción del criterio de la segunda derivada a través de la Modelación-Graficación y de una situación de modelación del movimiento (SMM). Adoptamos como metodología a la Ingeniería Didáctica, de la cual está concluido el análisis preliminar que consta de las dimensiones: epistemológica, cognitiva y didáctica. Posteriormente se implementó un instrumento que incorpora elementos tecnológicos tales como la calculadora graficadora y sensores de movimiento, a un grupo de estudiantes de nivel superior. El producto de este reporte es el rediseño de la SMM, que incorpora elementos tecnológicos. Actualmente la investigación se encuentra en una etapa de procesamiento de información para poder llegar a una fase de validación.

Palabras clave: ingeniería didáctica, modelación-graficación, derivada.

Abstract
In this paper we present some results of an ongoing research that aims to resignify the notion of the second derivative criterion through Modeling-Graphing and a movement modeling situation (SMM). We adopted as a methodology the Didactic Engineering, from which the preliminary analysis consisting of the epistemological, cognitive and didactic dimensions is concluded. Subsequently, an instrument was implemented that incorporates technological elements such as the graphing calculator and motion sensors, to a group of upper level students. The product of this report is the redesign of the SMM, which incorporates technological elements. Currently the research is in an information processing stage to reach a validation phase.

Key words: didactic engineering, modeling-graphing, derivative criteria.

Introducción

Nuestro objeto matemático de estudio es el criterio de la segunda derivada, el cual generalmente es estudiado desde una perspectiva algorítmica en un registro de representación principalmente algebraico (Ver, por ejemplo: Leithold (1998), Stewart (2012) y Larson, Hostetler y Edwards (2006)).

En diversas investigaciones dentro de la Matemática Educativa, se han destacado diversas dificultades de los estudiantes con respecto a la noción de límite o el concepto de Derivada (Salazar, Díaz y Bautista, 2009). Con respecto a la última noción, esta generalmente se interpreta en términos de un proceso algorítmico, algebraico y de procesos límite, además se ponen de manifiesto las dificultades que tiene los estudiantes para transitar de la gráfica de la función a la gráfica de la función derivada (Salazar *et al.*, 2009). En particular, cuando los estudiantes se enfrentan a los criterios de la derivada dentro de un curso regular de cálculo, dichas nociones parecería que sólo se usan para realizar gráficas "complicadas" y se dejan de lado los aspectos variacionales relacionados con las nociones de máximos, mínimos y la concavidad. De manera que el estudiante se queda con una presentación acotada de dichos criterios y el llenado de tablas para decidir si un punto es máximo o mínimo usando el signo de la segunda derivada en dicho punto.

De lo anterior emana la siguiente pregunta de investigación, ¿Cómo se puede resignificar el criterio de la primera y segunda derivada haciendo uso de la tecnología? De manera que dichos criterios desarrollen el Pensamiento y Lenguaje Variacional en los estudiantes. La resignificación propuesta en nuestro trabajo se realiza con base en la categoría de Modelación-Graficación desarrollada en los trabajos de Suarez y Cordero (2010) y de la implementación de una situación de modelación del movimiento (SMM).

Problemática de investigación

Existe una extensa cantidad de bibliografía que habla sobre las dificultades del aprendizaje del cálculo. Al respecto, Hitt (2003) menciona que, si la enseñanza del cálculo se restringe a sus aspectos algebraicos sin poner atención al uso de representaciones diferentes a las algebraicas, difícilmente los alumnos llegaran a una comprensión profunda del cálculo. En el diseño de nuestra situación pondremos especial énfasis en que el estudiante sea capaz de pasar de una representación gráfica a una verbal y viceversa.

Por su parte, Vinner (1989) reporta que entre los estudiantes que tienen éxito en matemáticas, el modo algebraico es más común cuando se resuelven problemas rutinarios o casi rutinarios. Las afirmaciones anteriores deben considerarse como reflejo de la situación actual en el aprendizaje de las matemáticas, donde el éxito se mide esencialmente por problemas de rutina que no requieren habilidad visual. En la situación que propondremos el estudiante requiere de habilidades visuales para poder resolver la tarea diseñada. Además, se pretende que por medio de la visualización el estudiante llegue a la resignificación del conocimiento.

Además, no se ha encontrado bibliografía que hable específicamente sobre los problemas de aprendizaje del criterio de la primera y de la segunda derivada, a pesar de que existe una extensa bibliografía que habla sobre los problemas de aprendizaje respecto al concepto de derivada.

La ingeniería didáctica

La ingeniería didáctica surgió en los años ochenta en Francia como una forma de encontrar una relación entre la investigación y la realización didáctica, sobre lo cual Artigue escribió lo siguiente: "Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico" (Artigue, Douady, Moreno y Gómez 1995, p. 33). Puede decirse que la ingeniería didáctica consta de cuatro fases principales: la planeación, el diseño, la experimentación y la validación.

Analizamos los criterios de primera y segunda derivada, y proponemos una Ingeniería Didáctica apoyada en la tecnología que ayude al estudiante a resignificar este concepto. Se ha realizado la parte del análisis preliminar, el cual consta de tres dimensiones, didáctica, cognitiva y epistemológica; además de un diseño de situación, del cual se realizó una prueba piloto, concluyendo la primera parte de esta investigación con la propuesta de un rediseño.

Análisis preliminar

Dimensión didáctica

Dentro de la dimensión didáctica, se realizó una revisión bibliográfica de cuatro textos clásicos de cálculo, los cuales son los siguientes: Stewart (2012), Leithold (1998), Larson *et al.* (2006) y Spivak (1996), específicamente sobre cuatro ejes: i) cómo presentan el criterio, ii) los registros de representación que priorizan, iii) el momento en el cual aparece el criterio durante el estudio del cálculo diferencial y iv) la función del criterio. Tras analizarlos, encontramos significativas semejanzas entre ellos, ya que privilegian lo algebraico sobre lo geométrico y se observa el empleo del llenado de tablas que algoritmizan el criterio y que pareciera que se deja como una herramienta para la graficación de funciones complicadas, tal y como se muestra en el ejemplo de la Figura 1.

Punto	$(-1, -2)$	$(1, 2)$	$(0, 0)$
Signo de $f''(x)$	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(0) = 0$
Conclusión	Mínimo relativo	Máximo relativo	Falla de la prueba

Figura 1. Tomado de Larson et al. (2006, p. 194).

Otra de las dificultades se pone de manifiesto en el fragmento mostrado en la Figura 2 ya que se puede observar que la hipótesis de derivabilidad de la función es omitida, dando como resultado una presentación del concepto de una forma incompleta e imprecisa, pudiendo provocar en el estudiante dificultades o errores en la adquisición del concepto.

Prueba de la primera derivada Supongamos que $x = c$ es un número crítico de una función continua f.

a) Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c.
b) Si f' cambia de negativo a positivo en c, entonces f tiene un mínimo local en c.
c) Si f' no cambia de signo en c (p. ej., si f' es positiva por ambos lados de c o negativa por ambos lados), entonces f no tiene ningún máximo o mínimo local en c.

Figura 2. Tomado de Stewart (2012, p. 291).

En síntesis y de acuerdo con los ejes de análisis de los textos donde se presenta el criterio, se observa que las situaciones donde es "aplicado" el criterio son particularmente para realizar gráficas de funciones "complicadas" y establecer intervalos de crecimiento, decrecimiento, puntos críticos, máximos y mínimos de la función. Se deja de

lado así, aspectos variacionales importantes como el comportamiento en el cual una función crece o decrece, es decir, aspectos de segunda variación.
Dimensión cognitiva

Muchas investigaciones han hablado sobre las dificultades de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo. Por ejemplo, Cuevas, Pluvinage y Dorier (2013) señalan entre otras cosas la primacía de las representaciones algebraicas sobre otras representaciones de índole visual, así como la importancia de situaciones de contexto para abordar contenido matemático.

Uno de los elementos a utilizar en nuestra propuesta es la derivada resignificada como una velocidad, respecto de lo cual Zandieh (2000) menciona que el concepto de derivada puede ser representado gráficamente, como la pendiente de la recta tangente, verbalmente, como la razón de cambio instantánea, físicamente como la rapidez o velocidad, y simbólicamente como el límite del cociente de las diferencias. En su estudio destacó que los estudiantes tienen un entendimiento parcial del concepto de derivada, y que un entendimiento más completo debe englobar distintas formas en que el concepto se manifiesta y sus diferentes usos.

Dimensión epistemológica

El cálculo tardó más de un siglo en desarrollarse, es probable que debido a esto los estudiantes encuentren dificultades en la comprensión de las bases del cálculo. En el siglo XVIII el cálculo fue utilizado en grandes descubrimientos, pero los matemáticos de la época no se preocupaban por demostrarlo rigurosamente, por lo tanto, las manipulaciones con los infinitesimales eran permitidas sin una demostración previa. A finales del siglo XVIII aumentó el interés por parte de los matemáticos hacia la rigurosidad del cálculo debido a la necesidad de su difusión como cuerpo de conocimiento. El álgebra de desigualdades era una herramienta usada en la aproximación de soluciones, y es aquí donde Cauchy le dió un giro a la utilización de esta herramienta, ya que el álgebra de desigualdades sienta las bases de la rigurosidad del Cálculo (Grabiner, 1983).

Asimismo, y con respecto a la dimensión epistemológica, se ha puesto especial énfasis en la lectura de lo que se considera el primer libro de cálculo diferencial e integral de la historia, escrito por Agnesi (1748). En dicha obra, se propone un método para calcular máximos y mínimos, pero es interesante recalcar que la interpretación emana de un punto de vista geométrico, careciendo de un marco de referencia cartesiano como lo tenemos hoy en día. De aquí que para Agnesi un máximo se refiere a la máxima magnitud de la ordenada y el mínimo corresponde a la mínima magnitud de la misma, la cual puede tomar como mínimo valor cero. Estos cálculos fueron realizados obteniendo la tangente de la curva por medio de la primera fluxión y su igualación con cero (para encontrar el máximo), y la igualación con infinito para encontrar el mínimo.

Diseño

Con la intención de proponer una alternativa al estudio de los criterios de la derivada, y a partir de nuestro análisis preliminar, se decidió realizar un diseño de situación donde se resaltará un análisis Variacional de una SMM (Suárez y Cordero, 2010). Una SMM que se sustenta en la categoría de Modelación-Graficación, propicia una resignificación de la variación. A partir de la Categoría se realiza el diseño de la SMM cuyo argumento central será el *uso de la gráfica*, es decir, el argumento considera a las gráficas de las funciones como herramientas para modelar el cambio intrínseco a las funciones de posición, velocidad y aceleración, donde intervienen los conceptos de: razón de cambio, relación función-derivada, manejo de órdenes de variación, máximos y mínimos y acumulación. La SMM en sí permite provocar un escenario propicio para la aparición de la argumentación que responde a la situación.

En nuestro caso partiremos de la gráfica como un elemento central en explicaciones, tales como la caracterización de los puntos extremos y la relación física-numérica que guardan.
Se realizó un primer diseño de situación que constó de tareas y se aplicó una prueba piloto de la situación con un grupo de 20 estudiantes de segundo semestre de la carrera de Ingeniería Física de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Coahuila. En el momento de la implementación, los estudiantes no habían estudiado en su curso de cálculo el criterio de la segunda derivada.

Para la realización de las tareas, se permitió a los estudiantes el empleo de tecnología, que en nuestro caso constó de una calculadora graficadora conectada a un sensor de movimiento, algunos ejemplos de gráficas que se pueden generar con el sensor se muestran en la Figura 3. La sesión fue videograbada y se recopilaron las producciones escritas de los estudiantes a través de las hojas de trabajo. El análisis se realiza tomando en consideración las producciones escritas y la revisión del video de la implementación.

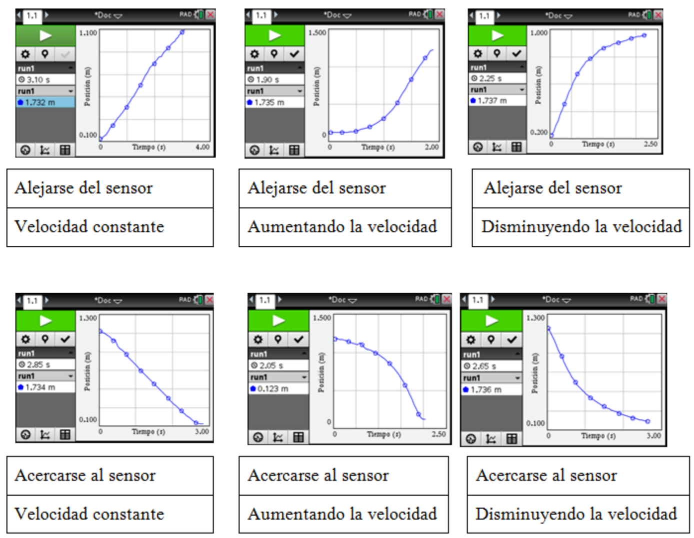

Figura 3. Ejemplos de las gráficas que se pueden generar con el sensor y la calculadora, debajo de cada una de ellas se describe el movimiento que se tiene que realizar para generarlas.

Análisis a priori de la pueba piloto

La primera actividad tiene como título “adivina la gráfica” y tiene como objetivo que el estudiante dibuje sobre cuatro ejes cartesianos la curva que se producirá realizando combinaciones de movimientos, como lo son: alejarse o acercarse del sensor, aumentar, disminuir o moverse con velocidad constante, cabe mencionar que se le hace explícito al estudiante que los ejes representan la posición vs tiempo. Posteriormente se pide al estudiante que realice dichos movimientos con el sensor para comprobar en cuáles de ellos su hipótesis fue correcta. Se pregunta al estudiante si existe alguna otra forma de moverse, aparte de las que puso en los ejes cartesianos con los movimientos solicitados. Existen otras dos formas de moverse que no fueron puestas en los ejes cartesianos a propósito y se pretende que el estudiante deduzca que esos son los movimientos faltantes. En nuestro caso la respuesta esperada es alejarse del sensor disminuyendo la velocidad y acercarse al sensor aumentando la velocidad.

En la segunda actividad titulada: “¿Cómo es mi velocidad?”, se le proporcionan al estudiante seis curvas, de las cuales debe describir el movimiento que realizó en cada una de ellas (acercarse, alejarse, aumentar o disminuir velocidad, o velocidad constante) posteriormente se cuestiona al estudiante, preguntas cuyas respuestas se esperan sean concernientes al crecimiento o decrecimiento, y a la relación que existe entre la pendiente de la recta tangente y la velocidad instantánea en un punto.

La tercera actividad se titula “Viaje sencillo o viaje redondo”, cuyo propósito es que el estudiante realice un desplazamiento de retorno hacia un punto, produciéndose así un máximo o un mínimo. Se pretende que el estudiante estudie las posibilidades de realizar dicho movimiento mediante la variación de la velocidad.

La cuarta actividad tiene como título “El criterio de la primera y segunda derivada”, y tiene como objetivo el resignificar el criterio de la primera y segunda derivada, por medio del análisis de la variación de la velocidad en 4 curvas propuestas, además se pretende que el estudiante comprenda que la condición de continuidad y derivabilidad en el intervalo es necesaria para poder usar los criterios.

Resultados del pilotaje

En la primera actividad los estudiantes no tuvieron dificultades para predecir las gráficas, sin embargo, ninguno de ellos pudo deducir las formas faltantes de moverse (alejarse del sensor disminuyendo la velocidad y acercarse al sensor aumentando la velocidad), dando como respuestas formas más complejas de graficación como lo es la función escalonada (Función que estrictamente hablando es físicamente imposible de conseguir utilizando el sensor de movimiento), o movimientos armónicos, como se puede observar en la Figura 4.

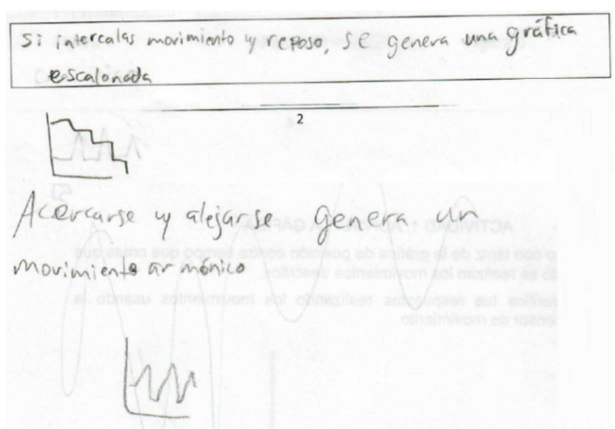

Figura 4. Ejemplo de los movimientos frente al sensor propuestos por los estudiantes.

En la segunda actividad, dada la orientación de los encuestados (ingenieros físicos en formación), se obtuvieron respuestas como: Movimiento Rectilíneo Uniforme y uniformemente acelerado. Cuando esperábamos respuestas como función creciente o función decreciente, recibimos respuestas interesantes similares a las esperadas, como lo son: "se acercan al eje x", "empiezan abajo y terminan arriba", "que cada vez las imágenes tienden más y más a cero". La mayoría de los estudiantes pudo relacionar la pendiente de la recta tangente con la velocidad instantánea en un punto.

Otra de las cosas que se pudieron observar (Figura 5) es que algunos estudiantes consideran la pendiente de la recta tangente en un punto y la velocidad en dicho punto como cosas distintas. El planteamiento de dicha pregunta pone de manifiesto otra dificultad ya que los estudiantes no pudieron llegar a la conclusión de que la velocidad en la Figura 6 es cero, y solo lo ven en términos de la posición, ya que una posición constante corresponde a una velocidad cero.

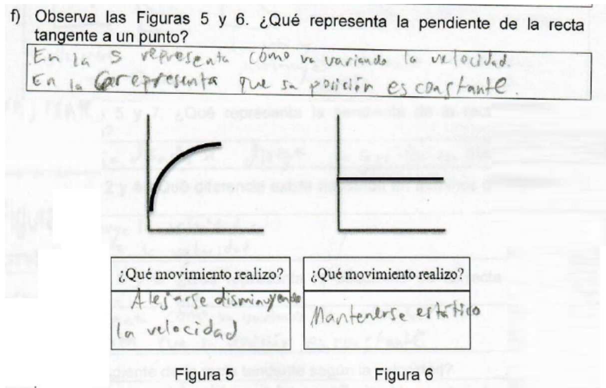

Figura 5. Los estudiantes consideran la pendiente de la recta tangente y la velocidad como cosas distintas.

En la tercera actividad se obtuvieron resultados interesantes, ya que algunos estudiantes plantearon soluciones que eran físicamente imposibles, cabe destacar que con el sensor solo se pueden realizar gráficas de funciones continuas y derivables, debido a la naturaleza de los fenómenos de movimiento clásico. Ya que por ejemplo, para realizar con ayuda del sensor y la calculadora una gráfica continua pero no derivable en todos sus puntos, implicaría, en el punto donde no es derivable, un cambio repentino en la pendiente de la recta tangente, que en este caso se refiere a un cambio repentino en la velocidad, el cuál es imposible de generar, como se puede observar en las dos últimas gráficas de la Figura 5.

En la cuarta actividad los estudiantes tenían claro el signo de las pendientes analizando una curva en dos partes, además de las nociones de crecimiento y decrecimiento de las funciones, resignificadas como la acción de alejarse o acercarse.

En el análisis anterior de la etapa de pilotaje se puede observar también que la gráfica fue usada para comprender el fenómeno a partir de las formas de las gráficas que se obtenían con la tecnología.

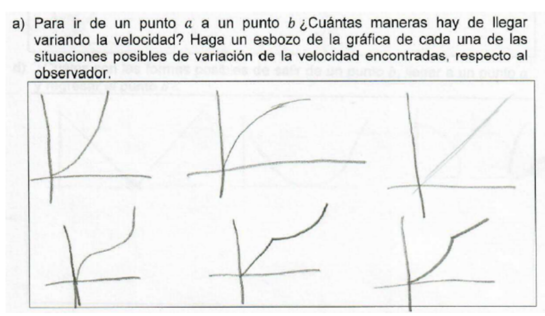

Figura 6. Las últimas dos gráficas muestran soluciones físicamente imposibles de realizar frente al sensor.

Resultado: El rediseño

Tras analizar la prueba piloto se llegó a un rediseño que toma en cuenta las respuestas de los estudiantes en la etapa de pilotaje, ya que los estudiantes tuvieron algunas dificultades con las instrucciones de las tareas. Así, el rediseño se hizo de una manera más concreta para evitar soluciones ambiguas por parte de los estudiantes.

El rediseño consta de tres momentos de los cuales a cada uno tiene asociada una tarea, cada una con un propósito que conduce, finalmente a la resignificación del criterio de la segunda derivada.

Momento 1: establecer funciones crecientes y decrecientes
Tarea 1: Tiene como propósito que el estudiante identifique qué relación existe entre el signo de la pendiente de la recta tangente y el crecimiento o decrecimiento de la función.

Momento 2: reconocer la variación igual a cero (máximos y mínimos)
Tarea 2: Tiene como finalidad que el estudiante identifique que si necesita regresar a un mismo punto obligatoriamente necesita pasar por una velocidad cero, lo cual resignifica el Teorema de Rolle, el cual, como podemos recordar, establece que: si $f(x)$ es una función derivable en el intervalo (a,b), y además $f(a)=f(b)$ entonces existe un punto intermedio c, esto es $a<c<b$, tal que $f'(c)=0$.

Momento 3: reconocer la variación en el comportamiento que varía.
Tarea 3: Habla sobre la variación de la velocidad, es decir, el cambio del cambio, lo cual finalmente conduce al criterio de la primera y de la segunda derivada.

Comentarios finales

El rediseño fue aplicado a un grupo de nueve estudiantes de 7º y 8º semestres de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Coahuila. El análisis de estos resultados se encuentra en proceso. Para ello se considera la videograbación de la sesión con los estudiantes que duró aproximadamente 2 horas, así como las producciones escritas de los mismos.

Es importante mencionar que cuando el estudiante analiza la variación de la velocidad a través de la gráfica de posición que ha sido creada por medio de una situación de modelación de movimiento, se crea un escenario que conducirá a un significado del criterio de la segunda derivada, distinto al que se muestra en el ámbito académico actual.; un escenario donde la concavidad de la curva se entiende a través de un cambio en la velocidad.

Por último, consideramos que el dejar que la ecuación sea el elemento central de una explicación matemática, podría ser para el estudiante difícil de comprender o visualizar, pero, por el contrario, si se muestra una situación de modelación de movimiento, se presenta otra alternativa a la enseñanza, donde el estudiante resignifica su conocimiento.

Referencias bibliográficas

Agnesi, M. G. (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*. Milán, Italia: Regia Ducal Corte.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

Cuevas, C., Pluvinage, F. y Dorier, J. (2013). *La enseñanza del cálculo diferencial e integral*. México: Pearson Educación.

Grabiner, J. V. (1983). Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus. *The American Mathematical Monthly*, 90(3):185-194.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. In *XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers, Michoacan University San Nicolás de Hidalgo, Morelia (Mexico)*.

Larson, R., Hostetler, R., y Edwards, B. (2006). *Cálculo con geometría analítica.* México: McGraw-HilI Interamericana.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo*. México: Oxford University Press.

Salazar, C., Díaz, H. y Bautista, M. (2009). Descripción de niveles de comprensión del concepto derivada. *Tecné, Episteme y Didaxis: Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología*, (26), 62-82.

Spivak, M. (1996). *Cálculo Infinitesimal*. México: Reverté.

Stewart, J. (2012). *Cálculo, trascendentes tempranas*. México: Cengage Learning.

Suárez, L., y Cordero, F. (2010). Modelación Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4), 319-333.

Vinner, S. (1989). The Avoidance of Visual Considerations in Calculus Students. *Focus on learning problems in mathematics*, *11*, 149-56.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education*, *8*, 103-127.