



**DIFICULTADES Y ERRORES PRESENTES EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN EL APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN LINEAL**

Marianela Alpízar Vargas, Hazel Fernández Álvarez, José Morales Reyes, Steven Quesada Segura

malpiza@una.cr,  
hazelgt17@hotmail.com,  
josemore93@hotmail.com,  
steven\_09\_11@hotmail.com

Universidad Nacional de Costa Rica  
Heredia, Costa Rica

.....

**Resumen.** Se exponen las dificultades y errores que presentan los estudiantes de décimo año de la educación secundaria costarricense en el aprendizaje de la función lineal. Estas limitaciones de aprendizaje forman parte de uno de los organizadores del Análisis Cognitivo, perteneciente al Análisis Didáctico del Grupo Pensamiento Numérico de la Universidad de Granada. Se obtuvo que la mayoría de los errores se deben a cálculos y asociaciones incorrectas, y al deficiente manejo de conceptos, contenidos y procedimientos.

**Abstract.** A presentation of a research approach aimed at describing the difficulties and errors presented in 10th grade students of Costa Rican Secondary Education in the learning of the linear function. This learning limitations are part one of organizers of Cognitive Analysis, proposed by the Didactic Analysis of the Numerical Thinking Group of University of Granada. It was found that most errors are due to incorrect calculations and associations, and deficiencies in the handling of concepts, contents and procedures.

**Problema de investigación.**

En Costa Rica la educación preuniversitaria se divide en dos etapas: Educación General Básica, comprende estudiantes de primer grado de educación primaria hasta los de noveno año de educación secundaria, cuyas edades oscilan entre seis y quince años; y Educación Diversificada, comprende los niveles de décimo y undécimo año de educación secundaria, cuyas edades rondan entre dieciséis

y diecisiete años.

Lo reportado en este documento es parte de un subanálisis de una investigación realizada con base en el Análisis Didáctico, propuesto por el Grupo Pensamiento Numérico de la Universidad de Granada. Específicamente, se expone aquí lo referente al organizador denominado Limitaciones de Aprendizaje del Análisis Cognitivo.

El Análisis Didáctico se utilizó por parte de los autores de este escrito, como fundamentación teórica, en la creación de un material didáctico para la enseñanza de la función lineal y de la función cuadrática, a la luz del Programa de Estudios de Matemática del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP). La investigación completa corresponde a un trabajo final de graduación para optar por el grado académico de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica, en ésta se realizaron los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción sobre la función lineal y la función cuadrática.

Sin embargo, en este artículo solamente se expondrán parte de los resultados referidos con el Análisis Cognitivo de la función lineal, donde el objetivo propuesto fue describir las dificultades y errores que presentan los estudiantes de décimo año en el proceso de aprendizaje de dicho tópic.

La importancia del estudio planteado radica en que, la detección de las dificultades y los errores vinculados a un contenido matemático permite conocer los factores que pueden interferir en el proceso de aprendizaje del estudiante; por lo que, se facilita la elección de tareas que permitan enfrentar las dificultades y evitar los errores (Arias y González, 2016). Además, Abrate, Pochulu y Vargas (2006) mencionan que los contenidos de cada unidad didáctica se deberían adaptar, ampliar o variar para tratar la diversidad de errores y dificultades que pueden presentar los alumnos. Por tanto deben conocerse para poder plantear materiales didácticos provechosos.

### **Marco teórico**

El Análisis Didáctico es un método de investigación propio de la Didáctica de la Matemática, cuya finalidad radica en fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación de materiales didácticos que organizan y transmiten conocimientos matemáticos, así como la puesta en práctica y la evaluación de los mismos (Rico y Fernández, 2013). Este análisis trabaja de lo complejo a partes más simples, empleando un sistema cíclico de cinco categorías: análisis conceptual, análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis

evaluativo; contemplando que las primeras dos categorías son una sola, ya que ambas proponen establecer qué conocimientos se consideran dentro del currículo (Rico y Fernández, 2013).

El análisis del cual forma parte esta investigación es el análisis cognitivo, el cual según Rico (2013) se ajusta a una concepción escrutadora o regresiva, ya que trata de organizar el para qué y hasta dónde aprender determinados conocimientos sobre un tópico. Para ello, se organiza en torno a tres organizadores; a saber: expectativas de aprendizaje, limitaciones de aprendizaje y oportunidades de aprendizaje. Esta investigación se centra en las limitaciones de aprendizaje, donde destacan las dificultades y los errores de los estudiantes, considerando que las dificultades de aprendizaje pueden ser hipotéticas o empíricas, conjeturadas o conocidas, y que los errores pueden estar ya documentados o se pueden detectar en la práctica (Lupiáñez, 2013).

De acuerdo con González y Gómez (2013) el término dificultad, en matemática, corresponde a una circunstancia que impide o entorpece la consecución de los objetivos de aprendizaje previstos. Adicionalmente, cuando se manifiesta visiblemente una dificultad se estará en presencia del error, y que este es observable directamente en las actuaciones de los escolares, en sus respuestas equivocadas a las cuestiones y en tareas concretas que les demande el profesor.

Para esta investigación se va a entender por dificultad a cualquier situación cognitiva que enfrente el estudiante, que le impida o afecte en forma negativa sus procesos de resolución de ejercicios y problemas. Además, se entiende por error aquella situación observable donde el estudiante brinde una respuesta equivocada.

Al respecto Socas (1997) menciona que durante el aprendizaje se presentan muchas dificultades que se generan a partir de múltiples factores involucrados; algunas de ellas tienen origen en el macrosistema educativo, pero en general, su procedencia se concreta en el microsistema educativo: alumno, materia, profesor e institución escolar. Así mismo, señala que las dificultades pueden abordarse desde varias perspectivas, entre ellas: el desarrollo cognitivo de los alumnos, el currículo de matemáticas y los métodos de enseñanza; además los errores muestran las debilidades que poseen los estudiantes en cuanto a aspectos como: lenguaje, términos, conceptos y procedimientos matemáticos.

Radatz (1980) mencionado por Abrate, Pochulu y Vargas (2006) brinda una categorización de los errores más comunes en matemática, entre los cuales se

encuentran:

- a) Errores derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos.
- b) Errores provenientes de la producción de representaciones icónicas inadecuadas de situaciones matemáticas. Por ejemplo, cuando un estudiante en un triángulo rectángulo logra identificar los catetos e hipotenusa, pero al rotar la figura ya no lo logra.
- c) Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos matemáticos. Estas deficiencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de fórmulas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios
- d) Errores causados por asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento. Dentro de esta clase de errores se tienen:
  - De asociación: Razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares. Por ejemplo, decir que,
 
$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$
 en asociación con el hecho de que
 
$$\sqrt{a^2 \cdot b^2} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$
  - De interferencia: Cuando los conceptos u operaciones interfieren unos con otros. Por ejemplo, la multiplicación de dos números negativos interfiere en la resolución de una resta:
 
$$-5 \cdot -3 = 8$$
 lleva a
 
$$-5 - 3 = 8$$
- e) Considerar al registro tabular como una herramienta intermedia que permite localizar puntos en un plano, a partir de una representación algebraica y no como una representación por sí misma.
- f) Transferencia de una representación a otra como traducciones, es decir, pasar de un lenguaje verbal a uno gráfico o a uno algebraico.

- g) Interpretación de una gráfica como la acción por la que se da sentido a la misma o a una parte de ella.

Abrate, et al. (2006) complementan las categorías anteriores, con: Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales, que son aquellos que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto o responde a la lógica interna del procedimiento esperado, pero el resultado final no es la solución, debido a los errores de cálculo que se presentaron en la ejecución de operaciones básicas, o acarreados por la transferencia equivocada de símbolos y números involucrados en la situación. En estas circunstancias si el alumno llevara a cabo un análisis retrospectivo advertiría la presencia del error.

Propiamente en el estudio de la funciones López y Sosa (2008), Sarmiento y Manzanilla (2011) y Córdoba, Díaz, Haye y Montenegro (2013) destacan, por parte del estudiante, la falta de capacidad para: definir de manera correcta el concepto de función, interpretar el lenguaje matemático, diferenciar entre variable e incógnita, enunciar fenómenos o situaciones que involucren una relación funcional entre variables, utilizar diferentes representaciones de funciones y analizar e interpretar el comportamiento de la gráfica de una función.

En el caso particular de la función lineal, Córdoba et al. (2013) señalan que los estudiantes presentan algunas dificultades al establecer la relación existente entre el parámetro pendiente respecto a la inclinación de la recta, la relación que existe entre la representación algebraica y el esbozo de la gráfica, y la representación de las intersecciones con los ejes de coordenadas mediante el criterio de la función.

### **Método**

Esta investigación se clasifica como descriptiva, ya que clasifica y describe los errores que comenten los estudiantes y las dificultades que tienen los mismos. Bajo la perspectiva de docentes de matemáticas y al revisar los procedimientos efectuados por estudiantes al realizar ejercicios propuestos por los investigadores.

Se aplicaron dos cuestionarios, uno a docentes de matemáticas y otro a estudiantes de décimo año de la educación secundaria costarricense, con el fin de determinar los errores y dificultades de estos últimos al realizar tareas relacionadas con la función lineal. Se utilizó esta herramienta de recolección de datos debido a que el cuestionario es una técnica ampliamente utilizada para obtener información, pues incluye las mismas preguntas para todos los sujetos, se puede asegurar el anonimato y proporciona tiempo para que los sujetos piensen las respuestas (McMillan y Schumacher, 2005).

El primero de los cuestionarios tenía por objetivo conocer las dificultades y errores que han identificado docentes de matemática de la educación secundaria costarricense al momento de enseñar los tópicos de función lineal. El cuestionario constaba de dos partes, en la primera parte se presentaban ítems con cada una de las habilidades propuestas por el MEP (2012) en el Programa de Estudios de Matemática para función lineal y una serie de conocimientos matemáticos que se requieren para la consecución de cada habilidad. A cada uno de los conocimientos matemáticos requeridos los docentes asignaban un valor numérico de uno a cinco, donde cada número representa la frecuencia con que sus estudiantes aplicaban correctamente dicho conocimiento, siendo 1: Nunca, 2: Casi nunca, 3: Algunas veces, 4: Casi siempre y 5: Siempre. Por otro lado, la segunda parte poseía dos preguntas abiertas mediante las cuales se les solicitaban a los docentes anotar los errores y dificultades más importantes que han detectado al momento de enseñar los tópicos en cuestión.

Después de la aplicación del cuestionario a los docentes, se realizó una sumatoria de los ítems propuestos en dicho instrumento. Aquellos ítems que obtuvieron un porcentaje mayor al 50% en las categorías de nunca o casi nunca, se consideraron como una dificultad que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la función lineal.

Los docentes a los cuales se les aplicó este cuestionario son profesores de matemática de educación secundaria y tienen al menos dos años de experiencia impartiendo décimo año. De los cuales al menos uno debe haber sido apegado al Programa de Estudios de Matemática aprobado en 2012 y vigente hasta este momento. Esto debido a que en dicho año escolar se desarrollan los tópicos en estudio. Los docentes fueron elegidos por

conveniencia, ya que se tomó en cuenta que laboran en instituciones de las regiones educativas de Heredia y San José Central. Debido a que estas zonas son las que recibieron una mayor cantidad de capacitaciones relacionadas con el Programa de Estudios de Matemática del MEP vigente; además, porque eran las zonas de mayor accesibilidad a los investigadores. Adicionalmente, como no se quiere inferir resultados a la población, se trabajó con una muestra no probabilística de 30 profesores, ya que se consideró que era un número adecuado de participantes para aportar información general sobre las dificultades y errores que tienen los estudiantes costarricenses de la educación secundaria al estudiar la función lineal.

Por otro lado, el cuestionario aplicado a los estudiantes constaba de ejercicios y problemas, que aparecen usualmente en los libros de texto de décimo año, relacionados con la función lineal. Fue aplicado a setenta y seis estudiantes de décimo año de una misma institución de educación secundaria, en la que ya habían abordado el tópico de funciones en general, función lineal y función cuadrática. Dichos cuestionarios fueron revisados por los investigadores uno a uno, y se fueron anotando, contabilizando y posteriormente clasificando cada uno de los errores encontrados.

## Resultado

En la siguiente tabla se presenta una clasificación de los errores detectados por medio de los cuestionarios aplicados (docentes, estudiantes); además se categorizan de acuerdo con lo expuesto por Abrate et al. (2006) en el marco teórico.

Tabla 1. Errores presentes en el aprendizaje de la función lineal

Categorización de los errores	Errores detectados en los cuestionarios aplicados a los estudiantes y docentes en relación con la función $f(x) = mx + b$
Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales	<ol style="list-style-type: none"> <li>Al utilizar la fórmula para el cálculo del valor numérico de la pendiente, omite el signo negativo cuando alguna de las coordenadas de un par ordenado es un número negativo.</li> </ol>

<p>Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>2. Mal empleo de la ley de signos en la realización de operaciones básicas en el conjunto de los números reales.</li> <li>3. Error al efectuar operaciones básicas en el conjunto de los números reales (sumas y multiplicaciones erradas)</li> <li>4. Error al aplicar algoritmos relacionados con la resolución de ecuaciones lineales.</li> </ol>
<p>Errores debidos a asociaciones incorrectas</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>5. Dado el criterio de asociación de una función lineal de la forma <math>f(x) = \frac{mx+b}{a}</math>, asocia el valor numérico de la pendiente a <math>m</math> y no a <math>\frac{m}{a}</math>.</li> <li>6. Dado criterio de asociación de una función lineal de la forma <math>f(x) = \frac{mx+b}{a}</math>, asocia la intersección con el eje de las ordenadas a <math>b</math> y no <math>\frac{b}{a}</math>.</li> </ol>
<p>Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos para la realización de una tarea matemática</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>7. Conceptuales, no distingue entre los términos abscisas y ordenadas.</li> <li>8. Aplica incorrectamente la fórmula de la pendiente a hacer <math>m = \frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}</math> o <math>m = \frac{y_2-x_2}{y_1-x_1}</math>.</li> <li>9. Ubicación incorrecta de pares ordenados en el plano cartesiano al trazar la representación gráfica de la función.</li> <li>10. Dada una gráfica, determina de forma incorrecta pares ordenados presentes en la misma.</li> </ol>



Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos para la realización de una tarea matemática

11. Al dar expresiones de la forma  $f(a) = b$  no distingue cuál par ordenado pertenece al gráfico funcional de  $f$  si  $(a, b)$  o  $(b, a)$ .
12. No relaciona el signo de  $m$  (positivo, negativo, cero) con la monotonía de la función.
13. No relaciona el signo de  $b$  (positivo, negativo, cero) con la intersección con el eje  $y$  de la representación gráfica.
14. Error al homogenizar fracciones en la resolución de ecuaciones lineales.
15. Dado un problema definido en forma verbal, determina una expresión algebraica que modele el mismo, pero extrae conclusiones erróneas con base en él.
16. Dada la representación algebraica de una función lineal traza una parábola como su representación gráfica. Error al expresar en forma gráfica una situación problema dada al no tomar en cuenta si el dominio de la misma es discreto o continuo.

Fuente: Elaboración propia

Por otra parte, en cuanto a las dificultades que presentan los estudiantes al resolver tareas relacionadas con la función lineal, se presenta la información dada por los docentes, por medio del cuestionario. Se consideraron como dificultad, para efectos de esta investigación, aquellas cuyo puntaje promedio fue menor a noventa, dado que el puntaje asignado por los docentes cuando un estudiante realiza “algunas veces” una determinada actividad es de tres puntos, al ser treinta cuestionarios, si todos seleccionaran la categoría algunas veces, el puntaje total sería noventa. Por lo que, si el puntaje es menor a noventa es porque la mayoría de los profesores asignó puntajes menores a tres, lo que

quiere decir que indicaban que sus estudiantes “nunca” o “casi nunca”

Dificultades detectadas por los profesores	Puntaje obtenido
Identifica la pendiente, en el criterio de la función, sin importar el orden de las variables	89
Traza la representación gráfica a partir del criterio de una función	89
Tiene un manejo adecuado de operaciones algebraicas y aritméticas al resolver ecuaciones lineales	88
Obtiene el valor numérico de la pendiente a partir de la representación gráfica	87
Traza una representación gráfica adecuada a partir de puntos dados	87
Obtiene a partir de la representación gráfica la ecuación de la recta	85
Comprende el concepto de pendiente	83
Puede a partir de un problema construir una gráfica que represente la situación mostrada	82
Identifica situaciones reales que siguen un modelo lineal	81
Dada la función lineal que modela un problema en un contexto real es capaz de extraer conclusiones a partir de ella	80
Plantea funciones lineales para modelar problemas en contextos reales	78
Redacta problemas que involucren funciones lineales	69

realizaban dicha acción.

Tabla 2. Dificultades presentes en el aprendizaje de la función lineal

Fuente: Elaboración propia

## Reflexiones

Este estudio evidencia la variedad de dificultades y errores que pueden

presentarse en el proceso de aprendizaje de la función lineal. La cual corresponde a una de las funciones elementales que se abordan en la educación preuniversitaria. Por lo anterior esta investigación brinda, a la comunidad de docentes de matemáticas, elementos que deben considerarse al momento de planificar la enseñanza de este tópico y la elaboración de los materiales a utilizar.

Se determina que algunos de los errores cometidos por los estudiantes responden a la falta de dominio de aspectos conceptuales, como lo es la diferenciación entre los términos abscisas y ordenadas. Además, que hay errores que no pertenecen directamente a contenidos relacionados con la función lineal, pero que forman parte de lo requerido en dicho tópico de acuerdo al Programa de Estudios de Matemática del MEP. Ejemplos de esta situación son el cálculo incorrecto de operaciones básicas en el conjunto de los números reales, principalmente, en la aplicación de las leyes de signos y en la jerarquización de las operaciones; la resolución de ecuaciones lineales, y la ubicación de pares ordenados en el plano cartesiano. Siendo este último alarmante, dado que es un tema que usualmente se estudia en los primeros años escolares. En el caso particular de Costa Rica, este tema se aborda desde tercer grado de la educación primaria hasta noveno año de la educación secundaria. En primera instancia se trabaja desde la noción de posición y localización de personas u objetos a partir de un punto de referencia. Posteriormente, en séptimo año, se trabaja directamente la habilidad de ubicación de puntos en el plano cartesiano; en octavo año, la ubicación de pares ordenados en el plano cartesiano se utiliza cuando se aborda el tema de homotecias, y, en noveno año, con la aplicación de la fórmula de la distancia entre puntos.

Por otro lado, entre los errores más comunes destacó el hecho de que los estudiantes no saben interpretar de qué manera influye el valor de los parámetros y en la representación gráfica de la función lineal. Es decir, no determinan la monotonía ni la intersección con el eje de las ordenadas a partir de la representación algebraica. De igual manera, no saben determinar el valor numérico de la pendiente y de la intersección con el eje de las ordenadas en funciones de la forma  $y = mx + b$ , en este caso se observó que omiten el denominador de la fracción.

Asimismo, se encontró que cuando a los estudiantes se les propone un problema definido en forma verbal, estos logran determinar la expresión algebraica que modela la situación descrita; sin embargo, extraen conclusiones erróneas a partir de él. Esto revela que los estudiantes no interiorizaron lo que

representa la función lineal en sí, sino que solo memorizan el cómo determinar la representación algebraica usando la fórmula para el cálculo de la pendiente. Los docentes señalaron que la mayoría de las dificultades corresponden a acciones que requieren de análisis que van más allá de aplicar algoritmos, principalmente en actividades como la identificación de modelos lineales, la interpretación del concepto de pendiente, y el planteamiento y resolución de problemas, por lo que se intuye que existe un problema relacionado con el razonamiento lógico matemático de los estudiantes.

Es importante destacar que las dificultades mencionadas requieren, de parte de los estudiantes, un dominio completo del tópico en estudio. Además, las actividades de análisis usualmente no se trabajan en las clases de matemática, con lo que concuerdan Espinoza, Espinoza, González, Ramírez y Zumbado (2008). Estos autores mencionan que las clases de matemática se han caracterizado, en general, por el uso de estrategias metodológicas de corte magistral o tradicional, donde la clase inicia con el docente explicando los contenidos a enseñar, luego resuelve algunos ejercicios y por último propone una lista de ejemplos similares para que sean resueltos por los estudiantes. Por lo que, para intentar superar las dificultades se requiere proponer actividades que evoquen más análisis por parte de los estudiantes y los lleve a salir de la simple aplicación de algoritmos. Sin embargo, se debe tener claro que podría no bastar el proponer dicho tipo de actividades para superar todas las limitaciones de aprendizaje, ya que hay dificultades y errores asociados a obstáculos epistemológicos que no fueron abordados en esta investigación.

A manera de cierre, se recomienda a los docentes encargados de la enseñanza de este tópico, tomar en cuenta el planteamiento de problemas y ejercicios que contengan ítems que requieran de situaciones que fueron encontradas como errores y dificultades en este escrito. Por ejemplo, se sugiere el planteamiento de ítems que requieran el paso de una representación matemática a otra. En la propuesta de problemas es recomendable no solo solicitar la representación algebraica, sino la representación gráfica. Esto expondrá al estudiante a la ubicación de pares ordenados en el plano cartesiano y a la resolución de ecuaciones lineales para determinar la intersección con los ejes coordenados. Otra opción es solicitar, en términos de un problema dado, la interpretación del concepto de pendiente. Esto brindará una riqueza mayor de un tema de matemática que usualmente los docentes asumen que es sencillo de aprender.

### Referencias

Abbate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y Dificultades en*

*Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo.* Buenos Aires, Argentina: Universidad Nacional de Villa María. Recuperado de <http://unvm.galeon.com/Libro1.pdf>

- Arias, I. y González, Y. (2016). *Análisis didáctico del concepto de homotecia para su enseñanza y aprendizaje en octavo año de la Educación General Básica en Costa Rica.* (Tesis de licenciatura). Universidad Nacional de Costa Rica, Costa Rica. Recuperado de <http://www.matematica.una.ac.cr/index.php/80-informacion-general/102-trabajos-finales-graduacion>
- Córdoba, L., Díaz, M., Haye, E. y Montenegro, F. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. En Y, Morales y A, Ramírez (Eds.) / *CEMACYC Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe.* (pp. 1-13). Santo Domingo, República Dominicana: CEMACYC. Recuperado de <http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/373-401-2-DR-C.pdf>
- Espinoza, J., Espinoza, J., González, M., Zumbado, M. y Ramírez, C. (2008) *La resolución de problemas en la Enseñanza de las matemáticas: una experiencia con la función exponencial, polígona y estadística.* (Tesis de licenciatura). Universidad Nacional de Costa Rica, Costa Rica. Recuperado de <http://www.matematica.una.ac.cr/index.php/80-informacion-general/102-trabajos-finales-graduacion>
- González, M., y Gómez, P. (2013). *Módulo 3 Análisis Cognitivo.* Recuperado de <https://core.ac.uk/download/files/475/12342212.pdf>
- López, J. y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. En P, Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21* (pp. 308-318). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/4946/1/L%C3%B3pezDificultadesALME2008.pdf>
- Lupiañez, J.L. (2013). Análisis Didáctico: La planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico, J.L. Lupiañez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: Metodología en investigación, formación de profesores e invención curricular* (pp. 81-101). Granada, España: Editorial Comares, S.L.

McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa*. Madrid, España: Editorial Pearson, Addison Wesley.

Ministerio de Educación Pública (2012). *Programas de Estudios en Matemáticas para la Educación general Básica y el Ciclo Diversificado*. San José, Costa Rica: autor.

Rico, L (2013). El método del Análisis Didáctico. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 1(33), 11-27. Recuperado de <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2013/33/ARCHIVO6.pdf>

Rico, L. y Fernández, A. (2013). Análisis Didáctico y Metodología de Investigación. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: Metodología en investigación, formación de profesores e invención curricular* (pp. 1-22). Granada, España: Editorial Comares, S.L.

Sarmiento, M. y Manzanilla, J. (2011). Unidad didáctica para enseñar y aprender funciones matemáticas con Maple. *Revista de Evaluación e investigación*, 6 (1), 121-134. Recuperado de <http://www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/35335/1/articulo8.pdf>

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Horsori, Barcelona. Recuperado de [http://face.uasnet.mx/zona/mochis/recursos\\_web/alumnos/semestre2/procesoAprendizajeMatematicas/tema2%20obstaculos%20en%20la%20ense%20anza%20\(1%20a%20la%2018\).pdf](http://face.uasnet.mx/zona/mochis/recursos_web/alumnos/semestre2/procesoAprendizajeMatematicas/tema2%20obstaculos%20en%20la%20ense%20anza%20(1%20a%20la%2018).pdf)