

EL APRENDIZAJE GEOMÉTRICO EN LA ELABORACIÓN DE SIMULADORES CON GEOGEBRA. EL CASO DE ELWIN

THE GEOMETRIC LEARNING IN THE ELABORATION OF SIMULATORS WITH GEOGEBRA: THE CASE OF ELWIN

Ivonne C. Sánchez, Juan Luis Prieto G.

Universidade Federal do Pará (Brasil), Universidad del Zulia (Venezuela)

ivonne.s.1812@gmail.com, juanl.prietog@gmail.com

Resumen

La elaboración de simuladores con geogebra (esg) es una actividad que comprende la producción de dibujos dinámicos de determinadas realidades. durante la esg los alumnos usan distintas herramientas de construcción del geogebra para resolver un conjunto de tareas de construcción, empleando técnicas cuyos razonamientos asociados revelan el modo en que los jóvenes llegan a conocer los objetos geométricos. desde la teoría de la objetivación, nos apoyamos en la noción de aprendizaje para describir la manera en que un alumno y dos profesores reconocen el papel de los extremos de un semicírculo en la aplicación de la técnica de construcción empleada por el joven. aplicamos un análisis de contenido para identificar como el alumno se hizo consciente del papel que tenía los extremos del semicírculo en su técnica.

Palabras clave: aprendizaje, teoría de objetivación, técnicas de construcción, geogebra, semicírculo

Abstract

The elaboration of simulators with GeoGebra (ESG) is an activity that includes the production of dynamic drawings of certain realities. During the ESG the students use different construction tools of the GeoGebra to solve a set of construction tasks, using techniques whose associated reasoning reveals the way in which young people get to know the geometric objects. From the Theory of Objectification, we rely on the notion of learning to describe the way in which a student and two teachers recognize the role of the ends of a semicircle in the application of the construction technique used by the student. We apply a content analysis to identify how the student became aware of the role of the ends of the semicircle in his technique

Key words: learning, theory of objectification, construction techniques, geogebra, semicircle

■ Introducción

El aprendizaje matemático es un fenómeno educativo cuya caracterización depende de la perspectiva teórica con la que decida ser analizado. Una perspectiva teórica que ha tenido gran influencia en el modo de entender el aprendizaje matemático desde finales del siglo pasado es el *constructivismo* en sus distintas formas: radical, moderado o social (Lerman, 1992). Inspirados en Piaget, los constructivistas asumen al individuo como “el elemento central de la construcción de sentido” (Lerman, 1992, p. 133), dejando de lado los aspectos sociales, culturales e históricos que caracterizan al aprendizaje humano.

Desde sus inicios en los años 80, el constructivismo ha sido considerado por muchos como el “método idóneo” para la mediación del aprendizaje matemático en el aula. Sin embargo, Radford (2018) afirma que esta perspectiva se corresponde con una teoría individualista del aprendizaje, ya que en sus principios se considera al individuo como constructor del saber a través de su propia experiencia. Desde esta perspectiva, es “haciendo cosas” que el individuo llega a conocer, por lo cual, en esta teoría, se asumen como iguales la acción y el saber. Se sabe aquello y sólo aquello que resulta de la acción del alumno. De allí que, para los constructivistas, nadie puede construir un saber y transferirlo a otro.

Radford (2006; 2014) avanza un paso más ante la crítica que realiza al constructivismo y otras teorías, al proponer junto a su equipo de trabajo en la Universidad Laurentiana (Canada) la Teoría de Objetivación (TO) como una alternativa a las corrientes individualistas del aprendizaje. La TO tiene como idea fundamental que los individuos lleguen a conocer cuando trabajan conjuntamente en actividades sociales de producción de saberes y seres humanos (Radford, 2017), concibiendo al aprendizaje como procesos de *objetivación* y *subjetivación* que ocurren de forma simultánea y conjunta en la actividad. Como puede notarse, el concepto de actividad se convierte en la categoría conceptual más importante de la TO, al constituir el centro de su posicionamiento filosófico, epistemológico, antropológico y ontológico.

Una actividad que venimos analizando desde la TO en los últimos años es la elaboración de simuladores con GeoGebra (ESG) (Sánchez y Prieto, 2017). La ESG es una actividad educativa no convencional que reúne a profesores de matemática y a estudiantes de educación media con el fin de producir modelos computacionales de una diversidad de fenómenos reales elegidos por los jóvenes. Tales modelos son elaborados con el software GeoGebra y en su producción los alumnos deben formular, resolver y comunicar una serie de técnicas de construcción geométrica. De esta comunicación surge un aprendizaje geométrico que es materializado en la discusión de los pasos y acciones que componen a la técnica de construcción.

Hasta este momento no habíamos realizado algún estudio sobre el aprendizaje geométrico en un momento tan particular de la ESG como el de comunicación de una técnica. Por esta razón, dedicamos este trabajo a la caracterización del aprendizaje geométrico que se produce en una situación de comunicación de una técnica de construcción de un semicírculo con GeoGebra. Nuestra intención es contribuir con información que sea de provecho para aquellos profesores que ven en la ESG una oportunidad para la promoción del aprendizaje matemático.

■ Marco teórico

La TO es una teoría que se fundamenta en una perspectiva histórico-cultural del aprendizaje matemático (Radford, 2006; 2014; 2018). Esta teoría conceptualiza el aprendizaje como “el encuentro con el saber y su transformación subjetiva en algo que aparece a la conciencia” (Radford, 2017, p. 120). Dentro de la TO, el nombre que recibe tal proceso de toma de conciencia es *objetivación*, de manera que aprender llega a entenderse como un proceso social (no individual) de toma de conciencia progresiva y crítica acerca de ciertas formas codificadas de acción y reflexión que comprenden el saber histórico de una cultura. Por conciencia se entiende aquella forma específicamente humana de reflexionar sobre la realidad concreta y de posicionarse en ella (Radford, 2017).

Como se dijo anteriormente, la TO coloca en el centro de sus planteamientos al concepto de *actividad*, entendida como “un evento creado por una búsqueda común [...] que es, al mismo tiempo cognitiva, emocional y ética.” (Radford, 2017, p. 125). Es mediante la actividad que los estudiantes llegan a hacerse progresivamente conscientes de las formas históricamente codificadas de pensar y actuar matemáticamente, las cuales determinan el saber matemático escolar. En el caso de la geometría, la construcción de figuras geométricas con software de geometría dinámica es una actividad con el potencial de hacer que profesores y alumnos tomen conciencia del saber geométrico encarnado en las herramientas que nos ofrece la tecnología, como producto de la evolución del conocimiento matemático desde los tiempos de Euclides hasta la actualidad.

A su vez, la ESG es una actividad no convencional que propicia un espacio de trabajo particular con las construcciones geométricas por medio del uso del GeoGebra. Tales construcciones son el medio directo de producción de dibujos dinámicos que recrean en la pantalla aquellas formas y movimientos característicos de determinados fenómenos de la realidad. Por *dibujo dinámico* se entiende aquel dibujo creado con un software de geometría dinámica que “[...] conserve ciertas propiedades espaciales impuestas cuando se desplace por uno de los puntos básicos del dibujo.” (Laborde, 1997, p. 42). En el contexto de la ESG, la construcción de un dibujo dinámico implica el reconocer las propiedades espaciales del fenómeno (relacionadas con sus formas y movimientos), que luego son traducidas en términos geométricos.

El trabajo matemático que surge alrededor de la producción de un dibujo dinámico en la ESG se caracteriza por el paso de un modelo matemático (el diagrama geométrico representativo de la realidad que se quiere simular) a un modelo computacional, mediante la formulación y resolución de unas *tareas de construcción* (Sánchez y Prieto, 2017). En este proceso, los jóvenes establecen procedimientos de construcción geométrica, que llamamos *técnicas* (Sánchez y Prieto, 2017), las cuales son ejecutadas a través de las herramientas de construcción, medida y otras funcionalidades dinámicas del GeoGebra (Castillo y Prieto, 2018). Las técnicas de construcción están compuestas por *pasos y acciones* que, en su conjunto, actualizan una forma culturalmente codificada de construir con el software la figura geométrica correspondiente a la tarea.

En principio, el empleo de una técnica de construcción puede estar basada en información proveniente de aquella herramienta del GeoGebra con la que se desea construir la figura (Prieto y Ortiz, en prensa). Por ejemplo, si se desea construir un rectángulo con GeoGebra, la herramienta *Polígono* sugiere al usuario una forma de construcción de la figura en la que se debe comunicar los vértices al programa. En este sentido, las herramientas del GeoGebra juegan un papel fundamental en la producción y empleo de una técnica para resolver una determinada tarea de construcción. Sin embargo, el hecho de que un estudiante haya aplicado una cierta técnica de construcción para producir un dibujo dinámico geométricamente consistente no significa que el joven tenga conciencia del saber geométrico encarnado en las herramientas usadas en su construcción.

En este contexto, la *comunicación de la técnica* puede ser el modo particular en que los profesores del club GeoGebra se aseguran de que los estudiantes aprendan la geometría detrás de la formulación y empleo de una técnica de construcción. En esta actividad, los estudiantes deben argumentar, debatir y explicar los pasos y acciones que componen a la técnica apoyando sus ideas en las herramientas del GeoGebra y en teoría geométrica. Para Llinares y Valls (2011), la comunicación de la resolución de un problema matemático (en nuestro caso, de una técnica de construcción) es una componente fundamental del aprendizaje matemático y una capacidad que se apoya en las reflexiones de los individuos sobre el significado de lo hecho para llegar a la solución.

Los significados matemáticos escolares que surgen de la actividad de comunicación de una técnica de construcción con GeoGebra pueden expresarse simultáneamente por medio del cuerpo (p. ej., usando la percepción, acciones kinestésicas, gestos), de signos (p. ej., a través de palabras escritas u orales, notación geométrica, diagramas) y de artefactos culturales (p. ej., lápiz y papel, pizarra, software GeoGebra) disponibles en la actividad (Arzarello, Paola, Robutti y Sabena, 2009; Radford, 2011). De esta manera, los significados geométricos compartidos que surgen en la ESG son el producto de las reflexiones en y con diferentes recursos semióticos que los alumnos movilizan para

justificar los pasos y acciones de la técnica que ellos han empleado. En conclusión, podemos decir que la comunicación y el aprendizaje están estrechamente vinculados, mutuamente constituidos y se definen recíprocamente en la producción de significados.

■ Metodología

La metodología implementada en este trabajo es de tipo cualitativa, correspondiente a la de una investigación descriptiva e interpretativa. Según Bogdan y Biklen (1994), algunas características de las investigaciones cualitativas son: (i) los datos provienen directamente del ambiente natural, (ii) los investigadores están preocupados más por los procesos que por los productos, y (iii) los resultados tienen una fuerte componente descriptiva.

Participantes y contexto

En la investigación participaron dos profesores de matemática y un estudiante de educación media, quienes formaban parte de una discusión sobre los pasos y acciones que conforman la técnica de construcción de un semicírculo con GeoGebra. Estos sujetos formaban parte del proyecto “Club GeoGebra para la Diversidad” en el año escolar 2015-2016, siendo que los dos profesores (a quienes llamaremos P1 y P2) eran “promotores” de los clubes y el estudiante cursaba cuarto año en una institución escolar pública localizada en el municipio San Rafael del Mojan, en Venezuela. El encuentro entre los participantes se llevó a cabo en junio de 2016, y tuvo por objetivo conocer el trabajo de simulación realizado por el joven en miras a su presentación en el II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia (Prieto y Gutiérrez, 2016), realizado en Maracaibo días después de la reunión.

Durante esta reunión, el estudiante (a quien llamaremos Elwin) explicó a los profesores las tareas de construcción y las técnicas utilizadas para obtener el dibujo dinámico correspondiente a una parte del mecanismo de Klann (Fig. 1a).

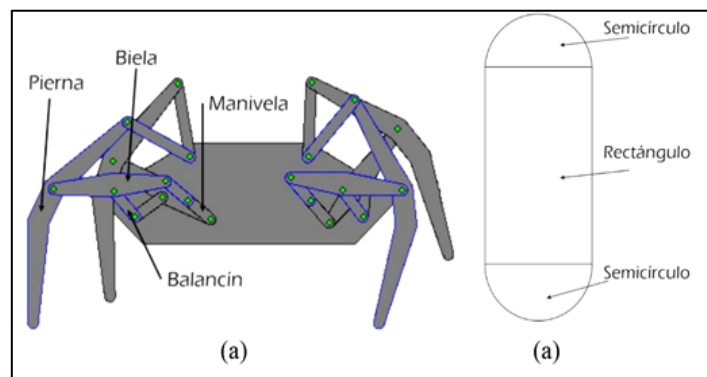


Figura 1. Imagen del mecanismo de Klann y boceto de la pieza seleccionada por Elwin
Fuente: Villalobos, 2016

Esta dinámica de trabajo con el joven generó una discusión en torno a la comunicación de la técnica que no fue lineal, sino más bien se produjo como un diálogo de ideas argumentadas sobre las acciones realizadas para ejecutar la técnica con GeoGebra. La parte del mecanismo en cuestión corresponde al primer balancín, cuya representación con el software implicó la formulación y resolución de tres tareas de construcción referidas a ciertas figuras geométricas (Fig. 1b). De estas tareas, en la investigación analizamos los procesos de objetivación en torno a la comunicación de la *construcción de un semicírculo a partir de un punto exterior*.

Recolección de la información

Los datos del estudio provienen de la discusión generada entre los dos profesores y el estudiante con respecto al contenido de la comunicación de la técnica de construcción. Esta discusión fue grabada en formato de video mediante una cámara digital, de manera que en el registro de la discusión se pudieran apreciar las expresiones, gestos y artefactos simbólicos y materiales utilizados por los participantes durante la actividad de comunicación de ideas. En el video, centramos la atención particularmente en una discusión suscitada sobre los extremos del diámetro del semicírculo.

Análisis de los datos

En correspondencia con nuestro marco teórico, para investigar el desarrollo del aprendizaje geométrico producido en el momento en que Elwin y los profesores discuten sobre los pasos de la técnica, realizamos un *análisis multisemiótico*. Este tipo de análisis consiste en identificar y describir una variedad de modos y recursos semióticos utilizados por los individuos para significar, y que confluyen en un mismo evento comunicativo (Manghi, 2011). El video capturado durante la actividad fue transcrito en su totalidad, para ello utilizamos un instrumento similar al mostrado en cuadro 1.

No. Línea	Contenido de la transcripción	Comentarios interpretativos

Cuadro 1. Instrumento para la transcripción de los episodios

Luego de la transcripción del video, identificamos aquellos *episodios destacados* (Radford, 2015) que ponen de manifiesto la objetivación producida en ese momento. Para cada segmento destacado, realizamos un microanálisis de grano fino y cuadro por cuadro para identificar así los modos (el habla, dibujo y gestos) y los medios (la interacción cara a cara y lápiz y papel) que el estudiante y los profesores pusieron en juego durante la objetivación de la técnica referida al semicírculo. Específicamente, centraremos la atención en los medios y modos que utilizaron para dar significado a la construcción del semicírculo a partir de la determinación de sus extremos.

■ Resultados

El análisis de los datos da cuenta del proceso de objetivación del proceso de construcción de un semicírculo a partir de la comunicación de la técnica empleada por Elwin. Específicamente, se revela el reconocimiento de los extremos del semicírculo como los elementos característicos de la construcción de este objeto geométrico con el medio tecnológico.

La técnica empleada por el joven presenta dos aspectos importantes. Por un lado, este procedimiento estuvo guiado por la herramienta del GeoGebra que permite dibujar el contorno de la figura: *Semicircunferencia*. La demanda de uso de esta herramienta por el GeoGebra responde a una conceptualización de la semicircunferencia desde la teoría geométrica que guio el diseño del software por equipo de desarrolladores del Instituto GeoGebra Internacional, entre los que se encuentran matemáticos de carrera. En este caso, la herramienta seleccionada por Elwin para dibujar el semicírculo le demandó la localización de *extremos de su diámetro*, elementos característicos de la semicircunferencia como un objeto geométrico.

Por otro lado, la técnica de construcción de Elwin fue particularmente producida por el joven en una dinámica de reflexión dialógica entre el modelo geométrico y el dibujo dinámico obtenido. Con esto queremos decir que el procedimiento de construcción comunicado en la reunión fue único, por lo tanto, se espera que otros estudiantes enfrentados a la misma situación de Elwin produzcan técnicas diferentes en algún aspecto, que cambian entre sí de acuerdo al contexto y las capacidades de los estudiantes. La técnica presentada por Elwin a los profesores consta de tres pasos y diversas acciones para cada paso, tal como se describe a continuación (Cuadro 2).

Vídeo No. 1: 00:00 – 12:35 / Líneas: 1-116

Paso 1: Determinar los extremos del semicírculo

- 1.1 Se trazó una recta **a** perpendicular a *eje y* que pasa por el punto **A**.
- 1.2 Se rotó la recta **a** con respecto al punto **A**, un ángulo de **33°** y sentido anti horario, generando así la recta **a'**.
- 1.3 Se trazó una circunferencia **d** con centro en el punto **A** y radio igual al *patrón de medida*.
- 1.4 Se interceptó la recta **a'** con la circunferencia **d**, generando así el punto **B**.
- 1.5 Se trazó una recta **b** perpendicular a *eje x* que pasara por el punto **B**.
- 1.6 Se rotó la recta **b** con respecto al punto **B**, un ángulo de **33°** y sentido anti horario, generando así la recta **b'**.
- 1.7 Se creó un deslizador de ángulo α , con valores mínimo y máximo de **0°** y **66°**, respectivamente, e incremento de **1°**.
- 1.8 Se rotó la recta **b'** con respecto al punto **B**, un ángulo α y sentido horario, generando así la recta **b''**.
- 1.9 Se ha trazado una recta **m**, perpendicular a **b''** por el punto **B**.
- 1.10 Se ha construido una circunferencia **e** con centro en **B** y radio **0.052 * Patrón**.
- 1.11 Se ha interceptado la circunferencia **e** con la recta **m**, generando los puntos **C** y **D** que son los extremos del semicírculo.

Paso 2: Aplicar la herramienta de semicircunferencia

- 2.1 Se ha dibujado la semicircunferencia **f** de extremos **C** y **D**.

Paso 3: Modificar la opacidad de la semicircunferencia

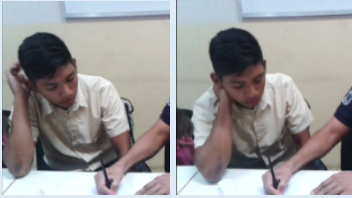
- 3.1. Se ha modificado la opacidad de la semicircunferencia **f** para destacar su superficie.

Cuadro 2. Técnica de construcción del semicírculo empleada por Elwin

La comunicación de la técnica por parte de Elwin comienza con la explicación de las acciones 1.1 hasta la 1.4 del paso, como se indica en el cuadro anterior. En su discurso de la acción 1.1, el joven omite un elemento indispensable para referirse a la rotación que fue sometida la recta que dibujo en el papel (recta **a**), este es, el objeto a rotar. Esta omisión es detectada por P1, el cual comunica a través del habla, articulando su discurso con el uso de gestos (el dedo índice para señalar) que buscan que el joven reconozca los elementos necesarios para aplicar la herramienta (centro de rotación y objeto a rotar). A partir de este momento, se produce una discusión con la que se busca hacer consciente a Elwin de la necesidad de precisar el objeto a rotar y el ángulo de rotación si se quiere referir con propiedad de la rotación en la acción 1.2. Solo así podría avanzar en su explicación hacia el trazado de la circunferencia (acción 1.3) y su intersección con la recta **a'**, de manera que se obtenga el centro de la semicircunferencia (acción 1.4).

En nuestro análisis, identificamos que la explicación de Elwin sobre las acciones 1.1 a la 1.4 tendría sentido únicamente si el estudiante es capaz de conectar esas acciones que el menciona con los elementos que requiere el software para construir la semicircunferencia, es decir, los extremos del diámetro. El hecho de que el joven no hiciera esta conexión entre las acciones y la herramienta *Semicircunferencia* representa un problema, ya que se


observa que el joven no tiene conciencia de la importancia de los extremos de la semicircunferencia para el empleo de su técnica. Este problema es identificado por los profesores, quienes lo ponen de manifiesto por medio de una serie de preguntas dirigidas a Elwin, muchas de ellas apoyadas en dibujos y gestos (Cuadro 3).

Línea	Contenido de la transcripción
1	<p>P1: ¿Cuáles son los extremos? Me imagino que aquí son este punto y este punto [dibuja dos puntos en el papel]. ¿No tienes ninguno de los dos? [dirige su pregunta a E].</p> <div style="text-align: center;">  </div>
2	<p>Elwin: [mueve la cabeza en señal de negación] No.</p>
3	<p>P1: Los tienes que determinar [se refiere a los extremos de la semicircunferencia]. Si yo tuviera los extremos, usando la herramienta [del GeoGebra] semicircunferencia, los selecciono y yo la determino, no necesito más nada. Entonces fijate [se refiere a E] todo lo que estas explicando y todavía no tienes un extremo, solo tienes el centro de la semicircunferencia.</p>
4	<p>P2: Exacto. P1 y yo estamos esperando que nos digas que estas construcciones [se refiere a las descritas anteriormente] ayudaron para determinar estos puntos [se refiere a los extremos]. Pero de momento no es así.</p>

Cuadro 3. Manifestación del problema

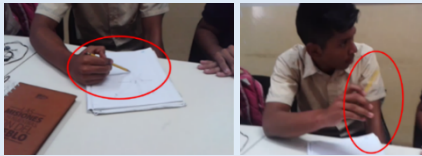

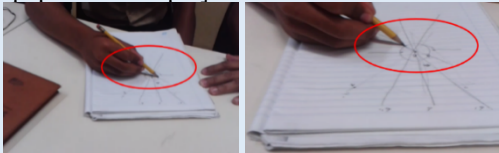
P1 y P2 realizan un esfuerzo por hacer que Elwin reconociera la importancia de haber determinado los extremos de la semicircunferencia para avanzar en la técnica. En este sentido, P2 le recuerda al joven qué elementos requiere el GeoGebra para utilizar la herramienta *Semicircunferencia* (ver línea 5 y 6 del Cuadro 4). Seguidamente, P1 le propone a Elwin una acción a seguir para determinar los extremos de la semicircunferencia. Sin embargo, en ese momento el estudiante muestra una *posición crítica* frente a esta manera de proceder del profesor, evitando así que le fuera impuesta alguna acción que conllevara a la modificación de su técnica. Posteriormente el joven procede a explicar esta parte de su técnica al profesor (Cuadro 4).

Línea	Contenido de la transcripción
5	<p>P2: ¿Porque la herramienta que pide? La herramienta de semicircunferencia pide dos extremos. ¿Si estas entendiendo? [dirige su pregunta a E].</p>
6	<p>A: los extremos de la semicircunferencia .</p>

7	P1: Bueno tú [se refiere a E] dices que es una recta. Pero es ésta [mueve el lápiz de izquierda a derecha en señal de la recta dibujada].	
8	P2: ¿No fue esa [recta] verdad? [dirige su pregunta a E].	
9	A: [Mueve su cabeza en señal de negación] no.	
10	P1: ¿No? ¿Cuál fue entonces? [dirige su pregunta a E]	

Cuadro 4. Reconocimiento del problema por parte de Elwin

A partir del reconocimiento del problema en su explicación, Elwin retoma nuevamente la explicación de las acciones de su técnica, esta vez destacando los extremos de la semicircunferencia. Durante la discusión, P1 y P2 participaban para hacer énfasis en las acciones y como debían ser explicadas de manera correcta (Cuadro 5).

Línea	Contenido de la transcripción	
14	A: Esta recta [señalando la recta con su lápiz], yo decidí que tenía un ángulo de 33° [se refiere al ángulo de rotación] que se movía [indica el movimiento con el lápiz en su mano de derecha a izquierda], entonces, la rote [se refiere a la recta] a 33° en sentido anti horario.	
	...	
15	A: Rote b' con...	
16	P1: El ángulo alfa del deslizador que estaba entre 0° y 66° ... P1: Trazando una recta perpendicular a la [recta] b_2' [señala la recta con el dedo índice].	
17	E: Corte la recta perpendicular con la circunferencia para que me diera los dos extremos de semicírculo [dibuja los dos puntos sobre el papel con el lápiz].	

Cuadro 5. Acciones realizadas por el estudiante para determinar los extremos de la semicircunferencia

■ Conclusiones

Este trabajo se ha apoyado en una perspectiva histórico-cultural del aprendizaje matemático para caracterizar el aprendizaje geométrico en relación a la construcción de un semicírculo con GeoGebra. A través de un análisis multimodal buscamos dar cuenta del reconocimiento de los extremos del semicírculo como los elementos característicos de la construcción de este objeto geométrico en la interfaz del GeoGebra. Para ello, utilizamos una conceptualización del aprendizaje geométrico en correspondencia con la Teoría de Objetivación, de manera que se pudieran analizar las discusiones de un estudiante y dos profesores involucrados en la actividad de comunicación de una técnica de construcción. El análisis de los datos permitió detectar segmentos destacados que dieron cuenta de la manera en que los profesores, apoyados en una variedad de medios semióticos de objetivación, ayudaron a que el estudiante fuera consciente de la importancia de determinar los extremos del semicírculo.

Los resultados mostraron, en primer lugar, que Elwin no era capaz de reconocer los elementos necesarios para aplicar una rotación en la vista gráfica del GeoGebra. Esto se ve reflejado en el discurso del joven al omitir tales elementos en su explicación de la técnica. En segundo lugar, se manifiesta la falta de consciencia del estudiante sobre la conexión que existe sobre las primeras acciones con los elementos que requería la herramienta para ser utilizada. Es decir, en un momento de la discusión Elwin no parece dar importancia a la localización de los extremos de la semicircunferencia y menos aún al hecho de que las acciones de su técnica debían responder a lo requerido por la herramienta.

Luego de las discusiones con los profesores, el joven asume una posición crítica sobre cómo debía llevar a cabo su explicación de ahora en adelante, basándose en las acciones que él realizó y no en aquellas que le fueran impuestas por los profesores. En este sentido, vemos necesario que los profesores que guíen los procesos de construcción en la elaboración de simuladores con GeoGebra proporcionen oportunidades para que los alumnos reflexionen con ellos y entre sí sobre la producción de saberes geométricos que den sentido a las técnicas. Pero también se requiere del respeto necesario hacia las ideas de los estudiantes al expresar los pasos y acciones de sus técnicas de construcción.

■ Referencias bibliográficas

- Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O. y Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 97-109.
- Bogdan, R. y Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Portugal: Porto.
- Castillo, L. A. y Prieto, J. L. (2018). El Uso de Comandos y Guiones en la Elaboración de Simuladores con GeoGebra. *UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 52, 250-262.
- Gutiérrez, R., Prieto, J. L. y Ortiz, J. (2017). Matematización y trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Educacion Matematica*, 29(2), pp. 37-68.
- Manghi, D. M. (2011). La perspectiva multimodal sobre la comunicación: desafíos y aportes para la enseñanza en el aula. *Diálogos educativos*, 22, 3-14.
- Laborde, C. (1997). Cabri Geómetra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig (Eds.), *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática* (pp. 33-48), Madrid: Una empresa docente.
- Lerman, S. (1992) The function of language in radical constructivism: A Vygotskian perspective. En W. GEESLIN y K. GRAHAM (Eds.), *Proceedings of 16th conference of international group for the psychology of mathematics education 2* (pp. 40-47), New Hampshire: PME.
- Llinares, S. y Valls, J. (2011). Aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En J.M. Goñi (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas*, 12(2) (pp. 137-165). Barcelona: Editorial Graó.

- Prieto, J. L. y Gutiérrez, R. E. (2016). (comps.). *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. Maracaibo: Aprender en Red.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, Número especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático, 103–129.
- Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz. (Eds), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Volume 4* (pp. 17-24). Ankara, Turkey: PME.
- Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación [On the theory of objectification]. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132–150.
- Radford, L. (2015). Methodological aspects of the theory of objectification. *Perspectivas da Educação Matemática* 8(18), 547-567.
- Radford, L. (2017). Ser, subjetividad y alienación. En B. D' Amore y L. Radford. (Eds), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y culturales* (pp. 139–165). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Radford, L. (2018). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la Teoría de la Objetivación. *PNA*, 12(2), 61-80.
- Sánchez, I. y Prieto J. L. (2017). Características de las prácticas matemáticas en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Números. Revista de Didácticas de las Matemáticas*, 96, 97–101.
- Villalobos, E. (2016) La geometría en los balancines del mecanismo de Klann. En J. L. Prieto y R. Gutiérrez (Comps), *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 249–257). Venezuela: A. C. Aprender en Red.