

AS CONCEPÇÕES DE DERIVADA PRESENTES NA IMAGEM DE CONCEITO DE ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

THE DERIVATIVE CONCEPTIONS PRESENT IN THE IMAGE OF THE CONCEPT OF MATHEMATICS DEGREE STUDENTS

Roberto Seidi Imafuku, Rosana Nogueira de Lima, William Vieira
Instituto Federal de São Paulo - Campus Guarulhos, Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
robertoseidi@yahoo.com.br, rosananlima@gmail.com, wvieira@ifsp.edu.br

Resumo

Apresentamos uma investigação sobre quais concepções de derivadas estavam presentes na imagem de conceito de catorze estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática, que já haviam estudado este conceito. Para o estudo, elaboramos e aplicamos um questionário à luz da teoria dos Três Mundos da Matemática, da imagem de conceito e das concepções de derivadas. Após as análises dos dados, verificamos a ausência de tais concepções nas imagens de conceito dos participantes, o que evidencia a necessidade de atividades que abordem as concepções de derivada e que permitam aos estudantes transitar pelos Três Mundos da Matemática.

Palavras-chave: conceitos de derivada, três mundos da matemática, imagem de conceito

Abstract

We present an investigation about which conceptions of derivatives were present in the concept image of fourteen students of a degree in Mathematics, who had already studied this concept. For this study, we elaborated and applied a questionnaire in light of the Three Worlds of Mathematics theory, concept image and derivative conceptions. After analyzing the data, we verified the absence of such conceptions in the concept images of the participants, which shows the need for activities that approach the concepts of derivative and that allow students to transit through the Three Worlds of Mathematics.

Key words: derivative concepts, three worlds of mathematics, concept image

■ Introdução

O trabalho aqui apresentado é um estudo diagnóstico que faz parte de uma pesquisa sobre a aprendizagem do conceito de derivada para estudantes de Licenciatura em Matemática. Avaliamos, mais precisamente, as interpretações dadas pelos participantes da pesquisa para este conceito.

Após uma avaliação de pesquisas sobre os processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, constatamos que muitas têm apontando que os índices de reprovação e desistência nessa disciplina são altos (Alvarenga, Dorr & Vieira, 2016; Barufi, 1999; Dall'Anese, 2000; Pereira, 2009; Rezende, 2003; Staron, 2016). Esse problema da não aprovação nas disciplinas de Cálculo é alarmante e tem gerado preocupação de professores, que buscam alternativas para minimizar tal situação, e da sociedade dos educadores matemáticos em geral. Este quadro é o principal motivador de nossa investigação.

A Sociedade Brasileira de Educação Matemática, no boletim número 21 de 2013, enfatiza que o Cálculo Diferencial e Integral é a porta de entrada para a Matemática Superior na formação de um licenciando. De fato, nas disciplinas de Cálculo são estudados conceitos e ideias fundamentais à formação do futuro professor de Matemática, como os números reais, as funções, as aproximações, o cálculo de variações e as ideias de infinito. Destacam, também, a importância que o tratamento dado a problemas de cunho variacional num curso de Cálculo Diferencial e Integral são fundamentais para o futuro professor compreender o tratamento diferenciado que problemas dessa natureza devem receber nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, em que frequentam estudantes de 11 a 17 anos. Também nos inquietaram discussões, em nossas aulas, sobre a relação entre o gráfico de uma função e o de sua respectiva derivada, nas quais pudemos perceber que muitos estudantes não reconheciam a derivada como o limite da taxa de variação de uma função na vizinhança de um ponto.

Tendo em vista a importância do pleno desenvolvimento desses temas, entendemos que “(...) o conceito de derivada é fundamental na Matemática e sua compreensão tem implicações na resolução de problemas em níveis avançados” (Bisognin & Bisognin, 2011, p. 525) e que precisa ser discutido em profundidade em cursos de formação inicial de professores de Matemática, abordando os aspectos analíticos e gráficos desse conceito. Além disso, entendemos ser importante que o estudante de um curso de Licenciatura em Matemática entenda o conceito de derivada não apenas como um conjunto de regras sem significado, mas que compreenda as suas várias concepções: infinitesimal, simbólica, lógica, geométrica, taxa, aproximação e microscópica (Thurston, 1994).

Assim, com o objetivo de elaborar atividades de ensino que ajudassem estudantes a superar dificuldades na compreensão do significado de derivada e na relação entre o gráfico de uma função e o de sua derivada, selecionamos pesquisas que se debruçaram sobre esses temas. Nessa busca, encontramos trabalhos que investigaram os conhecimentos de estudantes sobre o conceito de derivada (Bisognin & Bisognin, 2011; Burns, 2014; Sánchez-Matamoros, García & Llinares, 2013), e que apontaram dificuldades dos participantes na compreensão desse conceito e no trabalho com a representação gráfica da derivada de uma função. Também encontramos trabalhos que propuseram sequências didáticas que visam favorecer a superação dessas dificuldades por parte dos estudantes (González & Dolores, 2016), e outros que abordam as múltiplas representações do conceito de derivada e as Concepções de Thurston (Mação, 2014).

Baseados nessas pesquisas e nas inquietações destacadas, estabelecemos como o objetivo de nossa investigação, verificar quais concepções de derivadas estavam presentes na imagem de conceito de estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática que já haviam estudado este conceito.

■ Referencial teórico

A abordagem de um novo conceito não deve se dar apenas por sua definição formal, mas também possibilitar seu reconhecimento em situações reais e sua utilização em contextos apropriados, uma vez que, segundo Tall e Vinner (1981), devemos distinguir entre os conceitos matemáticos definidos formalmente e os processos cognitivos pelos quais estes são desenvolvidos. Esse processo requer um conjunto de ideias sobre esse novo conceito, para que se possa formar a imagem de conceito, que estes pesquisadores definem como

a estrutura cognitiva total associada a um conceito, que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo dos anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece (Tall & Vinner, 1981, p. 152, tradução nossa).

(Vinner, 1992) diz que “(...) a imagem de conceito é algo não-verbal associado em nossa mente ao nome do conceito” (Vinner, 1992, p. 68), e pode ser também um conjunto de impressões ou experiências adquiridas pelo sujeito, ou mesmo ser composta por uma representação visual do conceito, caso este tenha representações visuais.

A imagem de conceito de derivada de um indivíduo, por exemplo, pode ter elementos como formas de representação (algébrica, gráfica, tabelas), propriedades (derivada da soma, derivada do produto) e elementos da definição (limite da razão incremental).

Segundo Tall e Vinner (1981), a imagem de conceito não precisa ser coerente o tempo todo, pois, dependendo do estímulo que é dado, um indivíduo pode ativar diferentes partes dessa imagem, desenvolvendo-a de forma a não constituir um todo coerente. Por exemplo, no estudo das derivadas, os estudantes podem ter na imagem de conceito apenas as técnicas de derivação, sem que elas estejam ligadas às concepções de derivada, ou podem não entender a derivada como a inclinação da reta tangente à uma curva em um ponto.

Ao nos depararmos com uma situação em que temos que resolver um problema que envolve um conceito matemático, precisamos ativar uma parte de nossa imagem de conceito associada a esse objeto matemático. A essa parte ativada da imagem de conceito, Tall e Vinner (1981) chamam de imagem de conceito evocada.

Quando a imagem de conceito tem poucos elementos relacionados ao conceito, esta precisa ser enriquecida e/ou modificada. De acordo com Tall e Vinner (1981), “[...] todos os atributos mentais associados a um conceito, sejam eles conscientes ou inconscientes, devem ser incluídos na imagem de conceito” (Tall & Vinner, 1981, p. 152). No caso do conceito de derivada, entendemos que um sujeito tem uma imagem de conceito rica se nela estão presentes as concepções infinitesimal, simbólica, lógica, geométrica, taxa, aproximação e microscópica, propostas por Thurston (1994).

No desenvolvimento de conhecimentos matemáticos em longo prazo, a evolução cognitiva é mais do que uma associação de novas ideias já presentes em uma estrutura de conhecimento fixa de um sujeito, mas uma reconstrução contínua das ideias por meio de reorganizações das conexões mentais entre os elementos da imagem de conceito referentes a um objeto matemático, para formar estruturas de conhecimentos cada vez mais sofisticadas (Tall, 2013). Tall (2013) acredita ainda que há três formas diferentes de conhecimento matemático. A primeira é a corporificada, que vem dos objetos e de suas propriedades, como os entes geométricos, que podem ser manipulados fisicamente e concebidos como objetos mentais; a segunda é a operacional simbólica, que tem origem na representação e na manipulação dos objetos matemáticos por meio dos símbolos, como uma representação algébrica; e a terceira é a formal axiomática, que tem características da matemática formal, composta por axiomas, definições e teoremas. Assim, o desenvolvimento do pensamento matemático se dá de três modos distintos e não disjuntos, e os diferentes

tipos de conceitos habitam estes que são os Três Mundos da Matemática, o conceitual corporificado, o operacional simbólico e o formal axiomático e que discutimos brevemente a seguir.

O Mundo Corporificado (ou conceitual corporificado) refere-se às percepções e ações humanas sobre objetos matemáticos, as quais desenvolvem imagens mentais que são verbalizadas de forma cada vez mais sofisticada e se tornam, em nossa imaginação, entidades mentais do objeto matemático. Um exemplo de abordagem da derivada no Mundo Corporificado é a busca da reta que fornece a melhor aproximação dos valores de uma função nas proximidades de um ponto, por meio do *zoom* em um software de geometria dinâmica, até que a reta “pareça” sobreposta à curva. Com essa abordagem, é possível verificar que a reta que fornece a melhor aproximação de uma curva nas proximidades de um ponto é a reta tangente à curva no ponto dado.

O Mundo Simbólico (ou operacional simbólico) trata da necessidade de efetuar ações sobre objetos do Mundo Corporificado. É nesse mundo que encontramos os símbolos matemáticos, que são utilizados para representar as ações pretendidas sobre objetos e/ou realizar cálculos matemáticos. Em algumas situações o estudo das derivadas é feito por meio do cálculo das derivadas de funções a partir de um conjunto de técnicas; estas são características do Mundo Simbólico.

O Mundo Formal (ou formal axiomático) diz respeito à construção do conhecimento formal por meio de sistemas axiomáticos, de acordo com a Teoria dos Conjuntos, isto é, por meio de axiomas, definições e teoremas, de forma que as propriedades de um objeto matemático são deduzidas a partir de demonstrações. No caso das derivadas, pode-se apresentar a definição de derivada em um ponto e, a partir dela, deduzir as regras de derivação.

No desenvolvimento das ideias matemáticas, Thurston (1994) ressalta que existem várias maneiras de se entender uma mesma ideia dentro da Matemática. Segundo este autor, a derivada é “[...] um exemplo que os matemáticos entendem de várias maneiras, mas que vemos nossos alunos com dificuldades” (Thurston, 1994, p. 3). Para corroborar essa perspectiva, Thurston (1994) destaca que há ao menos sete maneiras de se entender o conceito de derivada:

- (1) Infinitesimal: a razão da variação infinitesimal do valor da função para uma variação infinitesimal de variável.
- (2) Simbólica: a derivada de x^n é $n \cdot x^{n-1}$, a derivada de $\sin(x)$ é $\cos(x)$, a derivada de $f \circ g$ é $f' \circ g \cdot g'$, etc.
- (3) Lógica: $f'(x) = d$ se e somente se para cada ϵ existe um δ tal que quando $0 < |x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d \right| < \epsilon$.
- (4) Geométrica: a derivada é o coeficiente angular da tangente ao gráfico da função, isto se o gráfico tem uma tangente.
- (5) Taxa: a velocidade instantânea de $f(t)$ quando t é o tempo.
- (6) Aproximação: A derivada de uma função é a melhor aproximação linear para a função próximo a um ponto.
- (7) Microscópica: A derivada de uma função é o limite que se obtém olhando-a com microscópios cada vez mais poderosos (Thurston, 1994, p. 3).

No que segue, apresentamos os procedimentos envolvidos em nossa investigação.

■ Procedimentos metodológicos

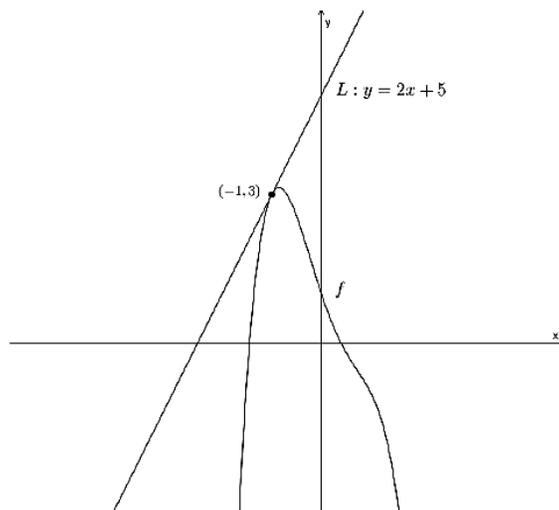
O Questionário elaborado para nossa investigação é composto de sete questões e foi aplicado para um grupo de quatorze estudantes de um Curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública de ensino do Estado de São Paulo. Todos eles assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido e são tratados por pseudônimos nas análises.

A realização do questionário ocorreu no campus onde os participantes estudam e teve duração de 1h30. Não foi permitido nenhum tipo de consulta e o pesquisador não ofereceu nenhum tipo de orientação adicional além das constantes nos enunciados das questões. Seguimos com a análise de uma das questões presentes em nosso Questionário.

■ Análises dos dados

Apresentamos a análise dos dados coletados com a aplicação da Questão 1 do Questionário, realizada à luz do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, das Concepções de Thurston e da imagem de conceito. Ao final, ainda com base em nossas considerações teóricas, apresentamos um resumo dos resultados obtidos com todas as questões. Nesta questão, procuramos avaliar a concepção geométrica de derivada dos participantes, isto é, verificar se entendem a derivada como a inclinação da reta tangente à função em um ponto dado.

Questão 1: Suponha que a reta L é tangente ao gráfico da função f no ponto $(-1, 3)$ como indicado na figura. Determine $f(-1)$ e $f'(-1)$.



Verificamos que apenas os participantes Theodoro e Zeldá têm a Concepção Geométrica de derivada presente em suas respectivas imagens de conceito, pois entendem a derivada como a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto.

No que diz respeito aos Três Mundos da Matemática, apenas o estudante Theodoro (Figura) apresenta, em sua resposta, características do Mundo Formal, relacionando a derivada à inclinação da reta tangente.

f' , ou derivada, de f define uma função que tem como resultado a inclinação da reta tangente à curva em determinado "x"
 • logo $f(-1,)=3$ pelo ponto $(-1,3) \in f$
 $f'(-1)=2$ pela inclinação de $y=2x+5$

Figura 1. Resposta de Theodoro para o cálculo de $f'(-1)$ na Questão 1
 Fonte: Arquivo pessoal

Alemão apresentou características do Mundo Simbólico ao aplicar as técnicas de derivação de uma função potência e de uma constante para derivar a equação da reta L. Com base nos registros apresentados, entendemos que o estudante interpretou a equação da reta como se fosse a lei de formação da função f , como podemos ver na Figura 2.

$y = 9x + 5 \Rightarrow$ derivada $y' = 9$, $f'(-1)$
 para $x = -1$ $y' = 9$

Figura 8. Resposta de Alemão para o Cálculo de $f'(-1)$ na Questão 1
 Fonte: Arquivo pessoal

Ao concluir, Alemão mostrou não ter a concepção Geométrica de derivada (ver Figura 3), pois interpretou que o coeficiente angular da reta tangente é a ordenada de um novo ponto da função f .

Por um para $f'(-1)$, tem o ponto $P(-1,9)$
 que não é uma reta tangente ao gráfico

Figura 9. Conclusão de Alemão para o cálculo de $f'(-1)$ da Questão 1
 Fonte: Arquivo pessoal

Assim como Alemão, outros participantes interpretaram a derivada de uma função como a reta tangente ao invés de interpretá-la como a inclinação da reta. Cremos que atividades que explorem as características corporificado-simbólicas, por meio do esboço gráfico desse tipo de situação, podem evitar essa confusão na interpretação da derivada, ou seja, entendendo-a como o coeficiente angular da reta tangente e não como a própria reta tangente.

Conforme destacamos acima, em relação aos Três Mundos da Matemática, verificamos que características do Mundo Formal relacionadas à Concepção Geométrica de derivada foram evocadas apenas por Theodoro. Também pudemos constatar que houve predominância de características simbólicas em relação às corporificadas nas respostas apresentadas pelos estudantes.

Na Tabela 1, apresentamos as concepções evocadas da imagem de conceito pelos participantes da pesquisa. Indicamos por SIM, se o participante evocou a concepção de derivada nas respostas apresentadas, e Não, nos casos em que as concepções não foram evocadas.

Tabela 1. Presença ou não das concepções de derivada na imagem de conceito de cada um dos participantes

	Reta tangente	Geométrica	Taxa	Simbólica	Infinitesimal	Lógica	Relação entre os gráficos
Alemão	Não	Não	Não	SIM	Não	Não	Não
Ana	Não	Não	SIM	Não	Não	Não	Não
Apple	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não
Dada	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não
Iceman	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não
Léia	Não	Não	Não	SIM	Não	Não	Não
Lili	SIM	Não	Não	SIM	Não	Não	SIM
Mara	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não
Mário	Não	Não	SIM	Não	Não	Não	Não
Mat001	Não	Não	Não	SIM	Não	Não	Não
Michael Corleone	Não	Não	Não	SIM	Não	Não	Não
Nelito	Não	Não	Não	SIM	Não	Não	Não
Theodoro	SIM	SIM	SIM	SIM	SIM	Não	SIM
Zelda	Não	SIM	SIM	SIM	Não	Não	SIM

Fonte: Arquivo pessoal

De maneira geral, verificamos que dois participantes apresentaram, em suas respectivas imagens de conceito, a concepção geométrica, três a concepção taxa e um a concepção infinitesimal, e que a concepção simbólica foi utilizada apenas como um conjunto de regras, e não como um conceito, que é o entendimento do uso dos símbolos como procedimento e como conceito, o que nos levou a concluir que os participantes não tinham a concepção simbólica. Nenhum deles apresentou a concepção lógica e que apenas dois relacionaram o gráfico de uma função ao gráfico da primeira derivada.

■ Considerações finais

Após as análises das respostas apresentadas pelos participantes, entendemos que a ausência das diferentes formas de entender o conceito de derivada e da relação gráfica entre uma função e sua derivada na imagem de conceito dos participantes evidencia a necessidade de abordagens que possibilitem ao estudante realizar uma jornada pelos Três Mundos da Matemática, em que características corporificadas e simbólicas sejam relacionadas às formais. Nesse sentido, acreditamos ser necessário um trabalho que envolva as várias formas de representação do conceito de derivada de uma função, para que os sujeitos possam utilizá-lo de forma articulada.

Nesse sentido, estamos de acordo com Sánchez-Matamoros, Garcia e Llinares (2013), que defendem que o desenvolvimento desse conceito está relacionado à forma com que os estudantes o constituem e na maneira como são capazes de relacionar as características de uma função às de sua derivada. Entendemos que esse tipo de trabalho e o uso articulado de várias concepções de derivada podem proporcionar uma imagem de conceito rica para os indivíduos.

■ Referências bibliográficas

- Alvarenga, K. B., Dorr, R. C., & Vieira, V. D. (out.- dez. de 2016). O ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial. *Revista Brasileira de Ensino*, 2(4), pp. 46-57.
- Barufi, M. C. (1999). *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação, São Paulo.
- Bisognin, E., & Bisognin, V. (2011). Análise do desempenho dos alunos em formação continuada sobre a interpretação gráfica das derivadas de uma função. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(3), pp. 509-526.
- Burns, A. (2014). *Calculus students' understanding of the derivative in relation to the vertex of a quadratic function*. Tese de Doutorado, Georgia State University, Georgia.
- Dall'Anese, C. (2000). *Conceito de derivada: uma proposta para seu ensino e aprendizagem*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- González, M. D., & Dolores, C. (2016). Diseño de una situación de aprendizaje para la comprensión de la derivada. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*(46), 49-70.
- Mação, D. P. (2014). *Uma proposta de ensino para o conceito de derivada*. Dissertação de Mestrado, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo.
- Pereira, V. M. (2009). *Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro.
- Rezende, W. M. (2003). *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação, São Paulo.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (julho de 2013). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 267-296.
- Sociedade Brasileira de Educação Matemática. (2013). *Sociedade Brasileira de Educação Matemática*. Acesso em 18 de maio de 2017, disponível em Sociedade Brasileira de Educação Matemática: <http://www.sbem.org.br/files/Boletim21.pdf>
- Staron, F. (2016). O monstro da reprovação em Cálculo Diferencial Integral. *Anais do 14º CONEX*, (pp. 1-7). Ponta Grossa.
- Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics* (1ª ed.). New York: Cambridge University Press.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. 3(12), pp. 151-169.
- Thurston, W. P. (abril de 1994). On the Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2), pp. 161-177.
- Vinner, S. (1992). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: D. Tall, *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-80). Dordrecht: Kluwer Academic Press.