

# EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE EN CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

## DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS ASSESSMENT

Marisol Radillo Enríquez, Juan Martín Casillas González, Lucía González Rendón, Gabriela Godínez Dietrich

Universidad de Guadalajara. (México)

marisol.renriquez@academico.udg.mx, martin.casillas70@gmail.com,  
lgrendon2@yahoo.com.mx, ggdietch@hotmail.com

### Resumen

La evaluación del aprendizaje en el Cálculo Diferencial e Integral debería centrarse más en los conceptos de esta materia, que en el manejo algebraico o trigonométrico de los procedimientos. Con el propósito de orientar a los profesores de cálculo en el diseño de actividades de evaluación integradas a los procesos de aprendizaje y enseñanza, se presenta una propuesta para clasificar reactivos de integrales definidas, con base en el análisis de los posibles procedimientos para su resolución.

**Palabras clave:** evaluación, taxonomía, cálculo

### Abstract

Calculus assessment must focus on calculus' concepts, but algebraic or trigonometric procedures. With the purpose of guiding calculus teachers in design testing techniques and its association with the teaching and learning process, presents a proposal to build taxonomy for different type of problems of indefinite integral, based on its solution procedures.

**Key words:** assessment, taxonomy, calculus

## ■ Problematización

La evaluación educativa es un fenómeno dinámico y complejo que involucra factores y actores tan diversos como: profesores y directivos, escuelas y universidades, planes y programas de estudio, libros de texto, y materiales didácticos, etcétera. La valoración de cada uno de estos elementos y su efecto en el proceso educativo debe diseñarse de acuerdo al propósito que se persiga. Desde hace algunas décadas, y a raíz del auge del constructivismo, la labor académica implica la evaluación continua en el salón de clases; no obstante, de manera paralela se han impulsado las pruebas estandarizadas a gran escala, con propósitos tan diversos que van desde determinar los niveles de aprendizaje de los egresados de un programa educativo, hasta comparar la calidad de los sistemas educativos o de las instituciones escolares a través de los resultados de los estudiantes en dichos exámenes (Díaz-Barriga, 2006).

En la actualidad, uno de los retos para los docentes de la Educación Superior en México consiste en sistematizar el proceso de evaluación, de tal manera que resulte “estratégicamente integrada” con las actividades de aprendizaje y enseñanza (Jiménez, González, y Hernández, 2011). Aunque existe una gran variedad de instrumentos de recolección de información sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes, tales como portafolios, proyectos, diarios de aprendizaje, listas de cotejo, tareas, ensayos, mapas conceptuales, etc., en los cursos de matemáticas a nivel universitario, la evaluación gira en torno a la resolución de problemas y/o ejercicios.

Desde nuestra experiencia docente, hemos observado que el grado de complejidad de los reactivos de Cálculo Diferencial e Integral que se han incluido en los exámenes departamentales del Dpto. de Matemáticas del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara, depende más del procedimiento algebraico o trigonométrico que de la conceptualización de la derivada o la integral. Dichos exámenes, realizados hasta 2013, estuvieron integrados por reactivos que planteaban explícitamente una función a la cual había que derivar, integrar u obtener un límite determinado. Si se dejan de lado las razones que se tuvieron para evitar los problemas de aplicación relacionados con las diversas carreras de ingeniería y ciencias exactas de nuestros estudiantes, al revisar dichos exámenes se encuentra que una baja puntuación obtenida en el examen puede atribuirse meramente a errores algebraicos; en contraparte, una alta puntuación tampoco indica que el estudiante demostró un conocimiento profundo del cálculo.

El objetivo de este trabajo es proponer una taxonomía particular para los reactivos de cálculo diferencial e integral, que permita a los profesores del CUCEI diseñar actividades de evaluación y de aprendizaje acordes a los nuevos planes de estudio (vigentes desde 2013). La idea central es que, dado un banco de reactivos debidamente clasificados de acuerdo a su complejidad y conceptos involucrados, el profesor pueda diseñar actividades de evaluación (tareas, exámenes u otros instrumentos) que se centren en el aprendizaje del cálculo. En esta primera fase de la investigación, se trabajará con la integral, definida e indefinida.

## ■ Sustento teórico

Nuestra postura teórica parte de considerar la evaluación del aprendizaje como un proceso paralelo y complementario a la enseñanza-aprendizaje. En nuestra opinión, los exámenes son solo un instrumento más para evaluar el aprendizaje, pero no el único ni necesariamente el principal recurso para determinar si un estudiante ha aprendido determinado contenido temático u objetivo instruccional.

Una prueba de aprendizaje (examen) es un instrumento de recolección de información cuantitativa sobre el aprendizaje de los estudiantes. Aunque existen diversos tipos de pruebas, este proyecto se enfoca en las pruebas objetivas, es decir aquellos exámenes integrados por preguntas de respuesta convergente, es decir, una sola respuesta correcta.

En este proyecto nos centramos en uno de los indicadores de eficacia de las pruebas, de acuerdo a Ulloa, Pantoja y Nesterova (2014) es la validez de contenido, considerada como la medida en que las tareas del examen corresponden a las competencias y temas del programa del curso, ya que consideramos que las pruebas de Cálculo Diferencial e Integral deben centrarse en evaluar los conceptos de esta materia. El contenido de un examen depende de los reactivos que lo integran; por esta razón, cada ítem de este proyecto deberá indicar, además de su nivel taxonómico, el contenido y objetivo del programa vigente con los cuales se relaciona. De esta manera los profesores podrán diseñar adecuadamente sus tareas y exámenes.

En cuanto a los reactivos que utilizaremos, serán de tipo convergente y se pretende que la solución de los mismos no esté centrada en el recuerdo y la repetición de información descontextualizada por parte del estudiante, pues deseamos evitar que para responder correctamente las preguntas solamente sea necesario un formulario ya que, como afirman Carrasco, Carrión, Hernández, Preciado, Arrieta y Díaz (2017) esto implica reducir el pensamiento matemático al manejo de reglas y símbolos de un lenguaje. Aun así, es inevitable que los estudiantes de matemáticas deban resolver una gran cantidad de ejercicios, es decir si planteamientos rutinarios, tanto en el trabajo en el aula como en algunas tareas o exámenes. Sin embargo, a este tipo reactivos les corresponderá el nivel taxonómico más bajo, lo cual incide en una menor puntuación que un problema más complejo.

Nuestra intención es clasificar diversos reactivos sobre un mismo tema y objetivo, por ejemplo, la derivada de una función en un punto dado, y en función de las respuestas a cada uno de ellos, determinar si el estudiante demuestra haber aprendido “a profundidad”. Para ello debemos clasificar el grado de complejidad de las tareas cognitivas requeridas en la solución de cada problema.

La taxonomía de productos cognitivos de Bloom, Engelhart, Furst, Hill, y Krathwohl, constituye nuestro punto de partida para crear una clasificación de reactivos de Cálculo diferencial, de acuerdo al nivel de complejidad que representa su solución (Kratwhol, 2002). En 1956 se publicó la taxonomía para objetivos instruccionales, ya que el proyecto de Bloom se enfocaba en el curriculum, bajo el título *Taxonomy of Educational Objectives: The Classification of Educational Goals. Handbook I: Cognitive Domain* (Kratwhol, 2002). Si bien son conocidas las 6 categorías principales de esta taxonomía, en realidad 5 de ellas se subdividen, como se muestra a continuación.

Estructura de la taxonomía original de Bloom (Kratwhol, 2002, p. 213)

1. Conocimiento
  - 1.1. Conocimientos específicos
    - 1.1.1. Conocimiento de la terminología
    - 1.1.2. Conocimientos de datos específicos
  - 1.2. Conocimientos de modos y significados específicos
    - 1.2.1. Conocimiento de convenciones
    - 1.2.2. Conocimiento de secuencias
    - 1.2.3. Conocimiento de clasificaciones y categorías
    - 1.2.4. Conocimiento de metodología
  - 1.3. Conocimiento de universales u abstracciones en un campo o área
    - 1.3.1. Conocimiento de principios y generalizaciones
    - 1.3.2. Conocimiento de teorías y estructuras
2. Comprensión
  - 2.1. Traducción
  - 2.2. Interpretación
  - 2.3. Extrapolación
3. Aplicación
4. Análisis
  - 4.1. Análisis de elementos
  - 4.2. Análisis de relaciones

- 4.3. Análisis de principios de organización
- 5. Síntesis
  - 5.1. Producción de una comunicación única
  - 5.2. Producción de un plan, o propuesta de un conjunto de operaciones
  - 5.3. Derivación de un conjunto de relaciones abstractas
- 6. Evaluación
  - 6.1. Evaluación en términos de evidencia interna
  - 6.2. Emisión de juicios en términos de criterios externos

Estas 6 categorías principales tienen una jerarquía “acumulativa”, es decir, un objetivo o ítem de nivel 3 (aplicación), involucra el cumplimiento de la complejidad de los dos niveles previos (Conocimiento y Comprensión). Esta taxonomía ha sufrido algunas transformaciones a lo largo del tiempo, debidas a revisiones y adecuaciones, en especial en los verbos indicadores del nivel de complejidad. Dado el objetivo de este proyecto, solo mencionaremos la versión de la tabla taxonómica representada en dos dimensiones (Kratwhol, 2002, p. 217), un ejemplo de la cual se muestra en la figura 1. Una tabla de doble entrada como la mostrada en la figura 1, será de más utilidad para cumplir con nuestro objetivo.

The Cognitive Process Dimension						
The Knowledge Dimension	1. Remember	2. Understand	3. Apply	4. Analyze	5. Evaluate	6. Create
A. Factual Knowledge	Objective 1					Objective 3
B. Conceptual Knowledge		Objective 2			Objective 4	Objective 3
C. Procedural Knowledge						
D. Metacognitive Knowledge						

Figure 2. The classification in a Taxonomy Table of the four objectives of Ms. Airasian’s unit integrating Pre-Revolutionary War colonial history with a persuasive writing assignment.

Figura 1. Tabla taxonómica de dos dimensiones, publicada en Kratwhol (2002)

## ■ Metodología

Con el propósito de facilitar la construcción de la taxonomía, se eligió trabajar con reactivos de respuesta convergente, ya sea en un formato de respuesta abierta o de opción múltiple.

Se plantean las siguientes fases:

1. Revisión del programa del curso para determinar los objetivos o competencias que es posible lograr con el contenido temático de las integrales definidas e indefinidas.
2. Elaborar una clasificación preliminar de reactivos, de acuerdo al grado de complejidad que requiere su solución. Se utilizarán los reactivos de los exámenes departamentales existentes y se elaborarán nuevos reactivos, acordes a los nuevos Planes de Estudio.
3. Evaluación formativa de los reactivos, por parte expertos (profesores de la materia) y algunos estudiantes. En esta fase se determinarán los indicadores de calidad de los reactivos, como el índice de dificultad y el poder de discriminación.

4. Elaboración de una taxonomía específica para los reactivos diseñados.

### ■ Resultados preliminares

Dado que el proyecto está en marcha, los resultados que tenemos son preliminares (fase 2), y hemos encontrado 3 niveles tentativos de reactivos para integrales indefinidas:

Nivel (1) dada una función en forma explícita, obtener la integral indefinida. Este nivel se subdivide en más categorías, de acuerdo a la técnica de integración involucrada en el proceso, sin perder de vista las operaciones algebraicas o trigonométricas involucradas.

Nivel 1.1 Reactivos que se resuelven al aplicar directamente una fórmula o procedimiento. Las operaciones involucradas en su solución o simplificación, son rutinarias. Ejemplos:

$$\int \frac{1+\cos 4t}{2} dt, \int \frac{(e^x + e^{-x})dx}{e^x - e^{-x}}, \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-16}}, \int \frac{1}{(x^2-1)^2} dx$$

Nivel 1.2 Reactivos que se resuelven al aplicar directamente una fórmula o procedimiento. Requieren de un procedimiento extenso, mas no complicado, para su solución o simplificación

Nivel (2) integrales indefinidas cuya solución requiere cambio de variable, o de un procedimiento laborioso, que puede involucrar elegir la técnica de integración óptima. Ejemplos:

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1} dx, \int t\sqrt{t+1} dt, \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx, \int x^3 \cdot e^x dx,$$

Nivel (3) problemas de diferentes contextos de física e ingeniería cuya solución requiere una modelación matemática (obtener la función) y un proceso de integración.

Ejemplos:

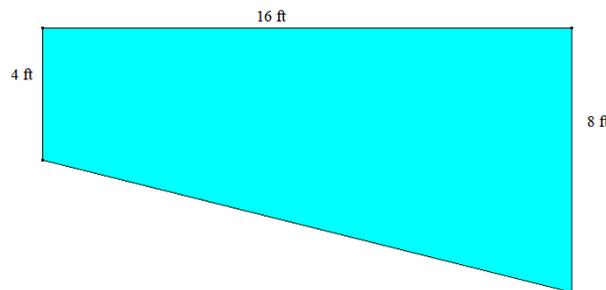
- La siguiente tabla muestra la velocidad de un cuerpo en movimiento (en metros sobre segundo), medido en intervalos regulares de un cuarto de segundo.

Determine la distancia recorrida por el cuerpo desde  $t = 0$  hasta  $t = 3.75$

Tiempo (segundos)	Velocidad (m/s)
0.00	0.00
0.25	0.28
0.50	0.53
0.75	0.73
1.00	0.90
1.25	1.01
1.50	1.11
1.75	1.18
2.00	1.21
2.25	1.17
2.75	1.05
3.00	0.91
3.25	0.72
3.50	0.55
3.75	0.26

*Fuente:* Calculo integral Wenzelburger, E. (1994). Didáctica del Cálculo Integral. México: Editorial Iberoamerica

- Calcular la fuerza ejercida por el agua sobre el fondo de una alberca rectangular, cuando ésta se llena al 100% de su capacidad. El fondo es un plano inclinado, con 10 pies de ancho por 16 ft de largo, profundidad de 4 ft en la parte baja y de 8 ft. En la parte más honda. La siguiente figura muestra el corte transversal de la alberca.



### ■ Reflexiones finales

Los resultados preliminares de las categorías taxonómicas que hemos mostrado aún están en revisión. En esta primera etapa hemos comenzado a clasificar los reactivos que comúnmente fueron utilizados en los exámenes departamentales de nuestra institución, que no son las herramientas más adecuadas para evaluar aprendizaje.

La complejidad de un reactivo de Cálculo Diferencial e Integral no debería residir en las operaciones o procedimientos algebraicos o trigonométricos requeridos para su solución, sino en las operaciones cognitivas que se requieren para operar los conceptos matemáticos involucrados en el problema. Por supuesto que los estudiantes de cálculo deben dominar los conocimientos previos de álgebra y trigonometría, entre otros, pero con la clasificación de los reactivos, que incidirá en la puntuación que corresponderá a su respuesta, en una tarea o examen, queremos poner el énfasis en los conceptos base de la materia (límites, derivadas, integrales). De esta manera, los resultados de las evaluaciones proveerán a los profesores información útil para mejorar su práctica docente y orientar a sus estudiantes para que mejoren sus técnicas de estudio y de resolución de problemas.

En etapas posteriores, se ampliará el trabajo con el resto del curso de Cálculo Diferencial e Integral y se hará la evaluación formativa de los reactivos, con una muestra aleatoria de estudiantes de diversas carreras del CUCEI, que cursen dicha materia. No obstante, consideramos que el producto final de este proyecto, la taxonomía para reactivos de cálculo integral, siempre será perfectible por lo que seguiremos trabajando en esta línea, en estrecha relación con los profesores y estudiantes del Departamento de Matemáticas del CUCEI.

### ■ Referencias bibliográficas

- Carrasco, E., Carrión, V., Hernández, E., Preciado, P., Arrieta, J., Díaz, L. (2017). Complejidad en el acto de conocer: Segunda sesión. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 30, 139-147.
- Díaz-Barriga, Á. (2006). Las pruebas masivas. Análisis de sus diferencias técnicas. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11(29) 583-615. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14002912>.
- Jiménez, Y. I., González, M. A., Hernández, J. (2011). Propuesta de un modelo para la evaluación integral del proceso enseñanza-aprendizaje acorde con la Educación Basada en Competencias. *CPU-e Revista de Investigación Educativa*, 13, 34-58.

- Krathwohl, D. R., Anderson, L. W. (2002). A revision of Bloom's Taxonomy: An Overview. *Theory Into Practice*, 41(4), 212-218
- Ulloa, R., Pantoja, R. Nesterova, E. (2014). *Notas para evaluación*. México: Universidad de Guadalajara.
- Wenzelburger, E. (1994). *Didáctica del Cálculo Integral*. México: Editorial Iberoamerica