VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO ACERCA DE LOS VÍNCULOS ENTRE LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA ARITMÉTICA, EL ÁLGEBRA Y CÁLCULO

SOCIOEPISTEMOLOGYCAL STUDY ABOUT OF LINKS BETWEEN THE FUNDAMENTAL THEOREM OF ARITHMETICS, ALGEBRA AND CALCULUS

Diana Wendolyne Ríos Jarquín, Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México)
diana.rioz@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen

La Socioepistemología, parte de la articulación de aspectos didácticos, epistemológicos, cognitivos y socioculturales relativos al conocimiento matemático. Se presenta la parte inicial de un análisis de los vínculos entre los Teoremas Fundamentales de la Aritmética, el Álgebra y el Cálculo; esto desde el Pensamiento y Lenguaje Variacional en el cual nos ocupamos de la problematización del saber desde formas culturales en las que el cambio y la variación generan argumentos para establecer predicciones, valoraciones, inferencias, entre otros. Nuestro objetivo es encontrar una ruta que nos permita articularlos y, en consecuencia, generar elementos para la mejora de su enseñanza

Palabras clave: teoremas fundamentales del álgebra, aritmética y cálculo, socioepistemología, variación

Abstract

The Socioepistemology considers the articulation of didactic, epistemological, cognitive and sociocultural aspects related to mathematical knowledge. This paper is the initial part of an analysis of the links between the Fundamental Theorems of Arithmetic, Algebra and Calculus; this research is part of the Variational Thinking and Language in which we deal with the problematization of the knowledge from cultural forms in which the change and the variation generate arguments to establish predictions, valuations, inferences, among others. For that reason, our objective is to find a path that allows us to articulate them and, consequently, to generate elements for the improvement of their teaching.

Key words: fundamental theorems of arithmetic, algebra and calculus, socioepistemology, variation

Los teoremas y su importancia en el currículo

Esta investigación se sustenta en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), la cual tiene como objeto de estudio la construcción social del conocimiento matemático (*cscm*) y su difusión institucional. Además, se encuentra dentro de la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional, en el cual nos ocupamos de la problematización del saber desde el estudio de las formas socioculturales en las que el cambio y la variación generan argumentos para establecer predicciones, valoraciones, inferencias, entre otros.

En este documento no se reportan resultados sino una hipótesis de investigación en torno a una problemática que surge del análisis de las características de una serie de conocimientos matemáticos que han sido llevados a la escuela de manera fragmentada, carente de relación y de significados robustos.

Los Teoremas Fundamentales del Aritmética, el Álgebra y el Cálculo, así como las nociones matemáticas vinculadas a ellas, son objetos matemáticos que curricularmente son repartidos a lo largo de los distintos niveles educativos en la enseñanza de las matemáticas, no obstante, éstos no son presentados en todos los casos en su expresión formal, pero sí los objetos que giran en torno a ellos, como la división, la resolución de ecuaciones, la derivada y la integral, respectivamente.

Con base en el mapa curricular del Nuevo Modelo Educativo (SEP, 2017) para la Educación Primaria; en el caso del Teorema Fundamental de la Aritmética (TFAr), que consiste básicamente de la descomposición única de un número natural en factores primos, es en 4º grado cuando comienzan a introducirse las nociones de reparto y división, que son la base para la construcción de la idea de divisibilidad la cual es abordada como uno de los aprendizajes esperados en el 3º grado de secundaria, mediante el desarrollo de los mecanismos para la descomposición de un número en primos.

El Teorema Fundamental del Álgebra (TFAl) que tiene como idea central, la descomposición de un polinomio en factores lineales de la forma $(x - a_i)$ donde los a_i son precisamente las raíces de dicho polinomio, así el aprendizaje de las ecuaciones y sus representaciones se encuentra casi al final de la Educación Secundaria en el 3º grado, al introducir la formulación y resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas, posteriormente en la Educación Media Superior, se profundiza en la resolución de ecuaciones y aparece como tal, el contenido de factorización como un método para resolver ecuaciones polinomiales.

Por otra parte, aunque el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), por sí mismo articula dos de las ramas más importantes del Análisis matemático, el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral, en esta investigación incluiremos al Teorema de Taylor como un modelo predictivo que permitirá robustecer la comprensión de los significados y procesos que acompañan a este teorema, por ello la nomenclatura que recibirá es TFC-Taylor, aún si desde la secundaria se trabaja la noción de función, es en el bachillerato cuando éstas se formalizan y se establece un procedimiento para tratar con ellas mediante la integración y la derivación.

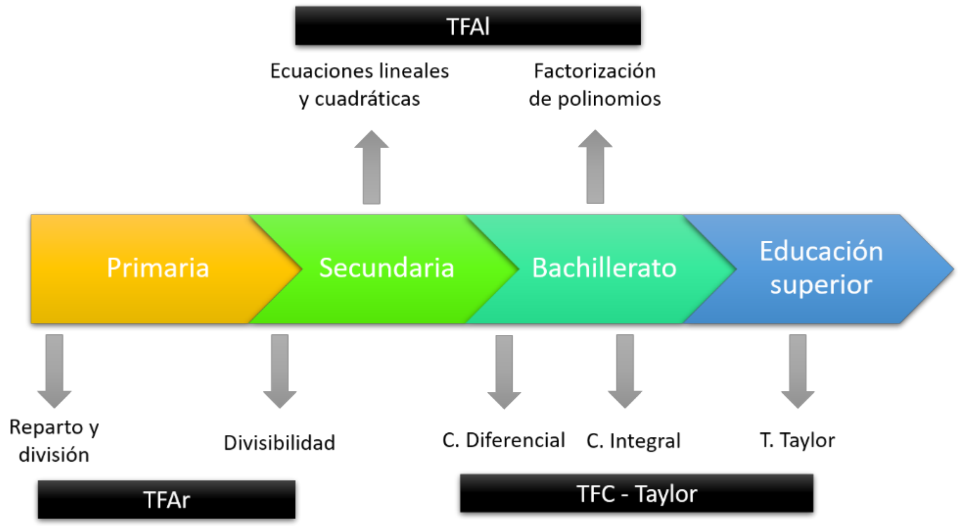

Ilustración 1. Los tres teoremas en el currículo.

De este modo, es posible identificar la desvinculación entre la manera en que estos conocimientos son difundidos institucionalmente [Ver Ilustración 1] pues, explícitamente pareciera no haber una intencionalidad detrás de la forma en que se han ordenado estos contenidos matemáticos.

La cscm y el pensamiento y lenguaje variacional

La TSME sostiene que el conocimiento matemático aún el que es considerado avanzado, se construye socialmente, y que al reconocer su naturaleza sistémica ha de considerarse al saber matemático como el conocimiento puesto en uso. En ese mismo sentido, el Pensamiento y Lenguaje Variacional como línea de investigación, se ocupa del estudio de las formas culturales de tratamiento del cambio, el cual es perceptible por el individuo. Además, éste requiere del desarrollo de la noción de variación para el establecimiento de predicciones respecto a cierto fenómeno en tanto concepto formal: $f\ (x+h) - f\ (x)$. Esta diferencia, que se ha denominado la *diferencia fundamental* (Cantoral, 2013), sirve por igual para describir procesos del Cálculo, como del Álgebra y la Aritmética, en el primer caso da lugar al teorema de Taylor, en otro a la factorización en términos lineales o cuadráticos y a la descomposición de un número en factores primos.

Al ser, la Socioepistemología una teoría de naturaleza sistémica, para estudiar el saber se consideran sus cuatro dimensiones: cognitiva, epistemológica, didáctica y sociocultural. A continuación, mostraremos el caso del TFAr y posteriormente describiremos de manera breve el caso del TFAl y el TFC-Taylor.

Lo cognitivo

Griffiths (2013), en un estudio sobre el mecanismo de la intuición ante situaciones donde el TFAr se pone en juego, reconoce la viabilidad de introducir este teorema a la enseñanza secundaria, puesto que permite el desarrollo del pensamiento intuitivo, reflexivo y formal. Para Griffiths, la intuición juega un papel sumamente importante en el proceso de aprendizaje, pues permite el establecimiento de teorías sobre un proceso, sin que éstas provengan de una enseñanza explícita, es decir, es posible establecer conjeturas que lleven a la formalización del concepto. Esto es evidencia de la posibilidad de una evolución pragmática y conceptual en torno a la noción de divisibilidad, que se encuentra presente en situaciones relacionadas con el TFAr.

Lo epistemológico

De acuerdo con Ağargün, G. y Özkan, M. (2001), la noción de descomposición única tiene su origen en la aritmética griega cuando Euclides en el libro VII de los Elementos, introdujo el estudio de la razón y la proporción, y con ello la discusión sobre la inconmensurabilidad al encontrar magnitudes que no podían ser conmensuradas. Esta idea se desarrolló por mucho tiempo, buscando generalizaciones sobre la descomposición del número, y fue en 1801 que F. Gauss llevó esta idea a la formalización de un teorema, probando que cualquier número no solamente podía ser descompuesto en factores primos, sino que, además, esa descomposición es única, salvo por el orden de los factores. Así, una noción que surge de medir una magnitud mediante un número evoluciona hasta generalizar el proceso de descomposición de cualquier número natural y más aún, da pauta a lo que ahora se conoce como teoría de números, en donde la divisibilidad juega un papel crucial.

Lo didáctico

Una de las dificultades mayormente reportadas alrededor del TFAr es el reconocimiento de la unicidad, respecto a esto Zazkis y Campbell (1996), ya reportaban el hecho de que, para un grupo de profesores de educación básica, escribir a un número en términos de sus factores, en realidad resultaba ser relativo, por ejemplo 96 puede ser factorizado como 16×6 o 8×12, ambas pueden ser totalmente válidas, sin embargo, es hasta que se discute sobre la divisibilidad cuando se encuentra un significado a la unicidad de la descomposición.

En un estudio sobre la forma en que un grupo de profesores utilizan el TFAr, López y Cañadas (2013) reportan que ante una secuencia de actividades en donde se factorizan números naturales, los profesores "utilizaron la descomposición en factores primos como un procedimiento independiente del teorema fundamental de la aritmética y que lo aplicaron de forma mecánica", es decir, no se enfocaron en la unicidad de la descomposición, pareciera que bastaba con que el número fuera factorizado, aunque los planteamientos en realidad no requerían necesariamente (salvo porque la indicación fuera explícita) del uso de números primos, lo cual nos lleva a los escenarios de significación.

Lo sociocultural

La Socioepistemología, sostiene que el conocimiento matemático se construye socialmente, y más aún, que parte de las prácticas sociales, que norman la actividad humana. En este sentido, el contexto relativo al sujeto que aprende adquiere una importancia singular, pues es mediante el uso que el conocimiento matemático adquiere sentido y significado. En el caso propio del TFAr, son las ideas de composición, descomposición, reparto y partición con y sin exactitud, que se encuentran al comprar en el mercado, al determinar las porciones cuando cocinamos, aquellos escenarios en los cuales la partición óptima es necesaria para resolver un problema. Así pues, consideramos que estos escenarios no se encuentran dentro de la escuela, y por lo tanto los significados que se construyen alrededor de esta noción, son carentes de sentido para la realidad de los estudiantes e incluso de los profesores.

Algunos aspectos generales del TFAl y el TFC-Taylor

En los casos de TFAl y el TFC-Taylor, Bouzas (2010) muestra que, para asumir el significado de las operaciones algebraicas, los estudiantes tienen que superar la fase de las operaciones aritméticas y que la construcción del conocimiento es un proceso de cambio y de reestructuración del modelo conceptual, no de acumulación (Ausubel 1977, citado por Bouzas, 2010). Del mismo modo, Sanabria (2012; 2013) caracteriza el tránsito del álgebra escolar al Cálculo mencionando que "cuando el pensamiento numérico estático se combina con el pensamiento variacional, todavía los términos reflejan los procesos de cálculo aritmético y no se han objetivado como transformaciones de un sistema analítico" (p.34) lo cual es de suma importancia en la conceptualización del Teorema Fundamental del Cálculo.

Aunque estos teoremas, tienen orígenes epistemológicos distintos, el TFAl parte de la divisibilidad, es decir, toma como punto de partida una noción que se construye mediante ideas de reparto, de cierto modo es una resignificación de la divisibilidad del número a la divisibilidad del polinomio, cuya naturaleza no es únicamente numérico estática sino una generalización, que fue demostrada por Gauss en 1816. En el caso del TFC-Taylor, fue Arquímedes quien al estudiar el problema de la cuadratura de la parábola, aproximó una curva mediante segmentos poligonales; por otro lado, Viète combina esta forma de aproximar, con el proceso de encontrar geométricamente las soluciones de una ecuación algebraica, lo cual se encuentra en su llamada lógica especiosa en la etapa de porisma, donde discute la construcción de una ecuación algebraica mediante una aproximación geométrica, no es difícil reconocer en los trabajos de Viète una relación directa con el TFAl, si bien tiene los mecanismos variacionales de la aproximación geométrica, también contiene un enfoque geométrico llevado a la generalización, de la partición de una curva.

Finalmente Isaac Barrow en 1669 articula los procesos de aproximación y acumulación, mediante la tangente a una curva y la razón de cambio y con ello construye una herramienta que vincula el Cálculo Diferencial con el Cálculo Integral. Sin embargo, más allá de una aproximación geométrica, se trata de una aproximación variacional, puesto que una función no puede ser vista sólo como una curva, sino como un conjunto de variaciones articuladas mediante una regla, y por ello, en este estudio se ha considerado el Teorema de Taylor, ya que es una herramienta del Análisis Matemático, que permite visibilizar el carácter variacional.

Ahora bien, Ponce (2013) señala que, “desde un punto de vista didáctico, no es necesario presentar el Teorema Fundamental en los cursos de Cálculo, pero que una discusión acerca de su origen y desarrollo puede ser provechosa para comprender las relaciones que establece dicho teorema” esto se debe a que, escolarmente, uno de los conflictos más usuales es la visualización del Teorema, ya que por un lado, la noción de derivada se asocia a la razón de cambio y por otro, la integral al área bajo la curva, entonces, entender estas nociones como procesos inversos, debido al tratamiento escolar, genera un conflicto en sí mismo.

En la vida diaria, no usamos explícitamente el TFAl o el TFC-Taylor, pero sí predecimos, estimamos comportamientos y conjeturamos en la acción, cómo sabemos cuánto tiempo permanecerá caliente nuestro café, en cuánto tiempo llegaremos al trabajo, si estamos llenando un recipiente cómo sabemos cuánto tardará en llenarse o cuánto debemos modificar el flujo de la llave para que se llene más rápido, cómo es que al aproximar, nos anticipamos a los hechos, esta es una característica de la actividad humana, que desde tiempos remotos dio pauta a la elección de las temporadas de cosecha, la predicción del movimiento de los astros, entre otros escenarios.

Una ruta de investigación

Reconocemos que la diferencia fundamental $f\,(x+h)-f\,(x)$ a la que alude Cantoral (2013), como mecanismo de comparación de estados en modelos predictivos y de aproximación tiene un papel articulador en los diferentes procesos asociados al TFAr, TFAl y TFC-Taylor. Por tal razón, nos proponemos realizar un análisis en donde se consideren de manera articulada los aspectos epistemológicos, didácticos, cognitivos y socioculturales, vinculados a los teoremas fundamentales correspondientes.

La importancia de esta investigación se encuentra en la posibilidad de construir una ruta que no solamente relacione conocimientos matemáticos de distintas áreas de la matemática, sino que, además, articule aprendizajes de distintos niveles educativos.

Referencias

Agargün, G. y Özkan, M. (2001). A Historical Survey of the Fundamental Theorem of Arithmetic. *Historia Mathematica* 28, 207-214. https://doi.org/ 10.1006/hmat.2001.2318

Bouzas, P. (2010). Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar: ¿puede ayudar el Aprendizaje Cooperativo? *Revista de Investigación en la escuela*, 73, 95-108.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Griffiths, M. (2013). Intuiting the fundamental theorem of arithmetic. *Educational Studies in Mathematics, 82,* 75-96. DOI 10.1007/s10649-012-9410-1

López, A. y Cañadas, M. (2013). Utilización del teorema fundamental de la aritmética por maestros en formación en tareas de divisibilidad. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds*.), Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 59-66). Granada, Editorial Comares.

Ponce, J. C. (2013). Isaac Barrow y su versión geométrica del Teorema Fundamental del Cálculo. *Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 83 123-130.

Sanabria, G. (2012). Del álgebra al cálculo: ¿transición o ruptura? Notas para una reflexión epistemológica y didáctica. En A. Molina, et al. (Eds.), *Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático* (pp. 13-42). *Universidad Distrital Francisco José de Caldas*. Colombia, ISBN: 978-958-8782-21-8.

Sanabria, G. (2013). Dificultades detectadas al pasar del álgebra al cálculo en educación matemática. *Revista Infancias Imágenes* 12*(1)*, 44-50*.*

Secretaría de Educación Pública. (2017). Aprendizajes Clave para la Educación Integral. SEP – México, 419 pp.

Zazkis, R. y Campbell, S. (1996). Prime Decomposition: Understanding Uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 207-218.