18. EL CONOCIMIENTO SEMÁNTICO EN LA REPRESENTACION DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN COMO MODELOS MATEMÁTICOS

LUIS FERNANDO MARIÑO[1]
ROSA VIRGINIA HERNANDEZ[2]

[1]Facultad de Ciencias Básicas, Departamento de Matemáticas y Estadística. Universidad Francisco de Paula Santander. fernandoml@ufps.co
[2]Facultad de Ciencias Básicas, Departamento de Matemáticas y Estadística. Universidad Francisco de Paula Santander. rosavirginia@ufps.edu.co
Grupo Euler

Resumen

La resolución de problemas y modelación matemáticas son áreas críticas en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Allí se deben poner en juego, conceptos, habilidades y procedimientos provenientes de la experiencia matemática en cursos anteriores. La mayoría de los estudiantes tienen dificultades para llegar a entender el lenguaje de las matemáticas; relacionadas con el conocimiento inadecuado del lenguaje especializado que incluye palabras técnicas, no técnicas, y notación simbólica, específicamente en la formulación de modelos matemáticos. El propósito del estudio estuvo centrado en analizar los resultados sobre el conocimiento semántico que un grupo de estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Francisco de Paula Santander evidencia en la representación de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden como modelos matemáticos. Los fundamentos teóricos de que dieron soporte a la investigación fueron: La teoría de dos etapas propuesta por Mayer (1986), el ciclo de modelación bajo la perspectiva cognitiva de Ferri (2006) y las representaciones externas de Goldin y Kaput (1996). Se diseñó y aplicó un cuestionario de 17 reactivos con respuestas cerradas y abiertas. Los hallazgos muestran que cada participante hace su propia representación interna y externa a conceptos como: sistema masa-resorte, peso, masa, punto de equilibrio, Ley de Hooke, fuerzo amortiguadora, fuerza externa, Ley de Newton inmersos en la situación mediante un problema de palabra.

Palabras claves: Problemas matemáticos, ciclo de modelación, representaciones externas, modelación matemática.

1. INTRODUCCIÓN

La representación de situaciones del mundo real o problemas de palabra es una etapa crucial en la formulación de modelos matemáticos. Un alto porcentaje de los estudiantes no “llega a entender el lenguaje de las matemáticas, relacionado con el conocimiento inadecuado del lenguaje matemático especializado que incluye palabras técnicas, no técnicas, y notación simbólica” (p. 2).). Para Sabagh S. (2008) la dificultad “parece ser la representación del problema; es decir, moverse de las palabras en el problema a una representación mental coherente con éste” (p. 218). Según Calle (2013) el problema semántico del lenguaje matemático es muy complejo, debido a la diversidad de registros semióticos utilizados en la actividad matemática, como: “el uso del lenguaje ordinario oral y escrito, símbolos específicos, representaciones gráficas de objetos materiales y un sinnúmero de signos” (p. 22). Mientras que para (Blum & Borromeo Ferri, 2009) las posibles causas de las “dificultades en los procesos de modelación radica en las demandas cognitivas en las tareas, puesto que se encuentran ligadas a otras competencias matemáticas como la lectura, la comunicación, el diseño y la aplicación de estrategias para la resolución de problemas” (p. 46).

Investigadores como Haghverdi, Majid, Semnani, Ahmad Shahvarani, & Seifi, Mohammad (2012), Calle (2013), Bassanezi, R., y Biembengut, M. (1997) coinciden en que los errores de los alumnos en la resolución de problemas son resultado de falta de conocimiento lingüístico, semántico, estructural y comunicacional, el empleo del proceso semántico y del lenguaje matemático es deficiente, no interpretan ni relacionan signos ya aprendidos con los nuevos, desconocen el proceso semántico del significado de las palabras. Para Berdugo Oviedo (2004) la dificultad reside en el emparejamiento entre la comprensión del texto, la situación constituida en el texto y la representación matemática. Según Wright (2014) la mayor dificultad se encuentra en la fase de traducción del lenguaje humano al simbolismo matemático.

La ingeniería necesita de las matemáticas para lograr sus propios fines ya que estas le permiten dar solución a los problemas planteados que provienen de la industria o del diario vivir, Guerrero (2012). Los programas académicos para la formación de ingenieros se caracterizan por tener un amplio componente de matemáticas especialmente en el ciclo básico, esto pone de manifiesto lo que afirma Toro (2009, p. 7), “comparativamente con otras áreas, las matemáticas presentan una característica particular: son un conocimiento acumulativo”. Ecuaciones diferenciales es una de las asignaturas que más aporta en la formación del ingeniero. También quizá una de las que más dificultad les presenta; cuando un estudiante se enfrenta a problemas de modelado debe poner en juego, conceptos, habilidades y procedimientos provenientes del cálculo diferencial, integral, álgebra lineal, estadística e incluso de lo visto en el nivel educativo precedente.

Según (Blum & Borromeo Ferri, 2009) la modelación matemática es el proceso de traducción entre el mundo real y las matemáticas en ambas direcciones. Para Camarena (2009), “la modelación matemática es aquel modelo que se concibe como el proceso cognitivo que se tiene que llevar acabo para llegar a la construcción del modelo matemático de un problema u objeto del área de contexto” (p. 20). Según Mayer (1986) para resolver un problema se debe pasar por las etapas: traducción y solución. Para la primera se requiere conocer el significado en el lenguaje natural de cada una de las palabras que aparecen en el enunciado (conocimiento lingüístico) y conocimiento de los hechos acerca del mundo real (conocimiento semántico), para la segunda conocimiento operativo y estratégico; estos procesos cognitivos requieren y destacan la importancia del tránsito que tiene que hacer el resolutor del lenguaje natural al lenguaje matemático. En esta fase se presentan grandes dificultades que pueden originar malentendidos, que se producen cuando el solucionador de problemas construye un modelo mental de la situación problemática que entra en conflicto con la información en el enunciado del problema (Mayer, Lewis, & Hegarty, 1992)

Estos investigadores coinciden en muchos aspectos, pero el relevante para la investigación es el primer paso: entender el problema y formular el modelo. Según Polya (2011) esto requiere que el resolutor entienda el significado del problema, si puede replantear o escribir el problema utilizando sus propias palabras, identificar datos conocidos y variables. Entre tanto para Schoenfeld (1980), citado por Pino (2012), lo primero es la categoría de recursos entendida como conocimientos previos que posee el individuo, la forma en que el profesor accede a los conceptos que tiene el estudiante, circunstancias estereotípicas que provocan respuestas como un simple procedimiento y los recursos defectuosos (algún conocimiento mal aprendido, así sea una fórmula).

Por la trascendencia que tiene esta etapa en los procesos de modelación, la investigación se centra en éste elemento fundamental, analizando la estructura del lenguaje natural que requiere ser matematizado, y en el marco del planteamiento de Mayer (1986) acerca de los estadios para resolver problemas, se formuló el siguiente objetivo para orientar la investigación: Analizar los resultados sobre el conocimiento semántico en la representación de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden como modelos matemáticos evidenciado por un grupo estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Francisco de Paula Santander.

2. METODOLOGÍA

La investigación fue cuantitativa de tipo exploratorio descriptivo. La población estuvo conformada por estudiantes que cursaron Ecuaciones Diferenciales en los programas de la Facultad Ingeniería de la Universidad Francisco de Paula Santander durante el II semestre académico *2016*. Para la selección de los participantes se utilizó muestreo probabilístico.

Para recolectar la información se diseñón un cuestionario de 17 reactivos con respuesta cerrada y abierta a paritr de un problema de palabra que involucra contenidos del ciclo básico de ingeniería, donde el resolutor tiene que representar ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden como modelos matemáticos.

El siguiente problema de palabra fue tomado de Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera de Zill y Cullen (2009), se realizaron algunas modificaciones , sirviendo como basa para la elaboración del cuestionario:

Considere un resorte de longitud *l* sujetado con firmeza a un punto fijo (como el techo). Una masa que pesa *16* libras se fija en el extremo inferior del resorte y lo alarga $8/3$ pie. La masa se libera inicialmente desde un punto *2* pies debajo de la posición de equilibrio y el movimiento posterior ocurre en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a $1/2$ de la velocidad instantánea. Formule la ecuación diferencial que rige el movimiento del sistema masa-resorte si se aplica una fuerza externa igual a $f(t) = 10\cos 3t$.

3. RESULTADOS

La Tabla 1 muestra resultados parciales acerca de los significados asignados por los participantes a signos, símbolos y expresiones matemáticas:

Tabla 2. Representaciones externas a proposiciones y conceptos matemáticos

Expresiones matemáticas	%	Representación Externa
Un sistema masa resorte está compuesto por	*30*	Una masa puntual, un resorte ideal colgante y un punto de sujeción del resorte, por ejemplo el techo
	10	Una masa *m* unida a un resorte ideal, que a la vez se halla unido a una pared
	50	Un resorte con alto coeficiente de elasticidad, una masa puntual y un punto de sujeción del resorte
	10	Un resorte con alto coeficiente de elasticidad que no se deforme en su rango de estiramiento, una masa puntual y un punto de sujeción del resorte
La masa de un cuerpo es:	*80*	Una medida de la cantidad de materia que posee un cuerpo y su unidad en el sistema internacional de unidades es el kilogramo
	20	La inercia o resistencia a los cambios de estado de movimiento
El peso de un cuerpo, representa	*90*	El producto de su masa por la aceleración de la gravedad, expresado mediante la relación $W = mg$
	10	La Fuerza con la que tierra atrae al cuerpo
La constante de elasticidad del resorte, es	*80*	El valor de la constante de proporcionalidad según la ley de elasticidad de Hooke que establece: dentro de los límites el estiramiento que experimenta un material elástico es directamente proporcional a la fuerza aplicada sobre el mismo
	20	El valor de la constante de proporcionalidad que permite recuperar su forma original después de ser comprimido o estirado por una fuerza externa
El pie es la unidad de longitud en el sistema	*40*	De ingeniería y equivale a 30.48 cm en el sistema Cgs
	20	De ingeniería y equivale a 0. 3048 m en el sistema Mks
	30	De ingeniería equivalente a 30.48 cm en el sistema MKs.
	10	Cgs y equivale a 12 pulgadas en el sistema de ingeniería
La expresión: La masa se libera inicialmente desde un punto 2 pies debajo de la posición de equilibrio, significa:	*20*	El momento a partir del cual se considera el movimiento, es decir cuando $t = 0$
	30	Representa una condición inicial expresada mediante $y(0) = 2$, allí $y(t)$ es la función desplazamiento del cuerpo
	40	Como el cuerpo es liberado debajo de la posición de equilibrio la velocidad inicial es igual a cero y se representa mediante $dy/dt = 0$
	10	Las condiciones iniciales $y(0) = 2,\ y'(0) = 0$ a partir de las cuales se considera la situación y permiten hallar la solución particular de la ecuación diferencial
Se puede afirmar que la fuerza de amortiguamiento:	*40*	Tiene dirección opuesta al movimiento instantáneo y es proporcional a la velocidad del cuerpo cuando la velocidad es baja
	10	Como es proporcional al movimiento del cuerpo, existe la constante de amortiguamiento, representada generalmente por la letra *c*
	30	Si dy/dt es positiva el cuerpo se mueve hacia abajo y la fuerza de amortiguamiento se dirige hacia arriba, representada mediante $F_{amort} = -c\,dy/dt$

20	Si dy/dt es negativa el cuerpo se mueve hacia arriba y la fuerza de amortiguamiento se dirige hacia abajo, representada mediante $F_{amort} = -c\, dy/dt$

4 DISCUSIÓN

Los hallazgos coinciden y muestran claramente que cada participante hace su propia representación interna y externa a conceptos como: sistema masa-resorte, peso, masa, punto de equilibrio, Ley de Hooke, fuerzo amortiguadora, fuerza externa, Ley de Newton, posiblemente estas se deben a su experiencia y competencias matemáticas coincidiendo con Ferri (2006).

Los resultados evidencian también dificultades en el tránsito del lenguaje natural al lenguaje matemático y la representación externa de cada una de los signos, símbolos o expresiones matemáticas inmersas en el problema de palabra, como lo afirman Haghverdi, Majid, Semnani, Ahmad Shahvarani, & Seifi, Mohammad (2012), Calle (2013), Bassanezi, R., y Biembengut, M. (1997, Sabagh S. (2008), Berdugo Oviedo (2004) y Calle (2013).

5. CONCLUSIONES

El trabajo evidencia la importancia que tiene la fase de representación en el ciclo de modelación y resolución de problemas. Cada participante hace una representación externa parcial de cada uno de los conceptos matemáticos inmersos que involucran ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Se evidencian también muestran dificultades en estas tareas; por tanto es necesario realizar trabajos profundizando en el tema con el propósito de buscar explicaciones y contribuir en la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

REFERENCIAS

Bassanezi, R., & Biembengut, M. (1997). Modelación matemática: una antigua forma de investigación, un nuevo método de enseñanza. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *32*, 13-25. Recuperado el 19/07/2016 de http://funes.uniandes.edu.co/3171/1/C1997Modelaci%C3%B3nNumeros32.pdf

Berdugo Oviedo, G. (2004). *Comprehension and representation of algebra word problems in a second language* (Order No. NQ98206). Available from ProQuest Dissertations & Theses A&I: Social Sciences. (305064402). Retrieved from http://search.proquest.com/docview/305064402?accountid=43636

Blomhøj, M. (2009). Different perspectives on mathematical modelling in educational research - categorising the TSG21 papers. *Mathematical Applications and Modelling in the Teaching and Learning of Mathematics*, *11*. Recuperado de http://tsg.icme11.org/document/get/811

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling : Can It Be Taught And Learnt ? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45–58.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 37-68.

Calle, C.E. (2013). Influencia de la semántica en el aprendizaje de las matemáticas en el segundo curso de bachillerato del Colegio Benigno Malo. (Trabajo de grado de Maestría). Recuperado de: http://dspace.ucuenca.edu.ec/bitstream/123456789/4693/1/Tesis.pdf

Camarena G.P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación Educativa*, *9*(46) 15-25. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4707699.pdf

Dostál, J. (2015). Theory of Problem Solving. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *174*, 2798–2805. http://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.01.970

Ferri, R. B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 86–95. http://doi.org/10.1007/BF02655883

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). a Joint Perspective on the Idea of Representation in Learning and Doing Mathematics, (January 1996), 397–430.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 137–165. http://doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80056-1

Guerrero, J.G. (2012). Las matemáticas en Ingeniería: todo un reto pedagógico. *Ed. Coruniamericana. 1*(1). 75-80. Recuperado de http://coruniamericana.edu.co/publicaciones/ojs/index.php/IID/article/view/174/168

Haghverdi, Majid, Semnani, Ahmad Shahvarani, & Seifi, Mohammad. (2012). The relationship between different kinds of students' errors and the knowledge required to solve mathematics word problems. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*,*26*(42b), 649-666. Retrieved July 14, 2015, from http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2012000200012&lng=en&tlng=en. 10.1590/S0103-636X2012000200012

Intaros, P., Inprasitha, M., & Srisawadi, N. (2014). Students' Problem Solving Strategies in Problem Solving-mathematics Classroom. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *116*, 4119–4123. http://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.01.901

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zdm*, *38*(3), 302–310. http://doi.org/10.1007/BF02652813

Kashefi, H., Ismail, Z., & Yusof, Y. M. (2010). Obstacles in the Learning of Two-variable Functions through Mathematical Thinking Approach. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *8*, 173–180. http://doi:10.1016/j.sbspro.2010.12.024

Mayer, R.E. (1986). Thinking, Problem Solving, Cognition. (Trad. Graziella Baravella). (1ª ed.). Barcelona: Ediciones Paidos. (Original publicado en 1983).

Muir, T., Beswick, K., & Williamson, J. (2008). "I'm not very good at solving problems": An exploration of students' problem solving behaviours. *The Journal of Mathematical Behavior*, *27*(3), 228–241. http://doi:10.1016/j.jmathb.2008.04.003

National Council of Teacher of Mathematics (2000). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.*

Olazabal, A. M., Camarena, P. (2004). *Categorías en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico*. Ponencia presentada en el Cuarto congreso nacional y tercero internacional: Retos y Expectativas de la Universidad, Coahuila, México. Recuperado el 08 de febrero de 2015 de: http://www.congresoretosyexpectativas.udg.mx/Congreso%204/Mesa%202a/m2a20.pdf

Polya, G. (2005). *Cómo plantear y resolver problemas*. (reimp. XVII). (Trad. Zagazagoitia) Mexico: Editorial Trillas. (Original publicado en 1965).

Sabbagh, S. S. (2008). Soluciónn de problemas aritméticos redactados y control inhibitorio cognitivo. *Universitas Psychologica*, *7*(1), 217–229.

Toro, J. R. (2009). Las Matemáticas: fundamentos de disciplinas y profesores. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-189357_archivo_pdf_matematica_1A.pdf_1A.pdf

Wright, J. E. (2014). *An investigation of factors affecting student performance in algebraic word problem solutions* (Order No. 3642234). Available from ProQuest Dissertations & Theses A&I. (1630101245). Retrieved from http://search.proquest.com/docview/1630101245?accountid=43636

Zill, D.G., Cullen, M.R. (2009). *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera*. (7ª ed.). Mexico: Cengage Learning Editores.