VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

# ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO SOBRE LA CONFRONTACIÓN ENTRE LA GEOMETRÍA DE DESCARTES Y LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

# SOCIOEPISTEMOLOGICAL STUDY ABOUT A CONFRONTATION BETWEEN THE DESCARTES' GEOMETRY AND ANALYTICAL GEOMETRY

**Luis Miguel Paz-Corrales, Ricardo Cantoral**
**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México)**
**luismiguel.paz@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx**

**Resumen**
Este trabajo aborda el desarrollo de una investigación documental que consiste en la confrontación de La Geometría de Descartes y el discurso Matemático Escolar en el libro de texto Geometría Analítica de Lehmann. Nos cuestionamos cómo nace la geometría analítica y además cuál es el contexto sociocultural que le confirió su razón de ser. Asumimos como hipótesis de partida que el pensamiento variacional está inmerso en la construcción del conocimiento matemático, aún de aquél del tipo geométrico o geométrico analítico. Con los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional y apoyados en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, a partir del análisis, se muestra cómo están presentes las ideas variacionales en ambas obras.

**Palabras clave:** discurso matemático escolar, pensamiento y lenguaje variacional, lugar geométrico

**Abstract**
This work deals with the development of a documentary research that consists of the confrontation of Descartes' Geometry and the Mathematical School discourse in Lehmann's textbook Analytical Geometry. We ask ourselves how analytical geometry is born and what is the sociocultural context that gave it its reason for being. We assume as a starting hypothesis that variational thinking is immersed in the construction of mathematical knowledge, even in the geometric or analytical geometric type. With the elements of Variational Thinking and Language, and supported by the Socioepistemological Theory of Mathematics Education, the analysis shows how variational ideas are present in both texts.

**Key words:** mathematical school discourse, variational thinking and language, locus

## Introducción

En la conferencia *Socioepistemología de la variación y el cambio: una ruta didáctica*, el Dr. Ricardo Cantoral mencionó que, en los años 90, diversas investigaciones aceptaron que las matemáticas del cambio o el estudio del cambio sería identificado como uno de los hilos conductores que habrían de desarrollarse desde las experiencias informales de estudiantes, a través de experiencias escolares formales en los niveles de educación básica, secundaria y media (Cantoral, 2015). Asimismo, los resultados de investigaciones dentro de la Matemática Educativa han mostrado que, propiciar el estudio de la variación, representa una tarea importante para fomentar un aprendizaje rico en significados (Caballero y Cantoral, 2013).
Sin embargo, investigaciones enmarcadas en la línea de Pensamiento y Lenguaje Variacional muestran que el actual discurso Matemático Escolar no propicia el desarrollo de ideas variacionales, como lo muestra la tabla 1 a continuación.

***Tabla 1.** Antecedentes de estudios del cambio y la variación*

| Autores | Hallazgos relevantes |
|---|---|
| Cantoral y Farfán (1998) | Ausencia de procesos variacionales que doten de significados a los objetos del cálculo. |
| González (1999) | Diseño de actividades que propicien el desarrollo de estrategias variacionales. |
| Salinas (2003); Reséndiz (2004) | Estudian la forma en que la variación se hace presente en el dME (libros de texto y explicaciones de los profesores) |
| Fernández (2004) | Una propuesta didáctica de los multiplicadores de Lagrange. |
| Cabrera (2009) | Formación de profesores de matemáticas con respecto a ideas variacionales. |
| Caballero (2012) | Dificultades de los profesores de bachillerato para desarrollar el pensamiento variacional. |

Al respecto, Salinas (2003) menciona:

> […] la transposición actual ha hecho que el estudiante privilegie la algoritmia y deje de lado lo variacional que existe en ellos de forma natural. En este momento nos dimos cuenta que la algoritmia y el pensamiento variacional del alumno toman rutas diferentes, trayendo como consecuencia que no haya aprendizaje de los conceptos matemáticos en el pensamiento de los estudiantes. (Salinas, 2003, p. 82)

Existen investigaciones que han reportado el papel del Pensamiento y Lenguaje Variacional en áreas del conocimiento tales como la física y el cálculo (véase Cantoral, 1990), pero no así en el área de la geometría analítica. Es por ello que en esta investigación nos cuestionamos si están presentes estas ideas variacionales en la geometría analítica, y de ser así, de qué manera lo están.

## Consideraciones teóricas

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (en adelante TSME) de Cantoral (2013), asume que, para estudiar fenómenos didácticos ligados al saber matemático, se precisa acudir –y esto es lo que la diferencia de otros enfoques teóricos– a un examen minucioso del saber, es decir, a su problematización. Como lo plantean Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini (2015):

> […] la Socioepistemología utiliza como recurso a la problematización del saber, proceso mediante el cual se realiza análisis de obras originales de una pieza de conocimiento, se examinan los libros de texto, se interpretan procesos mentales involucrados y se comparan los usos del conocimiento matemático. (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015, p. 14)

Y es ahí, como mencionan los autores, que el análisis de los libros de texto toma un rol relevante para la teoría, puesto que permite identificar lo que se mantiene invariante, sea cual sea el texto, el paradigma educativo o la región, y que caracteriza al discurso Matemático Escolar del saber matemático que se está investigando, que en nuestro caso es la geometría analítica. Se consideró este referente teórico dado que su aporte fundamental es modelar la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional. Bajo esta idea, Cantoral (2013) afirma que el conocimiento matemático es construido con base en prácticas sociales que norman la actividad de quienes lo construyen.

El carácter normativo de la práctica social describe una evolución pragmática de la construcción del conocimiento, como un intento de explicar cómo se aprende en matemática y además de ofrecer una herramienta teórica de análisis de datos, que Cantoral (2013) describe como el modelo de anidación de prácticas. Una forma de explicar este modelo (véase figura 1) sería que el estudiante pasa de la acción directa del sujeto ante el medio, lo cual se organiza como una actividad humana para perfilar una práctica (socialmente compartida) regulada bajo prácticas de referencia, las que son expresión material e ideológica de un paradigma, que a su vez son normadas por una práctica social.


***Figura 1.*** Modelo de anidación de prácticas. Extraído desde Cantoral (2013, p. 155).

La TSME descansa sobre cuatro principios fundamentales que se explican de manera articulada y sustentan su idea fundamental sobre el significado: principio de normatividad de las prácticas sociales, principio de racionalidad contextualizada, principio de relativismo epistemológico y el principio de resignificación progresiva. Además, la teoría postula que la esencia de la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas reside en la noción de *discurso Matemático Escolar* (en adelante dME), el cual entenderemos como el conjunto de discursos estructurados producidos por convencionalismos sociales y culturales que surgen ante la necesidad de la comunicación y difusión masiva de los saberes matemáticos (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra, 2006).

De acuerdo con Soto (2010), algunas de las características del dME son: la atomización en los conceptos, su carácter hegemónico, la matemática como un conocimiento acabado y continuo, el carácter utilitario del conocimiento y finalmente la falta de marcos de referencia.

Esta investigación está enmarcada en la línea del Pensamiento y Lenguaje Variacional (en adelante PyLV), la cual descansa en el seno de la TSME. Según Caballero y Cantoral (2013):

> El PyLV es tanto una línea de investigación como una forma de pensamiento, que se caracteriza por proponer el estudio de situaciones y fenómenos en los que se ve involucrado el cambio, y donde la necesidad de predecir estados futuros motiva el estudio y análisis de la variación. (Caballero y Cantoral, 2013, p. 1197)

Esta investigación se gesta en la búsqueda de ideas que aluden al cambio y a la variación, por lo cual entenderemos al primero como una modificación de un estado y a la segunda como la cuantificación de dicho cambio.

Según Caballero (2016), la variación no se observa, sino que se infiere, se calcula, se mide, y, por tanto, se construye, de este modo, la variación expresa la dinámica de las variables estudiadas o involucradas en el estudio del fenómeno para darse cuenta de su evolución en los diversos estados en los que se pueda presentar.

Por otro lado, dado que se analizó una obra original y un texto escolar, resulta conveniente mencionar en la tabla 2 cómo son vistos ambos.

***Tabla 2.*** *Concepciones de los textos*

| Punto de vista | Autor |
|---|---|
| Como material de consulta | Bravo y Cantoral (2012) |
| Como objeto de difusión escolar y científica | Espinoza (2009) |
| Como objeto cultural | Cantoral et al. (2015) |
| Como instrumento de poder | Choppin (1980) |

## Consideraciones metodológicas

En la presente investigación, de tipo documental, se utilizó el método de análisis de textos, particularmente, la obra *La Geometría* (Descartes, 1947) y el texto escolar *Geometría Analítica* (Lehmann, 2005). Dicho análisis se llevó a cabo mediante la problematización del saber, recurso que nos ofrece la TSME, en la cual, no sólo se analiza el contenido, sino que se busca precisar el juego de prácticas explicitas o implícitas en las obras, es decir, se contrasta el texto escolar con el o los originales de otras épocas, tomando en cuenta el contexto de la producción de la obra.


***Figura 2.*** Búsqueda de ideas variacionales en *La Geometría* (Descartes, 1947) y *Geometría Analítica* (Lehmann, 2005). Elaboración propia.

Inicialmente, en función del método propuesto por Cantoral et al. (2015), se llevó a cabo la investigación en dos fases: una *fase descriptiva* (véase figura 3), que contextualiza y sitúa a la geometría analítica en el momento que Descartes ofrece sus ideas germinales y cómo se ubica en el sistema educativo, en el caso del texto escolar; en una segunda fase, denominada *análisis cualitativo*, donde se resalta la actividad matemática que propone el libro a partir de las *acciones* del individuo.

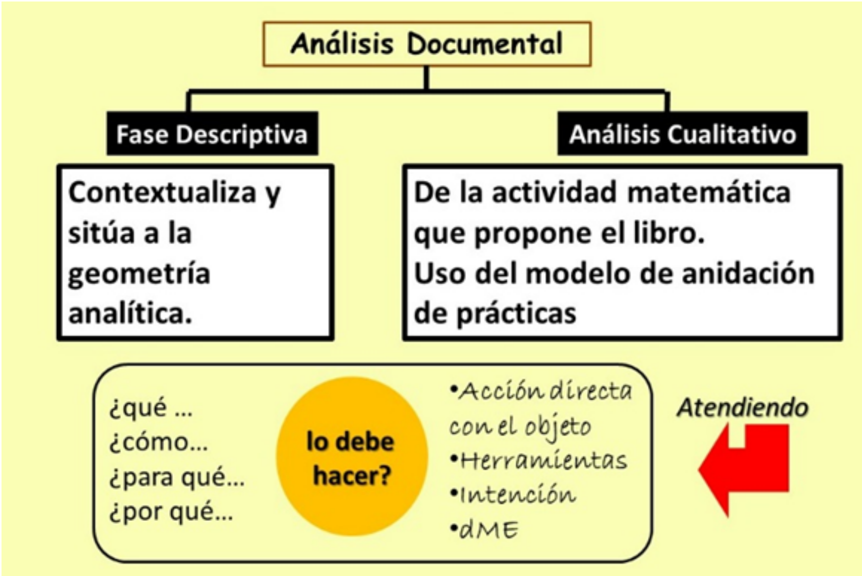



***Figura 3.*** Método del análisis documental. Adaptado desde Cantoral et al. (2015, pp. 18-19)

Posteriormente, y a partir del análisis, se decide incorporar una tercera fase denominada *de confrontación*, esto con el objeto de dar muestra de las ideas variacionales observadas de forma transversal, sin hacer distinción entre ambas obras, y no para mostrar las bondades o desaciertos de una con respecto a la otra.
Al estudiar ambas obras, somos conscientes que, por su intencionalidad son diferentes, pero es nuestro interés explorar lo que pasó, relativo a la variación, con este tipo de conocimiento al llegar a la escuela.

## Análisis y resultados

A continuación, se describen y analizan los resultados más relevantes de este estudio con respecto a extractos de las distintas fases antes mencionadas.

Fase descriptiva

*La Geometría* es uno de los tres tratados que componen el *Discurso del Método*, publicado originalmente por Descartes en 1637. De acuerdo con González-Urbaneja (2007), es una de las obras culminantes del saber humano, y considerada como la inicial de la matemática moderna.

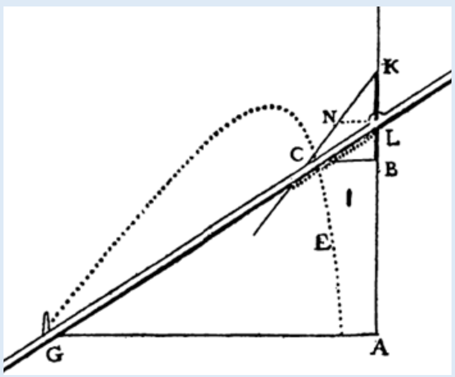
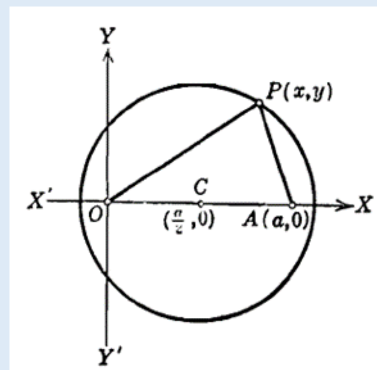
La *Geometría Analítica* de Lehmann, publicado originalmente en 1942, es un libro muy utilizado por profesores y estudiantes mexicanos, el cual se ha manejado desde hace mucho tiempo hasta la actualidad (Serna-Martínez, 2007). En México, la geometría analítica se introduce en el III semestre de la Educación Media Superior.

Fase cualitativa

En cuanto a la elección de los dos libros, la obra cartesiana se escogió porque propone un método para resolver problemas geométricos, como por ejemplo el famoso *Problema de Pappus*, piedra angular para demostrar su efectividad. En cambio, el segundo es un texto clásico usado en muchas de las instituciones educativas mexicanas.

Con el afán de observar dónde se hace presente el cambio, y a la vez identificar las nociones variacionales encontradas, se analizaron problemas homólogos de los dos libros, como el caso presentado en la tabla 3 a continuación.

***Tabla 3.*** Presentación de dos problemas homólogos para este estudio

| Problema A* | Problema B** |
|---|---|
|   |   |

Problemas extraídos desde (*) Descartes (1947, p. 79) y (**) Lehmann (2005, p. 130)

Para el análisis de los problemas A y B, se destacarán **en negrita** las ideas variacionales presentes en cada uno de éstos.

*Problema A: ¿De qué género es la curva?*

Descrita por la intersección de la regla $GL$ y la pieza $CNKL$, cuyo lado $KN$ está prolongado indefinidamente hacia $C$, y se mueve sobre el plano en línea recta. Se elige una línea recta como $AB$ para referir a sus diversos puntos todos los de la línea curva $EC$ (sistema de referencia). En $AB$ se elige un punto, como el $A$, para empezar por el cálculo, tomando un punto $C$ cualquiera de la curva (generalidad). A continuación, se designan cantidades indeterminadas y desconocidas: $CB = y$, $BA = x$, para encontrar la relación de ambas. Ahora, se definen las cantidades conocidas que determinan el trazado de esa línea curva, a saber: $GA = a$, $KL = b$, $NL = c$. Si por semejanza de triángulos $\frac{LN}{LK} = \frac{CB}{BK}$, entonces $BK = \frac{b}{c}y$, $LB = \frac{b}{c}y - b$, $AL = x + \frac{b}{c}y - b$ (comparación). Posteriormente, $\frac{CB}{LB} = \frac{GA}{LA}$, entonces $\frac{y}{\frac{b}{c}y - b} = \frac{a}{x + \frac{b}{c}y - b}$. Y así que la ecuación que se debía encontrar es $y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$, por lo cual, la línea $EC$ es de primer género, en este caso, una hipérbola.

*Problema B: Hallar la ecuación del lugar geométrico. Un punto se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias, a dos puntos fijos, es constante. Hallar la ecuación de su lugar geométrico, y demuéstrese que es una circunferencia.*

Por simplicidad, podemos tomar los puntos $O(0,0)$ y $A(a,0)$. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico. Entonces, $P$ debe satisfacer la condición geométrica $\overline{PO}^2+\overline{PA}^2=k$. Por la fórmula de distancia entre dos puntos: $\overline{PO}^2=x^2+y^2$, $\overline{PA}^2=(x-a)^2+y^2$. Sustituyendo $x^2+y^2+(x-a)^2+y^2=k$, luego $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}(2k-a^2)$. Retomando la ecuación $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}(2k-a^2)$, se puede evidenciar que se trata de una circunferencia cuyo centro es el punto $C\left(\frac{a}{2},0\right)$, y cuyo radio $PC=\frac{1}{2}\sqrt{2k-a^2}$, siempre que $k>\frac{a^2}{2}$. Si $k=\frac{a^2}{2}$, el lugar geométrico se reduce al punto $\left(\frac{a}{2},0\right)$, y si no se cumple ninguna de las dos anteriores, no existe ningún lugar geométrico.

Fase de confrontación

*Nociones variacionales:*

En el *Problema A*, se muestra una curva para propiciar el análisis de los cambios que se producen. Se pregunta de qué género es la curva $EC$, por el cambio experimentado por la intersección de $GL$ con la pieza $CNKL$ se generan diferentes puntos de la curva. En este caso identificamos el uso de la estrategia de comparación, al analizar el estado de la curva en dos puntos diferentes, y así argumentar acerca del comportamiento y el género de la curva. La idea es relacionar la variable $x$ e $y$ mediante la semejanza de triángulos, de manera que se requiere el uso de la estrategia de *seriación* para analizar la forma en que cambia la longitud de los segmentos a medida que la regla gira circularmente en $G$. La estrategia de *predicción* se hace presente cuando, al suponer el problema ya resuelto y conociendo la ecuación de varias curvas, se puede anticipar el género de la misma, incluso qué otras curvas se generarían si la pieza $CNKL$ fuese otra. Finalmente, la tarea propone una pregunta de tipo predictivo, en tanto que si se cambia la pieza triangular se pueden obtener otros lugares geométricos.

En el *Problema B*, se dan ciertas condiciones, y se pide demostrar que se trata de una circunferencia. Se usa la estrategia de *comparación*, puesto que, aunque $P$ se mueva, la suma de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos será constante, lo cual se puede verificar al llegar al siguiente resultado: $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}(2k-a^2)$, se *anticipa* que se trata de una circunferencia, pues la ecuación general ya es conocida, cuyo radio es $PC$. Al usar la estimación, se concluye que si se cumple que $k>\frac{a^2}{2}$, se generará la circunferencia. Además de los casos donde $PC=0$ o incluso $k<\frac{a^2}{2}$.

## Conclusiones

En *La Geometría* no se encuentra ninguna curva trazada directamente a partir de una ecuación, pero esto fue rescatado por Fermat. Se puede inferir que a Descartes no le interesaban los lugares de puntos que satisfacen una ecuación dada, sino la posibilidad de construir esos puntos. Lehmann enfatiza la noción de lugar geométrico y le da un carácter dinámico. Sin embargo, a partir del análisis, solo se presenta dos actividades que vinculan la construcción geométrica, es decir, no se explicita las construcciones geométricas exactas.
El contraste más fuerte entre Descartes y Lehmann es que este último perdió de vista el **movimiento**. Entonces, los problemas que plantea Lehmann ya no dejan ver lo que veía Descartes: buscar la forma de categorizar las curvas generadas por algún tipo de movimiento. Y esto es lo importante, porque es lo que le da el vínculo con lo variacional. Aun así, en ambas obras se puede apreciar la noción de variación de la forma siguiente:

> *Variación* (o variación dinámica en geometría analítica): tenemos los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Asignaremos la posición del punto $(x_1, y_1)$, a medida que se esté generando la curva, aparece el punto $(x_2. y_2)$, y así sucesivamente, hasta que aparece el punto $(x_n, y_n)$.Gráficamente, se puede ver que un punto $C$ cualquiera, con coordenadas $(x, y)$, ha cambiado de posición. Y si queremos saber la posición de un punto en particular, será a partir de la ecuación.

De acuerdo con la definición anterior, podemos preguntarnos ¿por qué, al hablar de cambio y variación, sí o sí tenemos que referirnos al movimiento?

En otras palabras, vemos la variación en geometría analítica al momento que un punto $C(x, y)$ se mueve y cambia de posición, y con ello, también lo harán los segmentos punteados de longitud $x$ y longitud $y$. Lo anterior nos conlleva a afirmar que es mediante la ecuación que se podrá observar el *carácter estable del cambio* (véase en Caballero, 2012).

A partir del análisis, pudimos notar diferentes sistemas de representación asociados a la variación:

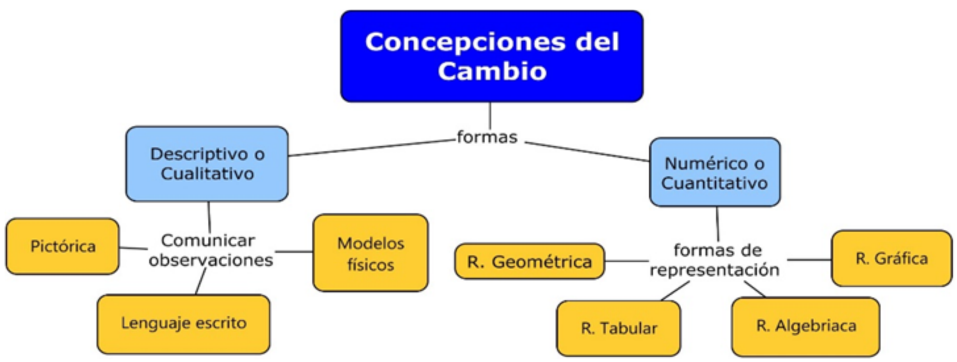



***Figura 4.*** Formas en donde el cambio se observó a partir del análisis. Elaboración propia.

Otro punto interesante que podemos mencionar es que, en un curso de Geometría Analítica como está en el texto de Lehmann, se van a trabajar cónicas, rectas, parábolas, elipses, círculos, hipérbolas, donde normalmente se da una propiedad del lugar geométrico y se deduce la ecuación. En ese sentido, existe la percepción que los problemas de este tipo no aportan nada nuevo, porque ya se tienen maneras de construir una circunferencia, una elipse, etc., entonces, surge la interrogante ¿dónde está lo nuevo?

Podría ser que el tipo de problemas planteados en la obra cartesiana sí parecen novedosos, como por ejemplo aquél sobre determinar qué lugar geométrico genera esa propiedad, dado que los objetos que van a resultar ¡sorprendentemente serán objetos conocidos! Del análisis realizado, postulamos que son este tipo de problemas los que en verdad dan origen a lo que hoy conocemos como geometría analítica.

Finalmente, a partir de este trabajo, se puede afirmar que no es siempre explícito el rol del PyLV, pero sí está presente en la geometría analítica.

## Referencias

Bravo, A. y Cantoral, R. (2012). Los Libros de Texto de Cálculo y el Fenómeno de la Transposición Didáctica. *Educación Matemática, 24*(2), 91-122. Recuperado desde http://somidem.com.mx/descargas/Vol24-2.pdf

Caballero, M. (2012). *Uso de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en los profesores de bachillerato* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Caballero, M. (2016). *Los Sistemas de Referencia: El papel de la causalidad y la temporalización en el tratamiento del cambio y la variación. Un estudio socioepistemológico de su construcción* (Memoria predoctoral no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*, 1197-1205. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cabrera, L. (2009). *El pensamiento y lenguaje variacional y el desarrollo de competencias. Un estudio en el marco de la reforma integral del bachillerato* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y Predación entre las nociones de "el Prædiciere y lo Analítico"* (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, R. [Facultad de Educación Universidad de La Sabana]. (30 septiembre, 2015). *Conferencia Ricardo Cantoral (México) Día 3 Congreso Internacional Didáctica de la Matemática* [Archivo de video]. Recuperado desde https://youtu.be/tl7wnOTDgcU

Cantoral, R. y Farfán, R.-M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, 42*, 353-369.

Cantoral, R., Farfán, R.-M., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y Representación: algunos ejemplos. En L. Radford y B. D'Amore (Eds.), *Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático* (Número especial de RELIME: Revista Latinoamericana de Matemática Educativa), 83-102.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 9-28. Recuperado desde http://www.aiem.es/index.php/aiem/article/view/123

Choppin, A. (1980). L'histoire des manuels scolaires: Un approche globale. *Histoire de l'éducation, 9*, 1-15. doi:10.2307/41158041

Descartes, R. (1947). *La Geometría* (P. R. Soler, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Espasa-Calpe.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Fernández, F. (2004). *Una propuesta didáctica del método de los multiplicadores de Lagrange. Un enfoque socioepistemológico* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

González-Urbaneja, P. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *SIGMA – Revista de Matemáticas, 30*, 205-236. Recuperado desde http://www.euskadi.eus/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_30/18_raices.pdf

Lehmann, C. (2005). *Geometría Analítica* (R. G. Díaz, Trad.). Guanajuato, México: Limusa.

Reséndiz, E. (2004). *La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Salinas, C. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al cálculo* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Serna-Martínez, L. (2007). *Estudio socioepistemológico de la tangente* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, Legaria, México.

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.