

¿RAZONES Y NÚMEROS: ¿COMPLEMENTARIEDAD O COMPETENCIA?

RATIO AND NUMBER: COMPLEMENTARITY OR COMPETITION?

Gilberto Obando Zapata
Universidad de Antioquia (Colombia)
gilberto.obando@udea.edu.co

Resumen

Actualmente, el concepto de número real ha desplazado al concepto de razón como tema de preocupación de las comunidades científicas, pero en el campo educativo sigue siendo tema central, sobre todo, por su utilidad en las actividades de la vida cotidiana. ¿Cómo se han dado esos movimientos entre número y razón? ¿Cómo se constituyen primacías de lo uno hacia lo otro en determinadas épocas y lugares? No hay una respuesta única, pero en este artículo se presentan hipótesis sobre posibles respuestas. Así, a partir de un análisis de las prácticas matemáticas en diferentes épocas y lugares se identifican formas de actividad matemática relacionadas con el concepto de número y el concepto de razón. En algunas de ellas se identifica la existencia de una teoría de razones y proporciones sin que sea claro el estatus de las razones como números. En otras, es claro el lugar de la razón como número, pero sin una referencia explícita a una teoría de razones y proporciones. De esta manera el estudio realizado permite una aproximación a los conceptos de número y de razón que puede ser útil para orientar los procesos, de enseñanza de estos en contextos escolares.

Palabras clave: razón, proporción, proporcionalidad, números racionales

Abstract

Currently, the concept of real number has displaced the concept of ratio as a matter of concern for scientific communities, but in the field of education, it remains a central issue, above all, for its usefulness in the activities of daily life. How have those movements occurred between number and ratio? How are primacies constituted from one to the other in certain times and places? There is no single answer, but in this paper present hypotheses about possible answers. Thus, from an analysis of mathematical practices in different times and places identified forms of mathematical activity related to the concept of number and the concept of ratio. In some of them exists a theory of ratios and proportions without the status of the ratio being clear as numbers. In others, the place of ratio as a number is clear, but there is not explicit reference to a theory of ratios and proportions. In this way, the study allows an approximation to the concepts of number and ratio that can be useful to guide the process of teaching them in school contexts.

Key words: ratio, proportion, proportionality, rational numbers

■ Introducción

Nociones relativas a las razones (y por qué no, de proporción y proporcionalidad) se pueden identificar desde la antigüedad en relación con ciertos tipos de problemas y las técnicas para resolverlos. En todos estos casos, y quizás sin un nombre para referirla explícitamente, esa idea de razón responde a una pregunta crucial; ¿cuánto es una cantidad comparada con otra (en principio, de la misma naturaleza) tomada como referencia? (Obando, 2015). La herencia griega nos enseñó a llamar razones (que no números) a esas entidades con las cuáles responder dichos tipos de problema (Théon (de Smyrne), 1892); pero no fue ese el caso en otras culturas, en donde las fracciones de unidad fueron la respuesta (Caveing, 1992; Chemla, 1992), y estas eran reconocidas como números (que no necesariamente la idea moderna de número de la cultura occidental). Para occidente, tener las razones como números implicó una profunda reorganización del sistema de prácticas matemáticas asociadas a la cantidad, al número (ver, por ejemplo, Stevin, 1634).

Así entonces, en este artículo se analizarán algunos momentos de la historia de las matemáticas, buscando la configuración epistémica del sistema de prácticas en el cual se sitúan. Se indagará por los tipos de problemas que resolvían, las formas de representación utilizadas, los procedimientos y técnicas presentes, al igual que los objetos de conocimiento objetivos como emergentes de ciertas prácticas históricamente situadas. De esta manera, el resultado es en relación con las posibles configuraciones de la actividad matemática: la relación número y magnitud a través de la noción de razón entre cantidades de magnitud; el valor epistémico de las razones en la constitución de la noción de número.

■ Marco teórico

La actividad matemática de los individuos en diferentes épocas y lugares tiene una estructura (forma de organización lógica) que se fija en los patrones de la actividad (prácticas matemáticas específicas) que despliegan los individuos en un marco institucional determinado, y, en consecuencia, el análisis histórico y epistemológico busca las formas de ser de esos objetos de conocimiento en el marco de sistemas de actividad específico. Como lo plantean Jankvist y Kjeldsen, se trata de

Tomar la práctica de los matemáticos como punto de partida para la historia de las matemáticas, con el fin de comprender cómo las matemáticas han sido practicadas y comprendidas, cómo el conocimiento matemático ha sido producido a través del tiempo en diferentes lugares, en diferentes culturas y en diferentes contextos intelectuales, así como tales comprensiones y producciones han cambiado, localiza la historia de las matemáticas en un lugar y en un medio intelectual. Una aproximación tal involucra estudiar episodios concretos de la historia de las matemáticas para obtener luces en asuntos tales como: por qué los matemáticos se preguntaron las cuestiones que trataron, porque ellos tratan los problemas de la manera como lo hicieron, qué tipo de pruebas o argumentos daban, y cómo éstos fueron percibidas o recibidas dentro de la comunidad matemática de momento, por qué ellos introdujeron ciertos objetos matemáticos, definiciones y áreas de investigación etc.; y cómo todo lo anterior influencia desarrollos futuros en las matemáticas así como cambios en las percepciones sobre las matemáticas. (Jankvist & Kjeldsen, 2010, p. 836)

Así, en línea con los planteamientos de Ferreirós (2010), Kitcher (1984) y Obando. (2015), las prácticas matemáticas caracterizan la actividad de las personas de una época y lugar en función de la manera como interrelacionan diversidad de lenguajes (lenguaje natural, expresiones técnicas, medios simbólicos, etc.), de formas de enunciar (proposiciones, teoremas, afirmaciones, etc.), de métodos y formas de razonamiento, y de problemas por resolver. Estos elementos en su conjunto, en las personas y en las comunidades, toman forma en, a la vez que moldean, la acción matemática específica de las personas. Esta noción de práctica matemática está en la dirección de Jankvist

and Kjeldsen (2010) o Epple (2004) sobre la noción de configuración epistémica, la cual refieren al conjunto de recursos intelectuales disponibles en un episodio histórico específico, y que determinan el curso de la actividad matemática de un matemático o grupo de matemáticos en esa época y lugar.

En este sentido, el análisis histórico no busca un desarrollo cronológico o internalista de los objetos de conocimiento, sino estudiar los sistemas de actividad, es decir, identificar los tipos de problemas que se resolvían, los instrumentos y las técnicas para resolver tales problemas, y los objetos y conceptos constituidos en tales sistemas de prácticas. Siguiendo a Mosvold, Jakobsen, and Jankvist (2013), se buscan desde la historia de las matemáticas, lecciones pedagógicas que permitan: (1) orientar los procesos de estudio de los estudiantes, (2) mejorar la comprensión de los objetos de conocimiento que se pretende enseñar, y (3) tener mejores elementos en la comprensión de lo que hacen los estudiantes. Con esto no se espera que haya un paralelismo entre el desarrollo histórico y el proceso de aprendizaje de estudiante, sino que por el contrario “lograr una manera productiva de aprender a escuchar a los estudiantes” (Clark, 2012, p. 70), o como dice Vasco (1995), se espera a identificar sobre la base de los acontecimientos del ayer, fuentes heurísticas para planificar los eventos de aprendizaje de las escuelas del mañana.

■ Metodología: estudiar históricamente las prácticas matemáticas

Cómo se expresó antes, el objeto central de este artículo es ver, en diferentes momentos del desarrollo histórico de las matemáticas, *los tipos de problemas* que se enfrentaron y, a través de las soluciones encontradas, las *formas de representación* y las *técnicas instrumentadas* relacionadas con esas formas de representación. Así entonces, a partir de un estudio documental se intenta comprender la manera como razones, proporciones y proporcionalidad han vivido en el seno de diferentes culturas, en épocas y lugares diversos y cómo es que dichos objetos de conocimiento matemático fueron usados, comprendidos, organizados en unos sistemas de prácticas locales. Igualmente se analiza cómo a pesar de estas diferencias conservaron ciertos elementos estructurales que hacen posible su puesta en diálogo, su comunicación de un sistema a otro, su transformación, su síntesis en nuevos sistemas más globales y, a la vez, más potentes.

Épocas y lugares estudiados

Se identificaron autores u obras paradigmáticas o representativas de la cultura matemática de épocas y lugares específicos (por ejemplo, la obra de Euclides o Arquímedes, para la cultura griega) o autores especializados que hubieran realizado estudios detallados de las matemáticas de un periodo específico en alguna de estas culturas (por ejemplo, Robson (2007) o Rashed and Vahabzadeh (1999) para la matemática en la cultura islámica de la edad media). La consulta a los autores especializados permitió identificar potenciales autores y obras paradigmáticas de épocas y lugares.

Las fuentes documentales

Las fuentes documentales se pueden clasificar como primarias o secundarias. Entendemos por fuentes documentales primarias aquellas que se corresponden con obras publicadas por autores de la época y lugar en estudio, y secundarias a las que se corresponden o que son traducciones modernas (al inglés o español) de dichas obras clásicas, o que son compilaciones analíticas realizadas por autores modernos sobre las matemáticas de una época y lugar determinado.

Las fuentes primarias

Las fuentes primarias fueron recuperadas a través de proyectos de virtualización de obras con valor histórico, entre los que se pueden citar, DML: Digital Mathematics Library, The Cornell University Historical Mathematics

Monographs, Gallica, Biblioteca nacional de Francia, Internet Archive, The University of Michigan Historical Mathematics Collection, Google Books.

Las fuentes secundarias

Las fuentes secundarias fueron de dos tipos: traducciones al inglés, francés o español de textos clásicos publicados en idiomas diferentes; artículos publicados en revistas especializadas en historia de las matemáticas; o libros publicados por autores especializados en ciertos momentos de una determinada cultura.

Algunos de los documentos consultados fueron traducciones (al inglés o al francés) de textos escritos originalmente en otros idiomas como el griego, el latín, el árabe, entre otros (no conocidos por el autor de la tesis). En algunos casos, los textos originales (en latín y árabe) que sirvieron de base para tales traducciones (al inglés y el francés) fueron a su vez traducciones de textos en otros idiomas (algunos ya perdidos). Esto se puede catalogar como una dificultad en el acceso a las fuentes, pero, donde fue posible, esta dificultad se compensó con la consulta de versiones del mismo texto traducidas por diferentes autores o en diferentes idiomas, o consultando textos de diferentes autores de la misma época y lugar. De esta manera se logró tener un sentido más completo del sistema de prácticas matemáticas que se cristalizan a través de dichas obras.

El tratamiento de las fuentes

A través de las diferentes fuentes documentales se analizaron los tipos de situaciones en las que el objeto razón era aquello hacia donde se orientaba la actividad, o era instrumento para la actividad misma. Se indagó por las formas de mediación instrumental que permitían poner este objeto en el centro de la actividad, y por las formas de objetividad logradas en el marco de dichos sistemas de actividad.

Por supuesto, dependiendo de la época y lugar, la palabra razón no está, o ni siquiera existe; por lo tanto, lo que se buscaba no eran las palabras, sino si en esas diferentes épocas y lugares se configuraban unos sistemas de práctica en los que se pudieran identificar unas acciones mediadas por unos objetos cuya función fuera identificable con las formas de acción mediada de aquellas culturas en las que sí estaban presentes estas palabras para nombrar tales objetos de mediación. Se analizó entonces la estructura de la actividad mediada por tales objetos, y se demarcaron trazas comunes a dichas formas de actividad. Así entonces, se identificaron ideas relacionadas con la cantidad, su representación, la operación con las cantidades a través de dichas formas de representación, y la relación de todo lo anterior con los problemas que se debían resolver; estos fueron principios claves para encontrar esas caracterizaciones de las prácticas matemáticas relativas a las razones.

■ Resultados

Por tomar un punto de partida, se puede referir la idea griega de razón. Si bien es claro que en los griegos la razón no es un número (pues solo eran números los naturales), sí se puede afirmar que éstas gozaban de un estatus de cantidad, aunque diferente al de los números y de las magnitudes. Las definiciones y proposiciones sobre las razones que aparecen en el libro *Data* de Euclides (1806), al igual que el tratamiento dado a las razones y a las proporciones en los libros V y VII de los *Elementos* (en donde se muestra que las razones son susceptibles de comparación por igualdad y por diferencia), hacen evidente que ellas cumplen con las dos características esenciales para que algo pueda ser cantidad: se deben poder igualar, y debe ser posible establecer la diferencia entre ellas. Sin embargo, no se tiene evidencia de un texto matemático griego en el que se manifieste de manera explícita el carácter de cantidad de la razón.

La declaración explícita de las razones como cantidades se evidencia en los textos de los matemáticos árabes de finales del primer milenio de la era cristiana. Esa declaración de la razón como cantidad, vino de la mano

de una lectura crítica de los textos matemáticos griegos por parte de los matemáticos árabes y, por ende, de una reconceptualización de nociones claves de los *Elementos*, como la definición de proporcionalidad, en particular, la definición dada en el libro V. Es así que Rashed y Vahabzadeh (1999), en la traducción que presentan de algunos textos del matemático persa Al-Khayyam, mencionan varios trabajos en los que se critica la definición 5 del libro V de los *Elementos*, pues se considera que la noción de equimúltiplo sobre la que se basa no es de fácil aplicación, y que, además, la separación dada en los libros V y VII profundiza la confusión, pues la definición de proporción en el libro VII es de más fácil uso.

En particular, Al-Khayyam, al comienzo del libro segundo (este libro segundo lleva por título *Exposición sobre las razones y la noción de proporcionalidad y sobre su verdadera naturaleza*), dice: el autor de los *Elementos* ha dicho, a propósito de la verdadera naturaleza de la razón: “*es la esencia de la medida de dos magnitudes homogéneas, la una relativamente a la otra.*” (Rashed & Vahabzadeh, 1999, p. 340), aclarando luego que dichas magnitudes deben cumplir la propiedad arquimediana (este autor considera, siguiendo la tradición Aristotélica, cuatro géneros de cantidad: la línea (longitud), la superficie, el sólido (volumen), y el tiempo – considerado como la medida del movimiento de los cuerpos). Para él, la medida relativa de una magnitud a otra remite a establecer de manera exhaustiva cuánto es una con relación a la otra, “bien sea determinando qué fracción es, o bien sea de alguna otra manera” (La expresión “de alguna otra manera” refiere a las magnitudes no conmensurables, para las cuales su medida no se puede expresar con una fracción (razón entre un par de números naturales). Luego argumenta que la razón comporta dos aspectos: poner en relación dos magnitudes comparadas a través de su diferencia (diferencia pensada en términos de cociente), y que ella en sí misma posee la característica de cantidad: dos razones pueden ser comparadas en la igualdad y en la diferencia (desde Euclides, estas dos propiedades expresan la esencia de una cantidad).

Posteriormente analiza las implicaciones de considerar estos dos principios sobre las razones, cuando se consideran entre números o entre magnitudes. Así entonces, partiendo del hecho de que establecer la razón entre dos números es medir el uno con respecto al otro, concluye entonces que la razón determina el valor de la medida relativa entre los dos números, y que, para hallar dicha medida se divide el uno por el otro, cuando la misma es exacta. Para el caso en que el número menor no mide de forma exacta al mayor, (el mayor no es múltiplo del menor), la división del mayor por el menor, en virtud de la indivisibilidad de la unidad, siempre termina en uno (la unidad es la medida de todos los números). Es más, el autor, apoyado en las proposiciones 1 y 2 del libro VII muestra que dados dos números donde el menor no mide al mayor, la aplicación sucesiva del algoritmo de Euclides permite determinar la medida relativa de un número con respecto al otro.

Cuando este principio del algoritmo euclideo se utiliza para determinar la medida relativa entre dos magnitudes (continuas), entonces Al-Khayyam muestra que la dificultad radica en que, para el caso de las magnitudes, no todas las sustracciones sucesivas de los residuos (la división euclidea) terminan en un número finito de pasos, en tanto que las divisiones sucesivas para el caso de las magnitudes continuas no tienen como límite la unidad. Sin embargo, dice, esto no imposibilita afirmar que la verdadera naturaleza de la razón esté en la medida relativa entre magnitudes, y que la división euclidiana sea el principio a partir del cual determinar el tamaño, la cantidad de la razón que relaciona las dos cantidades para las cuales se establece la razón.

De esta manera, el estudio de las razones entre magnitudes se separa en dos: el caso en que son conmensurables, y el caso en que no lo son.

Si lo primero, Alkhayyam dice (expresado en términos modernos) dadas cuatro magnitudes A, B, C y D, donde A es el mismo múltiplo de B que C es de D, o A es la misma fracción de B, que lo es C de D, entonces la razón de A a B es inevitablemente la misma que la de C a D. En este caso extiende la definición de proporcionalidad entre números del libro VII de los *Elementos* de Euclides, al caso de magnitudes conmensurables.

Si lo segundo, dadas cuatro cantidades A, B, C y D, donde el mismo múltiplo m_0 de veces que se puede sustraer B de A, sobrando un residuo r_0 , es el múltiplo de veces que se sustrae D de C, sobrando un residuo s_0 ; y si el mismo

múltiplo m_1 de veces que se puede sustraer r_0 de B, sobrando un residuo r_1 , es el múltiplo de veces que se sustrae s_0 de D, sobrando un residuo s_1 ; y si el mismo múltiplo m_1 de veces que se puede sustraer r_1 de r_0 , sobrando un residuo r_2 , es el múltiplo de veces que se sustrae s_1 de s_0 , sobrando un residuo s_2 ; y así sucesivamente, encontrando que la serie infinita de números m_0, m_1, m_2, \dots , es la misma número a número para ambas razones, entonces la razón de A a B es inevitablemente igual a la razón de C a D.

Esta nueva forma de establecer la proporcionalidad entre dos parejas de magnitudes no conmensurables entre sí tiene gran importancia: en primer lugar, se identifica un mecanismo único y universal para encontrar la cantidad de una razón que relaciona dos magnitudes, a saber, la división de una por la otra. En segundo lugar, el uso de una técnica que siglos más tarde será llamada la representación en fracciones continuas para aproximar razones entre magnitudes no conmensurables. En tercer lugar, la objetivación de la razón a través de la secuencia de números obtenida a partir de las divisiones sucesivas. Pero en este momento, la razón, si bien objetivada en una representación (la secuencia de residuos), aun no es número.

Este procedimiento para calcular y comparar razones fue ampliamente utilizado en la Edad Media dando importantes avances en la representación simbólica de los números y las razones y, por ende, en las técnicas para operar con estas nuevas cantidades. Por ejemplo: Bombelli introduce de manera sistemática el uso de las fracciones continuas (llamadas así más tarde por Wallis) para expresar cantidades racionales e irracionales (las fracciones continuas, conservan la esencia del método de divisiones sucesivas de Alhaway, pero convergen más rápidamente en el sistema de numeración decimal). Oresme desarrolla un estudio sistemático de las proporciones continuas mostrando nuevas técnicas de representación que facilitaron los cálculos con las potencias y las raíces (Oresme & Grant, 1965); Napier introduce los logaritmos proporcionando nuevas técnicas de cálculos entre cantidades que cambian proporcionalmente con respecto al tiempo.

Hechos como estos fueron determinantes en el desarrollo de nuevas formas de representación para las cantidades y los números, nuevas técnicas para calcular con estas cantidades y, por ende, nuevas formas para resolver los problemas, y por qué no, nuevos problemas que permiten la constitución de un escenario en el que números y razones cambian rápidamente, conceptualmente hablando.

Estos cambios se evidencian, por ejemplo, en el trabajo de Vieta, en donde a partir de un programa unificador que le permitiera aplicar el análisis no solo a lo geométrico (en el sentido de Pappus), sino también a lo aritmético (en el sentido de Diofanto), desarrolla una conceptualización sobre el análisis y la síntesis que aplica por igual a ambas ramas del conocimiento, basado, por supuesto, en una teoría de proporciones que aplica entonces tanto a números como a magnitudes, con lo que efectivamente asume el álgebra no solo como una teoría sobre las ecuaciones, sino como una teoría general de las proporciones (Klein, 1992). Es así entonces que para Vieta una proporción puede decirse es la constitución de una ecuación, y la ecuación, la manera de resolver una proporción (Vieta, 1630, 1630/1983). Igualmente afirma (finalizando el capítulo 1) que este obtener las proporciones y las ecuaciones se apoya en los principios generales de la lógica, del silogismo, en las nociones comunes, en los axiomas y teoremas ya conocidos (refiriéndose a los elementos de Euclides), como se evidencia en el capítulo II donde enuncia los principios generales, tomados de los elementos, sobre los cuales se fundamentan los símbolos para las ecuaciones y las proporciones

Pero, así como el álgebra se constituye en una teoría general de las proporciones, aplicables tanto al número como a las magnitudes, los símbolos usados por Vieta para representar las magnitudes o los números comportan igualmente una noción de cantidad generalizada. Así entonces, la incógnita se hace la representación generalizada de la cantidad o de la magnitud, se opera con ella como si fuera un número, y por qué no, se constituye una nueva forma de cálculo (Klein, 1992). En palabras de Vieta, una “logística especiosa” (cálculo con lo simbólico), en la cual los símbolos usados representan la forma de la cosa, y no la cosa en sí misma, es

decir son signos con estructura espacial usados para representar la naturaleza de las magnitudes, y en el mismo sentido, las ecuaciones son construcciones que representan las relaciones (las proporciones) entre las magnitudes involucradas en la situación, y estos signos se hacen cosas, como objetos del pensamiento, con las que se puede operar. Es en este sentido que Klein afirma que en Vieta está el nacimiento del concepto moderno de número, no medido tanto por su nivel de abstracción, sino por su capacidad para el cálculo simbólico, y eso es lo que se encuentra en el conjunto de reglas establecidas para el cálculo especioso, las cuales, a la manera de un sistema axiomático, crean un contexto dentro del cual se define el objeto mismo con el que se tratará, a saber, la incógnita como número generalizado.

Esta formulación de la razón como número se hace explícita en otros matemáticos de los siglos XVII y XVIII. Por ejemplo, Newton, en su texto *Aritmethica Universalis* (Newton, 1720, 1972), define número de la siguiente manera: “por número comprendemos, no tanto una multitud de unidades, como la *razón* abstraída de cualquier cantidad a otra cantidad del mismo tipo, la cual tomamos como unidad” (Newton, 1720, p. 2). En esta definición de número hay profundas raíces de la herencia cartesiana, pero a diferencia de este, se hace explícito el carácter de número presente en las razones. En la misma página, Newton afirma la existencia de tres tipos de números: *enteros* (*whole*), los que son un múltiplo entero de veces la unidad; *fracciones*, los que son una parte submúltiple (*submultiple part*) de la unidad de medida, y *absurdos* (*surds*), los que no son conmensurables con la unidad. Nótese entonces la relación explícita entre los números, las razones, la medida y, por ende, las cantidades en general, y las magnitudes en particular. Adicionalmente es interesante mencionar que al explicar el valor posicional de las cifras utilizadas para la notación de los números (explícitamente afirma, en una nota al pie de página, que la notación nos enseña a expresar en caracteres (símbolos) cualquier número expresado en palabras, y la inversa, como enunciar cualquier número propuesto en caracteres), las fracciones de unidad expresadas en esta notación son llamadas *fracciones decimales* puesto que ellas siempre decrecen en una razón decimal, mientras que las partes enteras son llamadas la clase de las unidades, las decenas, las centenas, ..., en tanto van en una razón *décuple*.

El conjunto de caracteres que expresan un número es llamado la *figura* del número (como se hacía desde la Edad Media). Más adelante define las cantidades como positivas o negativas, identificando con esto aquellas que son mayores que, o menores que cero (la nada), dando ejemplos con respecto a los bienes que se poseen, las deudas, los movimientos adelante o atrás, los aumentos o las disminuciones, líneas orientadas, etc. Nótese como Newton aún no reconoce las cantidades negativas como números, como sí sucede con los racionales y los irracionales, pero sí caracteriza la negatividad como una especie de atributo de la cantidad que expresa dos tipos de movimientos de la cantidad, uno de los cuales es opuesto al otro (aumentar disminuir, poseer no poseer, derecha izquierda). Desde el punto de vista pedagógico esta observación es interesante, pues, así como la medición, en donde la magnitud de referencia se identifica con el “1” fue clave en la comprensión de las razones como números y, por ende, de aceptar los irracionales como números, entonces el movimiento de las cantidades, la identificación de esos dos movimientos uno como opuesto del otro, puede ser la clave para la comprensión de las cantidades negativas como números por parte de los estudiantes. Todo lo anterior subraya que, desde el punto de vista epistemológico, esta comprensión no es evidente, o al menos, como lo muestra Emmanuel Lizcano (1993) en su libro *Imaginario Colectivo y Creación Matemática*, no es evidente en la cultura occidental, no siendo este el caso para otras culturas, como el caso de las matemáticas en la antigua China.

■ Conclusiones

Como lo expresan Rashed y Vahabzadeh (1999), en el trabajo de Alkhayyam cada razón queda identificada con una sucesión de números que la identifican de manera unívoca, haciendo que la razón pueda ser analizada en sí misma, y no, como en el caso de la definición euclidea del libro V, en donde una razón siempre debe ser analizada con respecto a otra (la que es igual, o menor o mayor. Esto es sin duda un importante avance en la objetivación de la razón como cantidad, dotando a las razones de un estatus simbólico, lo que permite generar

nuevas técnicas para actuar con estos objetos matemáticos (operar con los símbolos), ganando así autonomía como entidad con naturaleza propia. Nótese que esta nueva caracterización simbólica de la razón permite unificar en una sola entidad simbólica las razones entre cantidades discretas y entre cantidades continuas, y, además, unifica las técnicas y procedimientos que antes respondían a formas de actividad diferenciada (las formas de hacer en la aritmética diferían de las formas de hacer en geometría, no solo porque la naturaleza de los objetos difiere, sino por el tipo de instrumentos utilizados). De esta forma la idea de razón se reconoce en las operaciones que permite sobre las cantidades a las que se aplica, en las formas de representación del resultado de esta operación (Rashed, R., & Vahabzadeh, B., 1999), y en las operaciones y relaciones que se pueden configurar con esta nueva entidad simbólica

En relación con la notación como emergente de un proceso de división, la razón remite de una u otra forma a una representación de la cantidad no entera, proceso solucionado en algunos momentos a partir del sistema de numeración existente, o a partir de la invención de formas especiales de notación, como es el caso de las fracciones en la antigua China, quienes usaron las fracciones tal como las conocemos hoy en día. Este aspecto de la representación y la operación con la representación es clave, pues podría decirse es lo que permite dar el estatus de número a cantidades que no son enteras (fracciones, raíces). Si bien a lo largo de la Edad Media se constituyeron como entidades simbólicas con las cuales se podía operar, que representaban las razones y proporciones entre números o magnitudes, admitiendo su naturaleza de cantidad, no se asumían como números en tanto se conservaba la conceptualización griega del número. Es así que, en la edad media, con el refinamiento de las técnicas para operar con las razones (por ejemplo, los procedimientos asociados con las fracciones continuas), y la difusión del conocimiento sobre las fracciones (que llega a Europa en la edad media gracias al contacto con los árabes, quienes a su vez lo aprendieron de los hindúes), se desarrollan nuevas comprensiones del número, y de sus formas de notación. Es notable entonces el trabajo de Stevin, que permite unificar las nociones de unidad aritmética y geométrica, al igual que reconoce el status numérico, tanto de la unidad, como de las fracciones de unidad. Este proceso de objetivación de la razón como número, se ve con toda claridad en la noción de número expresada por Newton, quien a su vez la había aprendido de su maestro Barrow, al expresar que el número es la esencia de lo que queda luego de abstraer de las razones, toda referencia a las magnitudes de las cuales ellas expresan su medida relativa (relación cuantitativa).

Esta idea, muy similar a la idea moderna de número, expresada por Russell en términos lógicos (a partir de las nociones de cardinal y clase), hace prácticamente indisociable las nociones de número y razón. Es más muestras cómo detrás del concepto de moderno de número, la base fenomenológica, descansa sobre la una idea de razón. Pero este reconocimiento del número como esencia abstraída de la razón, va de la mano, como ya lo había indicado Vieta, de la posibilidad de reconocer en el signo un objeto con el cual se opera, de alguna manera definido por dicha estructura operatoria. Este discurso sobre el símbolo, donde el número se refiere no tanto a las cantidades sensibles a través de los sentidos, sino a la estructura definida por el símbolo y sus operaciones, hace posible una racionalidad en la que se aprehende a través de la razón aquello que, en otro momento, se había considerado por fuera de la razón misma. Sin embargo, esta apertura al discurso simbólico del número no implica un rompimiento con los fundamentos intuitivos de este; es decir, la naturaleza misma del número, los fundamentos primarios de este, siguen siendo puestos con respecto a esas cantidades sensibles de las cuales el número es una abstracción simbólica, y en donde el símbolo gana independencia, por así decirlo, de esa fuente fenomenológica primaria. Es una objetivación del número en el símbolo.

■ **Reconocimientos:** Este artículo toma como referencia los resultados de la Tesis Doctoral del autor (Obando, 2015).

■ Referencias bibliográficas

- Caveing, M. (1992). Le statut arithmétique du quantième égyptien. In P. Benoit, K. Chemla, & J. Ritter (Eds.), *Histoire de fractions, fractions d'histoire* (pp. 39-52). Berlin: Birkhäuser Verlag.
- Chemla, K. (1992). Les fractions comme modèle formel en Chine ancienne. In P. Benoit, K. Chemla, & J. Ritter (Eds.), *Histoire de fractions, fractions d'histoire* (pp. 189-208). Berlin: Birkhäuser Verlag.
- Clark, K. M. (2012). History of mathematics: illuminating understanding of school mathematics concepts for prospective mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 81, 67-84. doi:10.1007/s10649-011-9361-y
- Epple, M. (2004). Knot Invariants in Vienna and Princeton during the 1920s: Epistemic configurations of mathematical research. *Science in Context*, 17, 131-164.
- Euclid. (1806). *Data*. In R. Simpson (Ed.), *Euclid's Data*. Philadelphia, PA: WM. F. M'Laughlin.
- Ferreirós, J. (2010). Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices. In M. Suárez, M. Dorato, & M. Rédei (Eds.), *EPSA Philosophical Issues in the Sciences* (pp. 64-64). Dordrecht: Springer Netherlands.
- Jankvist, U. T., & Kjeldsen, T. H. (2010). New Avenues for History in Mathematics Education: Mathematical Competencies and Anchoring. *Science & Education*, 20, 831-862. doi:10.1007/s11191-010-9315-2
- Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge* (1 ed.). New York, NY: Oxford University Press.
- Klein, J. (1992). *Greek mathematical thought and the origin of algebra* (E. Brann, Trans.). New York, NY: Dover Publications, Inc.
- Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática. La construcción social del número, el espacio y lo imposible en China y en Grecia*. Barcelona: Editorial Gedisa, S. A.
- Mosvold, R., Jakobsen, A., & Jankvist, U. T. (2013). How Mathematical Knowledge for Teaching May Profit from the Study of History of Mathematics. *Science & Education*, 23, 47-60. doi:https://doi.org/10.1007/s11191-013-9612-7
- Newton, I. (1720). *Universal Arithmetick: or, a treatise of arithmetical composition and resolution* (M. J. Raphson, Trans.). In *Universal Arithmetick: Or, A Treatise of Arithmetical Composition and Resolution. To which is Added, Dr. Halley's Method of Finding the Roots of Equations Arithmetically*. London: J. Senex.
- Newton, I. (1972). *Universal Arithmetic*. In D. T. Whiteside (Ed.), *The Mathematical papers of Isaac Newton* (Vol. 5). Cambridge: Cambridge University Press.
- Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la Educación Básica*. (Doctor), Universidad del Valle, Cali, Co. Retrieved from <http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/9472/1/CB-0519794.pdf>
- Oresme, N., & Grant, E. (1965). Part I of Nicole Oresme's *Algorismus proportionum*. *ISIS*, 56(3), 327-341.
- Rashed, R., & Vahabzadeh, B. (1999). *Al-Khayyam mathématicien*. Paris: Editions Albert Blanchard.
- Robson, E. (2007). Mesopotamian mathematics. In V. Katz (Ed.), *The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: a sourcebook* (pp. 57-186). Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Stevin, S. (1634). *L'Arithmétique*. In A. Girard (Ed.), *Les Oeuvres mathématiques de Simon Stevin de Bruges*. Leyden: Bonaventine et Abraham Elsevier.
- Théon (de Smyrne). (1892). *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de platon* (J. Dupuis, Trans.). In *Oeuvres de Théon de Smyrne*. Paris: Librairie Hachette.
- Vasco, C. (1995). History of mathematics as a tool for teaching mathematics for understanding. In D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. Maxwell West, & M. Stone Wiske (Eds.), *Software goes to school: teaching for understanding with new technologies* (pp. 56-69). New York, NY: Oxford University Press.
- Viète, F. (1630). *Introduction en l'art analytique, ou nouvelle algèbre* (J.-L. Vaulezard, Trans.). In J. Jacquin (Ed.), (pp. 79). Paris: Chez Lulian Lacquin.
- Viète, F. (1630/1983). *The analytic art* (T. R. Witmer, Trans.). In *The analytic art. Nine studies in algebra, geometry and trigonometry from the opus restitutae mathematicae analyseos, seu algebra nova*. New York, NY: Dover Publications Inc.