

LA FRACCIÓN COMO MEDIDA Y COMO OPERADOR: UNA EXPERIENCIA DE DISEÑO DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS

THE FRACTION AS A MEASURE AND AS AN OPERATOR: A DESIGN EXPERIENCE OF DIDACTIC ACTIVITIES

Elizabeth Vásquez Tirado, Maricela Armenta Castro, César Fabián Romero Félix
Universidad de Sonora. (México)
ely.vasquez.tirado@gmail.com, maricela@mat.uson.mx, cesar.romero@unison.mx

Resumen

Se presentan avances de una tesis de maestría consistente en el diseño, implementación y evaluación de actividades didácticas para favorecer la construcción de significados de la fracción como medida y como operador en niños de sexto grado de primaria (11-12 años). Se utilizaron los planteamientos de Lamon (2007, 2012) sobre los significados de las fracciones como marco referencial para orientar el diseño y llevar a cabo un análisis *a priori* de las actividades diseñadas. La implementación de las actividades se llevó a cabo con un grupo de 32 estudiantes de sexto grado de primaria. La propuesta está apoyada en el uso de tecnología digital y plantea momentos de trabajo individual, en equipo y grupal; y de acuerdo con la evaluación de la implementación, esta estructura funcionó para el diseño y el desarrollo de las actividades.

Palabras clave: significados, fracciones, diseño, actividades didácticas

Abstract

We present preliminary results from a master's thesis consisting on the design, implementation and evaluation of didactic activities to favor the construction of meanings for fraction as a measure and as an operator by sixth grade elementary school students (11-12 years). The Lamon's contributions (2007, 2012), were used as a reference framework about meanings of fractions, guiding the design and *a priori* analysis of the activities. The implementation was carried out with a group of 32 sixth grade elementary school students. The proposal is based on the use of digital technology and considers moments of individual work, teamwork and group work; and according to the implementation's evaluation, this structure worked for the design and development of the activities.

Key words: meanings, fractions, design, didactic activities

■ Introducción

En el Sistema Educativo Mexicano, las fracciones se plantean en el currículo a partir del tercer grado de educación primaria. Los estándares curriculares señalan que al concluir el sexto grado, los estudiantes deben estar en condiciones de resolver problemas que impliquen leer, escribir, comparar, sumar, multiplicar y dividir números en representación fraccionaria o decimal, así como calcular porcentajes e identificar distintas formas de representación de las fracciones (SEP, 2011, p.64). En cuanto a los significados, se señala a la fracción como parte-todo, medida, cociente y razón. Sin embargo, en una revisión de libros de texto oficiales utilizados en Primaria y varios textos utilizados en Secundaria, identificamos que las situaciones que se abordan son mayormente situaciones de reparto, que dan lugar principalmente al significado parte-todo y en menor medida a otros significados, incluso al significado de la fracción como operador.

Por otra parte, reportes de evaluación del aprendizaje de estudiantes de nivel básico, tales como el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA) 2018 y el Programa Internacional de Evaluación de los Alumnos (PISA, por sus siglas en inglés) señalan serias limitaciones en la resolución de problemas que involucra el uso de las fracciones (INEE, 2018; PISA, 2015). Esto muestra que la problemática alrededor de la enseñanza y aprendizaje de las fracciones es aún vigente. Esta problemática ha sido abordada por especialistas de la Matemática Educativa y documentada en distintos reportes de investigación, de los cuales retomamos los siguientes:

Fandiño (2007) señala que el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones es uno de los más estudiados en Matemática Educativa quizás porque es una de las áreas que muestra mayor debilidad en el mundo. Encontramos que la afirmación de Fandiño se sostiene a la fecha, ya que una revisión bibliográfica reciente muestra que se siguen realizando estudios sobre el aprendizaje de las fracciones en diversos sistemas educativos, mencionando comúnmente dificultades asociadas a los diferentes elementos de significado de las fracciones, por ejemplo, la equivalencia de fracciones y *el operador fracción* como un número (Chambris, Tempier, & Allard, 2017).

Por otro lado, Chamorro (2006) plantea que el estudio de las fracciones demanda serias exigencias cognitivas por la utilización de nuevos símbolos y algoritmos para realizar operaciones, además de los conceptos y significados a los que se enfrenta un estudiante de primaria; destacando en particular las dificultades por falta de conexión entre el algoritmo y el significado. Sostiene también que la variedad de representaciones y la variedad de situaciones en las que pueden presentarse las fracciones, son fuentes de dificultad asociadas a su aprendizaje. En forma coincidente, Lamon plantea que “cuando se pasa del estudio de los números enteros a las fracciones, la variedad y complejidad de las situaciones que dan significado a los símbolos aumentan dramáticamente” (Lamon, 2012, p.32).

Como ejemplo paradigmático de *fenomenologías didácticas*, Freudenthal (1983) describe a las fracciones en el lenguaje cotidiano como fracturador o como comparador, señala también que el fracaso del aprendizaje de las fracciones se debe a que éstas se abordan solamente desde una perspectiva, a diferencia de los números naturales. Esto respalda nuestra enfoque de favorecer el aprendizaje de los distintos significados de las fracciones, por lo cual consideramos pertinentes a nuestro trabajo los planteamientos de Lamon (2012), que inicialmente surgieron como una extensión del análisis de fenomenologías didácticas del concepto de fracción (Lamon, 2007), acerca de las estructuras centrales para el aprendizaje de las fracciones: medida, cantidad y covariación, pensamiento relativo, planteamiento de unidad, reparto y comparación, razonamientos ascendente y descendente, así como interpretación de números racionales.

Ante el interés acerca de esta problemática, el objetivo del proyecto de tesis que enmarca este trabajo consiste en diseñar una propuesta de actividades didácticas para favorecer la construcción de significados de la fracción. Es importante señalar que el proyecto incluye tres etapas: el diseño de actividades con un marco conceptual que permite establecer análisis a priori, niveles de desempeño y valorar la propuesta; la implementación de las actividades; y finalmente un análisis de la implementación que permite evaluar el trabajo matemático realizado por los estudiantes

al resolver las actividades, este último realizado con el marco de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM). Particularmente aquí nos enfocamos en la etapa de diseño de los significados de medida y operador de las fracciones.

Las actividades están dirigidas a estudiantes de sexto grado de primaria (11-12 años) e incorporan el uso de tecnología digital con un enfoque instrumental ya que tal visión permite “enfocarse en técnicas que los estudiantes desarrollan mientras se utilizan las herramientas... reconociendo que las técnicas incluyen nociones teóricas” (Drijvers, Kieran & Mariotti, 2009). De tal manera, los applets diseñados para algunas actividades tienen la intención de favorecer el desarrollo de técnicas específicas asociadas a alguna de las características del significado particular de fracción a estudiar.

■ Marco conceptual

Para el diseño de actividades adoptamos como marco conceptual las aportaciones de Lamon (2007, 2012) acerca de los significados de las fracciones, ya que permite un acercamiento compatible con los requerimientos del Sistema Educativo Mexicano.

Respecto a los significados de las fracciones que aquí se reportan, Lamon (2012) señala que en el significado de medida “una fracción usualmente es la medida asignada a algún intervalo o región, dependiendo si estamos en un espacio de una o dos dimensiones. En caso de estar trabajando en la recta numérica, la unidad es siempre un intervalo de longitud l , que cuando es partido en b subintervalos de igual longitud, cada subintervalo es de longitud $\frac{1}{b}$. En este caso, la fracción $\frac{a}{b}$ significa a intervalos de longitud $\frac{1}{b}$ ” (Lamon 2012, 210). También destaca algunos elementos o características de cada significado. Para la fracción como medida, señala los siguientes elementos: medición estática y dinámica, partición sucesiva, construcción de un sentido de densidad de los racionales, construcción de un sentido de orden y magnitudes relativas a las fracciones y, por último, operaciones con fracciones.

En la interpretación de la fracción como operador, Lamon (2012) plantea a la fracción como función que actúa como mapeo o bien como una transformación y señala algunas características que retomamos en este trabajo. Éstas son que las fracciones alargan o acortan segmentos de recta, aumentan o disminuyen el número de elementos de un conjunto discreto, toman una figura y la mapea en otra figura más grande o más pequeña, pero con la misma forma, relaciones de entrada y salida y por último composición.

Por otra parte, Lamon (2012) propone criterios para determinar si un estudiante ha construido los significados de las fracciones, por ejemplo, señala que un estudiante ha construido un significado para la fracción como medida cuando es capaz de realizar las acciones siguientes: utilizar la partición sucesiva, encontrar cualquier cantidad de fracciones entre dos fracciones dadas y comparar dos fracciones cualesquiera. Mientras que, para la fracción como operador, señala que el estudiante debe ser capaz de: interpretar a la fracción como operador de varias maneras, utilizar una fracción para referirse al resultado de aplicar una composición de fracciones, identificar el efecto del operador y usar modelos para caracterizar una composición de composiciones.

■ Metodología

Como ya se mencionó en la introducción de este reporte, el diseño de las actividades está enfocado en los significados de la fracción como medida y como operador, con la intención de favorecer la construcción de dichos significados en niños de sexto grado de primaria. Las aportaciones de Lamon (2007, 2012) se utilizaron para definir elementos o características fundamentales para cada significado y orientar el trabajo de diseño y el análisis

preliminar de las actividades. Además, consideramos distintas formas de trabajo: individual, en equipos y grupal; así como uso de material concreto y applets en GeoGebra.

Para la fracción como medida, Lamon (2012) señala los siguientes elementos: *Medición estática y dinámica, partición sucesiva, construcción de un sentido de densidad de los racionales, construcción de un sentido de orden y magnitudes relativas a las fracciones* y, por último, *operaciones con fracciones*, por lo que nos dimos a la tarea de diseñar hojas de trabajo para cada uno de estos elementos. Así continuamos con el resto de los elementos para la fracción como medida y operador.

De tal manera, en total se diseñaron 26 hojas de trabajo, once hojas para el significado de medida (Figura 1) y quince hojas para el significado de operador (Figura 2). Para el significado de medida se diseñó una actividad con uso de material concreto y tres con uso de applets en GeoGebra; para el significado de operador se diseñó una actividad con material concreto y tres actividades con uso de applets.

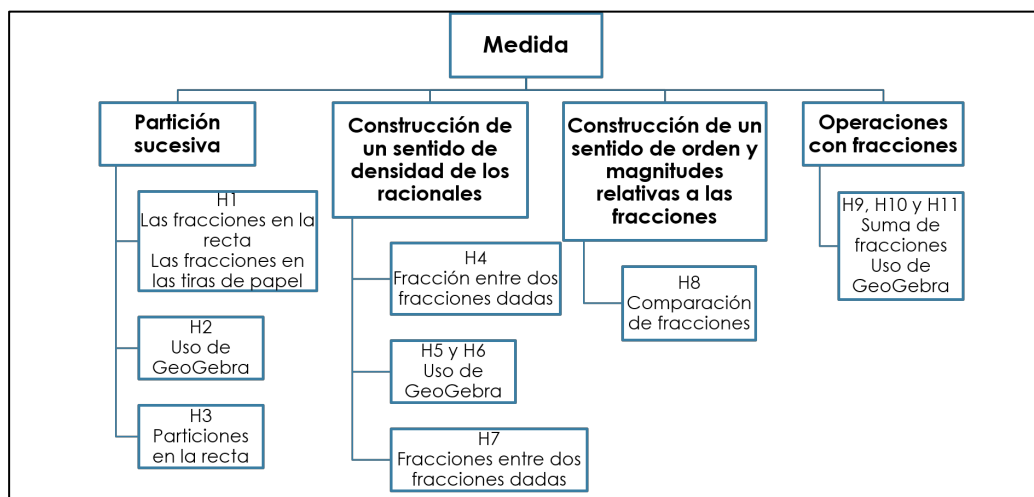


Figura 7. Estructura de actividades para significado de medida

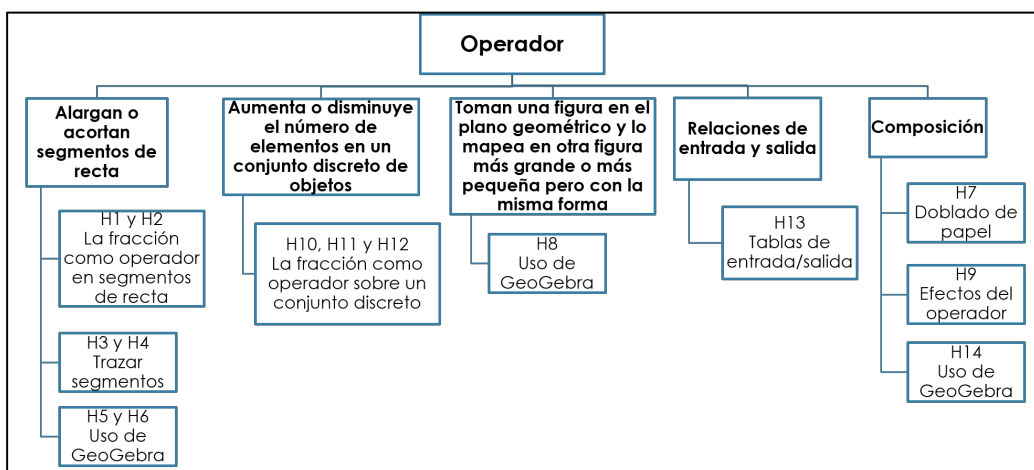


Figura 8. Estructura de actividades para significado de operador


En este proceso se identificaron los recursos que apoyan a la actividad, que puede ser material concreto o applets elaborados en el software GeoGebra; por ejemplo, diseñamos un applet para el desarrollo de la técnica de partición sucesiva para el significado de medida.

Enseguida se presentan algunos ejemplos de partes del diseño de las actividades para el significado de medida.

Actividad 1. Actividad individual a lápiz y papel, donde se espera que los estudiantes localicen algunas fracciones en segmentos de recta dados.

Actividad 2. Actividad en equipos con uso de material concreto donde se espera que los estudiantes identifiquen y registren en una tabla la posición de una marca en una tira de papel, mediante el doblar en partes iguales de una tira de papel. En esta etapa, esperamos que los estudiantes se apoyen en sus conocimientos previos, relacionados con el significado de *parte-todo*, y que posiblemente tengan dificultades para representar la fracción solicitada de manera correcta por las limitaciones de tal significado.

➤ Las fracciones en tiras de papel



Actividad en equipo

Número de Equipo: _____

Integrantes: _____


Identifica la fracción que corresponde al punto marcado en cada tira de papel, doblándola en partes iguales las veces que sea necesaria. Completa la tabla.

Tira	Fracción que corresponde al punto
Azul	
Rosa	
Morada	
Verde	

Compara tus respuestas con tus compañeros de equipo.

Figura 9. Hoja de trabajo correspondiente a la actividad 2 de partición sucesiva de medida

Actividad 3. Actividad en equipos con uso de applets elaborados con el software GeoGebra, donde los estudiantes desarrollan una técnica de partición sucesiva para determinar la posición de una tortuga en un segmento de recta. En este contexto, los estudiantes pueden cambiar de modo de pensamiento, de parte-todo a medida, por las manipulaciones posibles dentro del ambiente dinámico.



Actividad en equipo

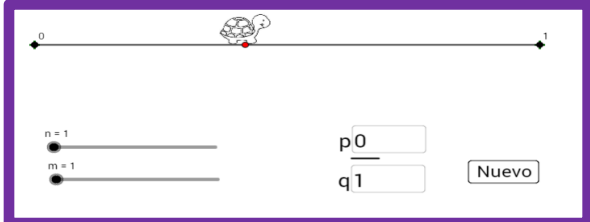
> **Uso de GeoGebra**

Número de Equipo: _____

Integrantes: _____

Entra a la página de actividades en GeoGebra titulada **Act.M1** que muestra la posición de una tortuga sobre una línea recta, utiliza los deslizadores n y m para expresar la fracción de la recta que corresponde a la posición en la que se encuentre la tortuga. Cuando te aparezca la leyenda de ¡Muy Bien! registra en la tabla siguiente los valores de los deslizadores n y m , y un dibujo de lo que observas en la recta.

n	M	Dibujo



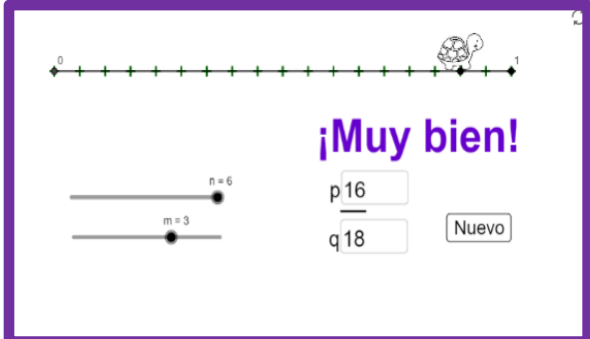



Figura 10. Hoja de trabajo y applet correspondiente a la actividad 3 de partición sucesiva del significado de medida. Actividad 4. Actividad en equipos a lápiz y papel donde los estudiantes modifican la técnica desarrollada en el ambiente dinámico para realizar la partición sucesiva como recurso para obtener segmentos de longitud $\frac{1}{b}$.



Actividad en equipo

> **Particiones en la recta**

Número de Equipo: _____

Integrantes: _____

¿Cómo puedes partir un segmento de recta en cuartos?

¿Cómo puedes partir un segmento en sextos?

¿Es la única forma con la que puedes obtener sextos?

En caso de que hayas respondido que no, ¿cuál puede ser otra forma?

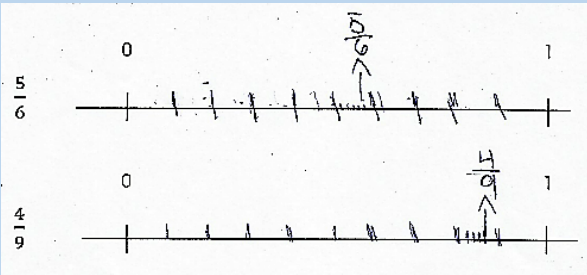
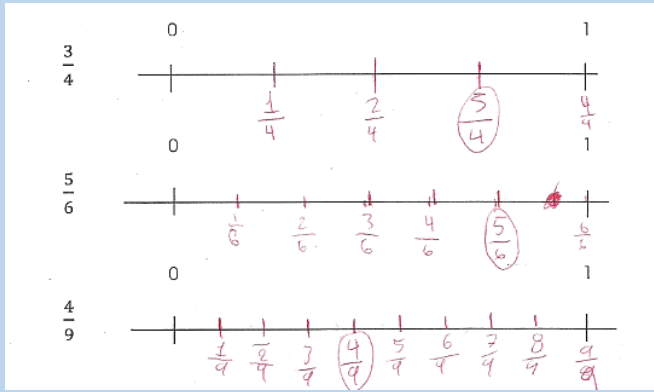
Escribe por lo menos dos formas con las que sea posible obtener doceavos en una recta.

Figura 11. Hoja de trabajo correspondiente a la actividad 4 de partición sucesiva del significado de medida.

■ Implementación y Resultados

Las actividades se implementaron en una escuela privada con un grupo de 32 estudiantes de sexto grado. Cada estudiante contó con un juego completo de las hojas de trabajo diseñadas y sus materiales correspondientes. Para las actividades en equipo se organizaron grupos de tres o cuatro estudiantes y a cada equipo se le asignó una computadora. En total, la implementación se llevó a cabo en doce sesiones de 45 minutos cada una, seis sesiones por cada significado. Las hojas de trabajo se utilizaron para obtener información de las respuestas individuales de los estudiantes. El análisis de los datos obtenidos de esta implementación se realizó comparando las respuestas registradas por los estudiantes con la descripción que se tenía producto del análisis *a priori*. Las respuestas se organizaron por niveles de desempeño distinguiendo tres niveles: nivel alto, regular y bajo. El análisis de las respuestas se orientó por los criterios señalados por Lamon (2012) para cada significado, observando que, en el caso de las actividades para el significado de medida, algunos estudiantes superan los procesos esperados en el análisis *a priori*, otros estudiantes muestran dificultades al intentar resolver problemas de medida con el significado parte-todo, sin embargo, logran superar estas dificultades después de las fases de trabajo en equipo y grupal.

Se observó que los estudiantes respondieron con mayor éxito las actividades de medida, lo cual consideramos que esto se debe a que los estudiantes contaban con experiencias que les permitían avanzar en su desarrollo; lo cual no sucedió en el caso de las actividades para promover el significado de operador. Consideramos que el sentido dinámico que caracteriza a este significado, por ejemplo, cuando se trata de alargar o acortar segmentos de recta debe favorecerse incluyendo un applet que enfatice este efecto. Enseguida se muestran algunas respuestas clasificadas con distintos niveles de desempeño para las actividades enfocadas al significado de medida.

<p>Nivel de desempeño bajo</p>		<p>Un estudiante presenta dificultades para localizar la posición de las fracciones solicitadas, mostrando problemas relacionados con el significado parte-todo.</p>
<p>Nivel de desempeño medio</p>		<p>Algunos estudiantes partieron el segmento de recta en la cantidad que indica el denominador y señalaron al numerador como se muestra en la imagen (E27). Esta técnica se relaciona con el significado parte-todo.</p>

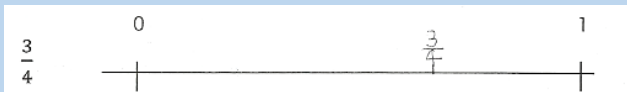

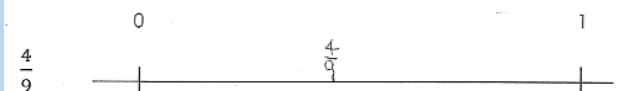
<p>Nivel de desempeño alto</p>		<p>Otros estudiantes representan directamente la posición de la fracción y la señalan (E11). La técnica utilizada es la estimación.</p>
		
		

Tabla 1. Hojas de respuesta de estudiantes correspondiente a la actividad 1 de medida con distinto nivel de desempeño

Las respuestas de los estudiantes se compararon con el análisis *a priori* permitiendo establecer los niveles de desempeño, consideramos que a pesar de que las respuestas son correctas como los ejemplos que se muestran en la Tabla 1, las técnicas utilizadas para la localización de las fracciones permiten establecer los niveles de desempeño. Esta actividad corresponde a la primera hoja de trabajo del significado de medida, después de resolver las actividades 2 y 3 de medida con uso de material concreto y applet, se presenta la actividad 4 que se lleva a cabo organizados en equipos a lápiz y papel. A continuación, se muestran respuestas de los estudiantes a la solicitud de escribir por lo menos dos formas con las que sea posible obtener doceavos.

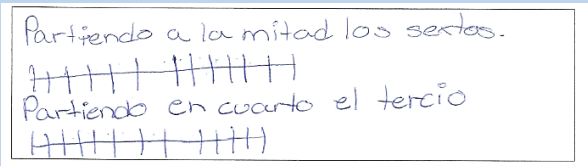
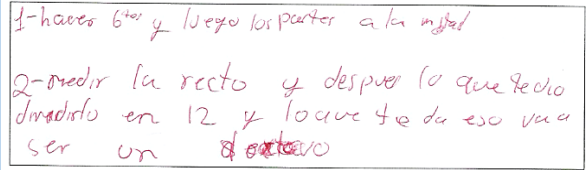
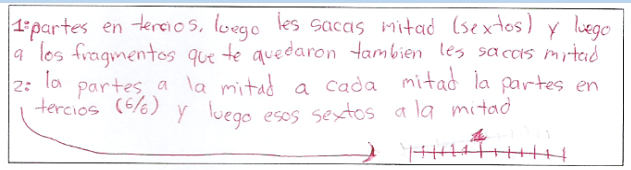
	Eq.9 E7
	Eq.3 E6
	Eq.5 E32

Tabla 2. Respuestas de los estudiantes para la generar doceavos en un segmento de recta.

En esta actividad, que es la última correspondiente a favorecer la partición sucesiva del significado de medida, todos los equipos logran responder de manera exitosa la actividad, aunque de nuevo, se observan que algunas respuestas son más descriptivas que otras, algunos recurren a representaciones gráficas y las respuestas se relacionan con las técnicas presentadas en la etapa de uso de herramientas.

■ Conclusiones

Acerca de las actividades para la fracción como medida, podemos concluir que la estructura tomada de Lamon (2012) fue una guía que facilitó el diseño. Las actividades diseñadas sí favorecieron la construcción de significado, incluso en aquellos elementos donde fue difícil implementar la estructura de diseño (trabajo a lápiz y papel, uso de tecnología y lápiz y papel) se presentaron dificultades menores en el desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes. Se podría extender el significado desarrollado, diseñando recursos de apoyo adicionales, como hojas de trabajo y applets.

Sobre las actividades para la fracción como operador, podemos concluir que los elementos o características que se desprenden de este significado parecen ser considerablemente más complejos, tanto para el diseño de actividades como para el desarrollo conceptual de los estudiantes. Incluso en las actividades donde se contó con todos los recursos de apoyo para los estudiantes, se presentaron dificultades medianas o graves para el desarrollo de las mismas. Sin embargo, la implementación de las actividades funcionó como exploración didáctica para identificar elementos adicionales del significado de operador y planear el diseño de recursos adicionales, con la intención de minimizar las dificultades observadas. Por ejemplo, iniciar las actividades de la fracción como operador con applets o manipulables que permitan a los estudiantes identificar el sentido dinámico de la fracción como operador.

En general, las herramientas diseñadas con software GeoGebra fueron accesibles para los niños, en el sentido de que las pudieron incorporar a sus técnicas de resolución. Sin embargo, se han identificado aspectos que requieren ser revisados para una mejora de las actividades.

Asimismo, se identificaron actividades que la mayoría de los estudiantes logran resolver de manera exitosa. La estructura de esas actividades se caracteriza por una primera fase de trabajo individual con uso de lápiz y papel, seguido de trabajo en equipo con uso de material concreto y/o applets y, finalmente, una última fase de trabajo lápiz y papel.

Tomando en cuenta la complejidad de la enseñanza de fracciones, el trabajo realizado permitirá generar una secuencia de actividades que pueda implementarse con alumnos de quinto y sexto grado de primaria (10-12 años).

Finalmente, consideramos que esta experiencia valida planteamientos de Lamon acerca de la importancia de establecer conexiones entre los distintos significados de las fracciones privilegiando uno de ellos.

■ Referencias bibliográficas

- Chambris, C., Tempier, F., & Allard, C. (2017). Un regard sur les nombres à la transition école-collège. *Repères IREM* 108, pp. 63-91.
- Chamorro, M. (2006) *Didáctica de las Matemáticas Primaria*. Madrid: Pearson.
- Drijvers, P., Kieran, C., & Mariotti, M. A. (2009). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Digital technologies and mathematics teaching and learning: Rethinking the terrain* (pp. 89-132). New York: Springer.

- Fandiño, M. (2007). Fractions: Conceptual and didactic aspects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, 7, pp. 23-45.
- Freudenthal, H. (1983) Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001.
- INEE (2018). *PLANEA Resultados Nacionales 2018*. Recuperado el 04 de enero de 2019 de http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2018/RESULTADOS_NACIONALES_PLANEA2018_INEE.pdf
- Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A Project of the national teachers of mathematics* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Lamon, S. (2012). *Teaching Fractions and ratios for understanding*. Nueva York y Londres: Routledge Taylor & Francis Group.
- PISA (2015) Resultados México (sf). Recuperado el 7 de diciembre del 2016 de <https://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Mexico-ESP.pdf>
- SEP (2011). *Programas de estudios 2011. Guía para el maestro*. Educación Básica Primaria. Sexto Grado. México: Autor.