

# ANÁLISIS DE CIRCULACIONES PARA EVALUAR EL DISEÑO DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PARA EL CONCEPTO DE FRACCIÓN

## CIRCULATION ANALYSIS FOR THE EVALUATION OF A TEACHING DESIGN ON THE CONCEPT OF FRACTION

Elizabeth Vásquez Tirado, César Fabián Romero Félix, Maricela Armenta Castro  
Universidad de Sonora. (México)  
ely.vasquez.tirado@gmail.com, cesar.romero@unison.mx, maricela@mat.uson.mx

### Resumen

Se presentan resultados preliminares de un proyecto de tesis de Maestría sobre el diseño, implementación y evaluación de actividades didácticas sobre significados de las fracciones para niños de sexto grado de primaria. El diseño de las actividades parte de la propuesta de *estructuras centrales* de Lamon (2007, 2012), centrándonos aquí en dos significados: medida y operador. Así mismo, las tres etapas del trabajo fueron guiadas por el modelo de Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016) y, en términos de las circulaciones observadas, presentamos el análisis de la implementación de las actividades y la valoración de éstas.

**Palabras clave:** fracciones, diseño de enseñanza, espacios de trabajo matemático, circulaciones

### Abstract

In this article we present preliminary results from a master's thesis project about the design, implementation and evaluation of teaching activities for certain meanings of fractions, aimed at elementary school students. The design of the teaching activities follows Lamon's proposed *central structures* (2007, 2012), focusing in two meanings: measure and operator. Likewise, the three stages of the project were guided by the model of Mathematical Working Spaces (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016) and, in terms of the observed *circulations*, we present the analysis of the implementation of the activities and their evaluations.

**Key words:** fractions, teaching design, mathematical working spaces, circulations

## ■ Introducción

En el sistema educativo mexicano, de manera similar a otros países, el concepto de fracción se plantea a lo largo de la educación obligatoria. En particular, al finalizar la primaria (12 años), se espera que los alumnos resuelvan problemas que impliquen leer, escribir, comparar, sumar, multiplicar o dividir números en representación fraccionaria y decimal; calculen porcentajes e identifiquen distintas formas de representación de las fracciones. Sin embargo, diversos resultados de investigación y las varias evaluaciones estandarizadas muestran deficiencias en el desempeño de los estudiantes para resolver tales problemas. Ante esta problemática, se desarrolló como proyecto de tesis de maestría el diseño, implementación y evaluación de una serie de actividades de enseñanza para apoyar a los estudiantes de sexto grado de primaria en el aprendizaje de algunos significados de fracción.

Para la etapa de diseño, nos apoyamos principalmente en la categorización de Lamon (2007, 2012) de *estructuras centrales del concepto de fracción*, ya que evaluamos que ésta permite un acercamiento compatible con los requerimientos del Sistema Educativo Mexicano. Llegamos a este supuesto tras analizar la descripción de las siete estructuras: *medida, cantidad y covariación, pensamiento relativo, planteamiento de unidades, reparto y comparación, razonamiento ascendente y descendente, interpretación de números racionales*; y los argumentos de Lamon sobre cómo “la comprensión de los niños que tuvieron enseñanza enfocada en todas las estructuras ‘aumentó’ de manera conjunta, y aunque no recibieron enseñanza específica en otras interpretaciones, al final de sexto grado, ellos usaban múltiples interpretaciones y se involucraron en razonamientos que no había observado previamente en niños de tan corta edad” (2012, p. 258).

De tal manera, la propuesta de enseñanza está conformada por una serie de actividades didácticas para favorecer la comprensión de la fracción como medida, como operador y como razón, en el sentido de Lamon (2012). Son el resultado de una fase de diseño, tanto de hojas de trabajo como de recursos de apoyo (material concreto y applets en GeoGebra), una fase de implementación y otra de análisis de estas.

Mostramos en este reporte la definición del método y los resultados del análisis de las actividades didácticas diseñadas para favorecer la comprensión de la fracción como medida y como operador. Para comprobar la eficacia de nuestros diseños, y de manera indirecta de la categorización de Lamon (2012), analizamos la puesta en escena de nuestras actividades a partir del modelo de Espacios de Trabajo Matemático, conocido por sus siglas *ETM* (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016).

## ■ Elementos teórico-conceptuales

Ya que el presente artículo se desprende del proyecto de tesis declarado arriba, los referentes teóricos incluyen la categorización de significados de fracción, usados principalmente para la etapa de diseño, y el modelo teórico de los espacios de trabajo matemático, utilizado para la etapa de análisis que describimos en las siguientes secciones.

Estructuras centrales del concepto de fracción

La fracción como *medida* es la medida asignada a un intervalo o región. En el caso de la recta numérica, la unidad es siempre un intervalo de longitud  $l$ , que cuando es partido en  $b$  subintervalos iguales, cada subintervalo es de longitud  $\frac{1}{b}$  (de  $l$ ), así que la fracción  $\frac{a}{b}$  representa  $a$  intervalos de longitud  $\frac{1}{b}$ . Como *operador* se trata de una función de un conjunto o región en otro conjunto o región, o bien, como un conjunto de instrucciones que conforman un proceso. Mientras que como *razón* es una relación de comparación entre dos cantidades cualesquiera, con características especiales (según Lamon, 2012).

Espacios de trabajo matemático – ETM

El modelo de los ETM está diseñado para funcionar como una herramienta en el estudio del trabajo matemático de profesores y estudiantes dentro de la clase de matemáticas. Sus autores describen este espacio abstracto como “una estructura organizada de manera que permite el análisis de la actividad matemática de individuos lidiando con problemas matemáticos” (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016, p. 1). Este modelo no propone directamente qué actividad realizar en la clase de matemáticas, sino que se enfoca en analizar el desarrollo de significados en los estudiantes, resaltando las relaciones entre la actividad realizada y el significado construido.

De tal manera, para analizar el trabajo de los estudiantes se plantea analizar la relación entre dos planos ideales, el epistemológico y el cognitivo, durante el desarrollo del trabajo matemático. El plano epistemológico se describe en relación con el contenido matemático del campo de estudio, mientras que el plano cognitivo es en relación con el pensamiento del individuo al resolver problemas. Así, como una metáfora geométrica, estos planos permiten concebir un “espacio abstracto como una estructura organizada de tal manera que permite el análisis de la actividad matemática de individuos que se enfrentan a problemas matemáticos” (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016, p. 5). se consideraron las componentes del ETM que permiten evaluar el diseño de las actividades didácticas según el desempeño de los estudiantes al intentar resolverlas.

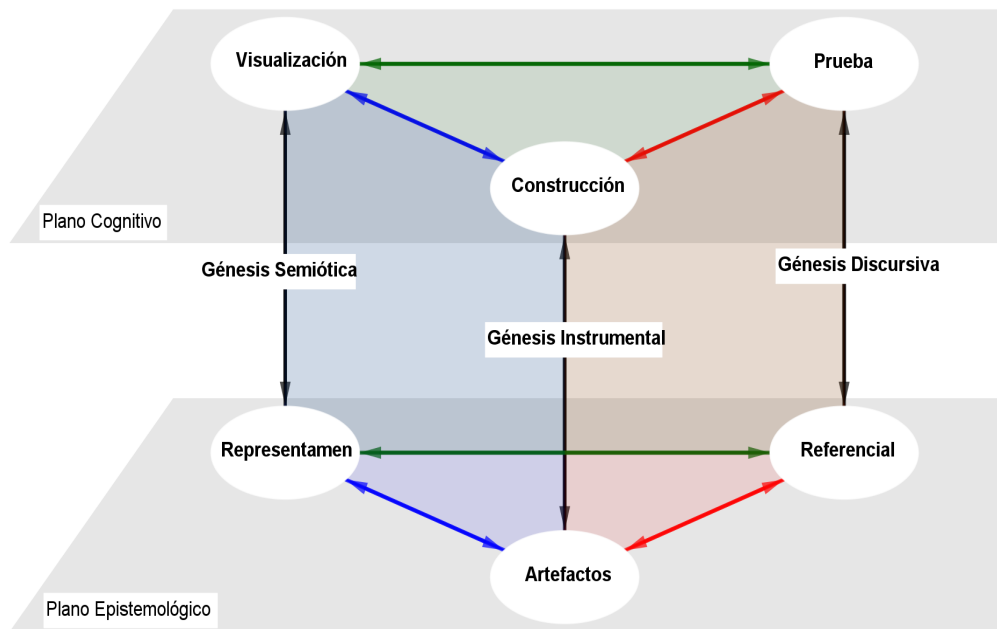


Figura 5. El espacio de trabajo matemático y sus génesis (Kuzniak & Richard, 2014, p. 9)

En el plano epistemológico, para analizar lo referente al contenido matemático, se encuentran tres elementos: signos, artefactos y la teoría matemática de referencia (etiquetados en la figura anterior como Representamen, Artefactos y Referencial).

Viendo a los signos en el sentido de Peirce, se analiza el conjunto de objetos concretos y tangibles que representan a otra cosa o al objeto mismo; “los signos podrán ser dibujos geométricos, símbolos algebraicos o gráficas, incluso fichas, maquetas o fotos” (Kuzniak & Richard, 2014 p. 8). En el presente trabajo el representamen está conformado por: lenguaje natural, diagramas, esquemas, expresión simbólica, expresión numérica, fracción común, fracción unitaria, significados de fracción: medida, operador, razón, cociente y parte-todo.

Los artefactos son aquellos que permiten al usuario manipular los objetos matemáticos (Montoya, Mena, Mena, 2014, p. 186). De acuerdo con Rabardel (según Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016) estos pueden ser de tipo material o simbólico, como compás, regla, calculadora, algoritmos, rutinas, herramientas, software. Algunos artefactos considerados para estas actividades son: material concreto, regla, algoritmo de la suma, multiplicación y herramientas digitales en este caso applets elaboradas en GeoGebra.

El elemento referencial está conformado por un conjunto de propiedades, definiciones, teoremas y axiomas que se refieren a la parte teórica del trabajo matemático, que da soporte al discurso deductivo de prueba. (Kuzniak, Tanguay, Elia, 2016, p. 5). En este caso, en el referencial encontramos relaciones de equivalencia, comparación de fracciones, inverso multiplicativo, densidad de los racionales, etc.

Por otro lado, el plano cognitivo está determinado por tres procesos mentales: visualización, construcción y prueba. Arcavi (2003, p. 217) define la visualización como:

La capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar, desarrollar ideas y avanzar a la comprensión.

La construcción está relacionada con las acciones generadas a partir del uso de herramientas, las acciones que no necesariamente resulten en producciones tangibles como dibujos o escritos, pero pueden incluir observación, exploración o incluso experimentación. Finalmente, la prueba que consiste en argumentaciones deductivas organizadas, afirmaciones que involucren definiciones, hipótesis, conjeturas, que se basa en el proceso discursivo y de validación a partir del referencial (Kuzniak, 2016).

El plano epistemológico y el cognitivo se vinculan a través de tres tipos de *génesis*: *semiótica*, *instrumental* y *discursiva*. La génesis semiótica está relacionada con signos de codificación e interpretación, que puede partir de un representamen y tomar una representación visual, o bien, iniciar en la mente desde el objeto para después ser evocado un signo. La génesis instrumental habilita a los artefactos para procesos de construcción que contribuyan al logro del trabajo matemático. Llamaremos herramienta a aquel artefacto con utilidad potencial para resolver la tarea propuesta. La génesis discursiva tiene como finalidad enlazar un discurso de prueba apoyado en las propiedades que conforman el referencial, en algunos casos el discurso puede estar basado mayormente en el instrumento y en otros en el representamen. De tal manera, el trabajo matemático se considera como el resultado de un proceso continuo de génesis que permiten que estos dos planos se articulen.

Siguiendo con la metáfora geométrica, al conectar los planos horizontales, las génesis generan planos verticales, cada uno resaltando un tipo de trabajo matemático (ver siguiente figura). El trabajo de *comunicación* se asocia a las génesis semiótica y discursiva (plano Sem-Dis), el de *razonamiento* (Ins-Dis) a las génesis instrumental y discursiva; y finalmente el de *descubrimiento* (Sem-Ins) con lo referente a las génesis semiótica e instrumental.

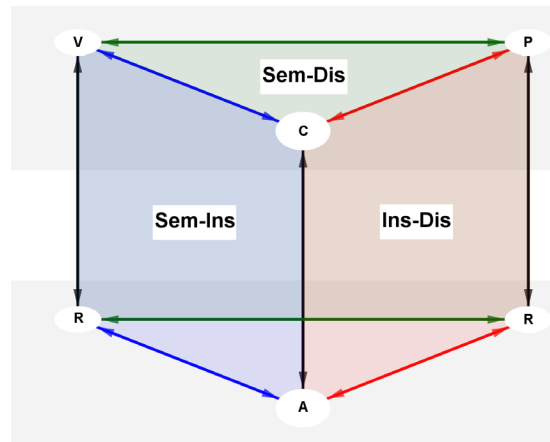


Figura 6. Los tres planos verticales del modelo ETM (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016, p. 7)

Finalmente, para valorar las actividades diseñadas consideramos el término *trabajo matemático completo* introducido por Kuzniak, Nechache y Drouhard (según Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016) que se cumple cuando:

- Existe una relación genuina entre los planos horizontales. Esto significa que los estudiantes son capaces de seleccionar una herramienta y utilizarla de manera apropiada como instrumento para resolver una tarea.
- Se presenta una diversidad entre las génesis y los planos verticales del modelo. (Herramientas, técnicas, propiedades y circulaciones por el modelo).

Tomando esto en cuenta, nos enfocamos en los componentes del ETM que nos permiten evaluar el diseño de las actividades didácticas según el desempeño de los estudiantes al intentar resolver problemas. Inicialmente, analizamos el contenido del plano epistemológico y posibles *ETM's idóneos*, vistos como los adecuados según la institución educativa involucrada y el conocimiento que quiere ser enseñado (Ver Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016, p. 9) para cada significado de fracción, y posteriormente, estudiamos las circulaciones mostradas por los estudiantes participantes; de manera semejante al análisis de *tareas emblemáticas* descritas en este marco (Kuzniak & Nechache, 2016).

### ■ Descripción del diseño de las actividades y análisis a priori

El contenido de las actividades sigue una evolución ideal del trabajo matemático en el ETM idóneo en tres etapas, favoreciendo el trabajo en cada plano vertical.

- *Exploración*: planteamiento de una problemática inicial, que pueden intentar resolver con sus conocimientos previos, pero que requieren el uso del significado específico para completar su solución.
- *Construcción*: familiarización con nuevas herramientas para la resolución de los problemas.
- *Validación*: resolver el problema inicial y un problema más general, incorporando el trabajo de las etapas previas.

Además, se favorecen transiciones entre trabajo individual, en equipo y discusión grupal, para el trabajo en el plano de la comunicación.

Antes de implementar las actividades diseñadas, se analizaron para evaluar el posible conocimiento favorecido y su relación con el currículo en términos de ETM's idóneos. En estos, se organizan los elementos propuestos por Lamón

(2012) en el plano epistemológico y se describe en cada etapa de las actividades las génesis y/o planos verticales que se espera favorecer. Por ejemplo, para la etapa del significado de medida, donde se desarrolla la técnica de partición sucesiva para medir segmentos se resaltaron los siguientes elementos:

| Actividad 1 Medida<br>Página 2   | ➤ Uso de GeoGebra | Actividad en equipo |
|--|-------------------|---------------------|
| <p style="text-align: center;">ETM Idóneo</p> <p>En esta actividad se hace uso de herramientas tecnológicas, específicamente el applet Act.M1 donde aparece un segmento de recta que tiene marcado un punto asociado a la posición de una tortuga. El applet solicita una fracción que indique la posición de la tortuga mediante la manipulación de los deslizadores n y m que hacen particiones en la recta, incluso es posible ingresar valores de respuesta sin utilizar los deslizadores. El applet incluye evaluación, esto permite al equipo saber que la fracción propuesta es una respuesta correcta.</p> <p>En esta actividad se espera activar la génesis semiótica e instrumental, favoreciendo el plano de descubrimiento, en el referencial tenemos la partición sucesiva que se espera sea parte de los artefactos disponibles para las siguientes actividades.</p> |                   |                     |

*Tabla 5* Ejemplo de ETM Idóneo

Al evaluar las actividades, a priori, se concluyó que sí se podrían favorecer las tres génesis de los planos verticales y se prosiguió con su implementación. Sin embargo, en retrospectiva se pudo identificar que algunas de las génesis no se favorecieron adecuadamente, describimos estas diferencias en la sección de análisis y resultados.

### ■ Metodología

Las actividades didácticas se implementaron en un grupo de sexto grado de primaria, 32 estudiantes de una escuela privada, dentro del horario escolar; cada niño contó con un juego completo materiales y las hojas de trabajo que se proporcionaban al inicio de cada sesión. Se formaron 8 equipos de 3 integrantes cada uno y 2 equipos de 4 integrantes cada uno. Se dispuso de una computadora para el uso de applets disponibles en la plataforma en línea de GeoGebra.

El trabajo matemático de los estudiantes es evaluado a partir de notas de observación tomadas durante las sesiones de clase por un observador participante y al finalizar la clase por la profesora de la clase, así como también de las respuestas dadas por los alumnos en las hojas de trabajo. El análisis se realizó en dos fases, considerando los elementos de Lamon (2012) que caracterizan a cada significado, primero se realizó una descripción del trabajo de los estudiantes en cada una de las actividades. En la segunda fase, considerando los elementos del plano epistemológico y del plano cognitivo de los ETM, se identificaron las circulaciones presentes al resolver las actividades y según la *completez* del trabajo matemático y la certeza de las soluciones a los problemas, se categorizaron casos de éxito, desempeño regular y fracaso.

### ■ Análisis y resultados

El análisis se realizó en dos fases, por un lado, considerando los elementos de Lamon (2012) que caracterizan a cada significado, primero se realizó una descripción del trabajo de los estudiantes en cada una de las actividades. Por otro lado, considerando los elementos del plano epistemológico y del plano cognitivo de los ETM, se

identificaron las circulaciones presentes al resolver las actividades, esta segunda fase es la que reportamos aquí. En ambas fases se clasificaron las respuestas de los estudiantes en niveles de desempeño bajo, regular y alto. Por ejemplo, en el análisis de *partición sucesiva*, elemento del significado de medida, observamos los siguientes niveles de trabajo matemático (A: bajo, B: medio, C: alto)

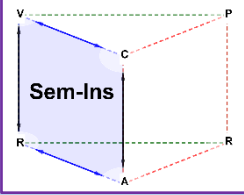
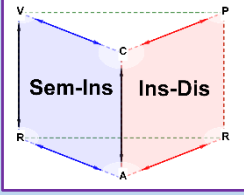
| Tarea  | Circulación  | Diagrama   |
|--|--|--|
| <p>Hoja 2<br/>Uso de GeoGebra<br/>Medición de segmentos por<br/>partición sucesiva</p> | <p>B. A partir del uso del applet (artefacto) algunos estudiantes manipulan los deslizadores para explorar y lograr proponer una fracción para la posición de la tortuga (instrumentación) activando la génesis instrumental al ser necesario utilizar los dos deslizadores porque en algunos casos un deslizador no es suficiente para proponer la fracción, entonces es necesario manipular el segundo deslizador para partir la partición inicial, además realizan un dibujo como una representación icónica de lo presentado en el applet activando la génesis semiótica, por lo tanto favorece el plano Sem-Ins.</p>                              |   |
|  | <p>C. Otros estudiantes manipulan los deslizadores para explorar el efecto que producen, Sem-Ins, a partir de la instrumentación asignan valor al deslizador n y de acuerdo a la partición obtenida, identifican la partición sucesiva para asignar el valor al deslizador m con la intención de coincidir con la posición de la tortuga, activando el plano Ins-Dis, en esta circulación se identifican propiedades de la partición sucesiva, como que el segmento que necesita volver a partir puede ser el nuevo entero y a partir de donde esté localizado el punto decidir la nueva partición, además del trabajo en el plano de exploración.</p> |  |

Tabla 6 Análisis de circulaciones en la etapa de construcción

En la tabla anterior se muestra el análisis correspondiente a la etapa de construcción, por lo que está centrada en la génesis instrumental. En los casos de alto desempeño los estudiantes mostraron trabajar en los planos de *exploración* y *validación*, mientras que los de desempeño medio sólo en el de exploración. En general, para la mayoría de los elementos de significado propuestos por Lamon, se observó este tipo de trabajo en la etapa de construcción, mientras que en las etapas de exploración se centró el trabajo en la génesis semiótica y en la de validación en la génesis discursiva.

Un ejemplo donde se observa principalmente la génesis semiótica es en las etapas de exploración del significado de medida, en particular del elemento de partición sucesiva.

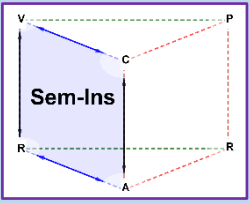
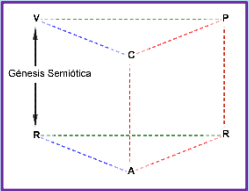
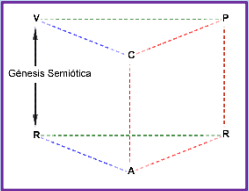
| Tarea   | Circulación  | Diagrama  |
|---|--|---|
| <p>Hoja 1<br/>Representa cada fracción sobre la recta dada.</p> | <p>A. A partir de las fracciones propuestas (representamen) algunos estudiantes recurren a la visualización y a la utilización de una técnica que les permite partir el segmento en el número que indica el denominador y señalar la partición que corresponde al numerador (instrumentalización), esta técnica se relaciona con el significado parte-todo ya que parten el entero y entonces pueden marcar la fracción solicitada. En esta tarea se activan la génesis semiótica y la instrumental favoreciendo el plano Sem-Ins.</p> |  |
|   | <p>B. Algunos estudiantes visualizan la posición de la fracción solicitada a partir del representamen <math>\frac{1}{2}</math>, activando la génesis semiótica.</p>  |  |
|   | <p>C. Otros estudiantes a partir de la visualización “estiman” la posición de las fracciones y marcan únicamente la representación solicitada, activando la génesis semiótica.</p>   |  |

Tabla 7 Análisis de circulaciones en la etapa de exploración

En el caso anterior, aunque se identificó trabajo en el plano Sem-Ins, se clasificaron algunas respuestas como de bajo desempeño debido a que no se utilizaron los elementos del ETM idóneo de medida, sino de sus ETM personales del significado parte-todo. Es decir, las génesis observadas no se refieren al elemento de partición sucesiva, aunque pudieron representar la fracción dada.

Finalmente, la génesis discursiva fue notoriamente la más difícil de favorecer, lo cual observamos por la poca presencia del plano Sem-Dis en las circulaciones analizadas. Atribuimos esto a la falta de tareas accesibles de comunicación, en las que fuera necesario argumentar sus construcciones. Uno de estos casos se observa en el trabajo con el elemento de *suma de fracciones*, para el significado de medida. Aunque se identifican respuestas de alto nivel, los estudiantes mostraron dificultades para argumentar y describir sus métodos.



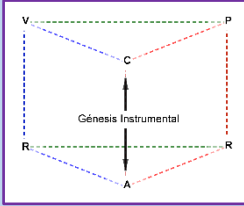
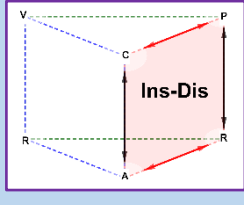
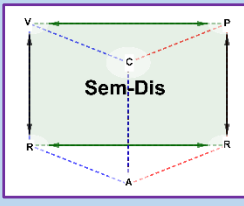
| Tarea                                     | Circulación   | Diagrama  |
|---|---|---|
| Hoja 11<br>Suma de fracciones individual. | A. Algunos estudiantes generan fracciones equivalentes, pero no logran concluir de manera correcta las operaciones propuestas, activando la génesis instrumental.   |  |
|   | B. Otros estudiantes logran resolver de manera correcta las operaciones propuestas activando la génesis instrumental, hacen sugerencias acerca de la posibilidad de restar en el applet activando el plano Ins-Dis.                       |  |
|   | C. Algunos estudiantes resuelven de manera correcta las operaciones propuestas (instrumentación) y las sugerencias para que sea posible resolver restas en el applet se basan en la dirección de los vectores activando el plano Sem-Dis. |  |

Tabla 8. Análisis de circulaciones en la etapa de validación

Señalamos en la tabla anterior el plano Sem-Dis para las respuestas de alto desempeño, aunque fue una génesis discursiva que evaluamos como pobre. Los estudiantes comunican claramente sugerencias viables para modificar la herramienta, a partir del conocimiento sobre su uso y funcionamiento, para resolver otros problemas; sin embargo, no argumentaron en términos de propiedades de los objetos matemáticos, la validez de las modificaciones.

### ■ Conclusiones

Los resultados preliminares, sugieren que favorecer el trabajo con cada significado sí genera ETM's compatibles con los idóneos previstos. Sobre la sugerencia de Lamon de privilegiar un significado particular y establecer relaciones con los demás (2007, p. 661), parece ser que el significado de medida se puede tomar como principal, ya que los estudiantes muestran intentar usar herramientas, representaciones y argumentos de ese significado al iniciar la solución de un problema de un significado nuevo. Por otro lado, la descripción de niveles de desempeño a partir del análisis de circulaciones permitió a la profesora titular del curso diseñar actividades complementarias para apoyar a los estudiantes en las génesis específicas en las que haya mostrado dificultades.

Finalmente, parece ser necesaria una etapa en las actividades específica para la génesis discursiva y la comunicación; aunque en cada hoja de trabajo se incluían preguntas para que los estudiantes mostraran sus argumentos, éstas no fueron suficientes para que todos los estudiantes desarrollaran una buena génesis discursiva. De tal manera, para futuras revisiones de la secuencia de enseñanza, se reestructurará en cuatro etapas para incluir un espacio de argumentación y comunicación; y así tener mejores posibilidades de generar trabajo matemático completo.

### ■ Referencias bibliográficas

- Arcavi, A. (2003) The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. April 2003, vol.52, Issue 3, pp. 215-241
- Kuzniak, A. & Nechache, A. (2016). Tâches emblématiques dans l'étude des ETM idoines: existence et usages. *Cinquième symposium des Espaces de Travail Mathématiques*, Florina, Grèce, juillet 2016.
- Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education*, 48, 721–737.
- Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national teachers of mathematics* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Lamon, S. (2012). *Teaching Fractions and ratios for understanding*. Nueva York y Londres: Routledge Taylor & Francis Group.