

"Una propuesta de itinerario de enseñanza del álgebra temprana de 3 a 12 años"



Ángel Alsina

Universidad de los Andes (Colombia)
CONFERENCIAS VIRTUALES en Educación Matemática
28-09-19

ESQUEMA

- 1. ¿Qué es el álgebra? Breve fundamentación y contextualización en el currículo.
- 2. Itinerario de enseñanza del álgebra temprana de 3 a 12 años.
- 3. Conclusiones.

1. ¿Qué es el álgebra? Breve fundamentación y contextualización en el currículo

- El álgebra es un bloque de contenidos matemáticos que tradicionalmente se ha asociado a **niveles de escolarización posteriores** (sobre todo a partir de la Educación Secundaria) para tratar conocimientos vinculados a **la generalización y al simbolismo principalmente**.

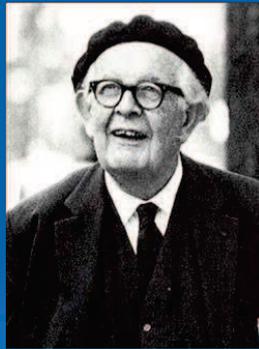
The image is a collage of mathematical content related to algebra. At the top center, the word "ALGEBRA" is written in large, bold, white letters. Surrounding it are various mathematical formulas and graphs:

- Top Left:** Trigonometric identities: $(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4})^2$, $\frac{4 \cdot (2+3)^2}{3}$, $f(x) = \frac{(x+2)^2}{3}$, $S = f(0) \cdot f$. A graph shows a shaded area under a curve.
- Top Center:** Binomial expansion formulas: $1) (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $2) (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $3) (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, $4) (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, $5) (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
- Top Right:** A graph of a parabola $y = x^2$ and a coordinate system with points $A(1,1)$ and $B(2,4)$.
- Middle Left:** Calculations: $a = 10,25$, $\frac{a^2 - 43}{a - 6}$, $\frac{a^2 - 43}{a - 6} = \frac{a^2 - 12a + 12a - 43}{a - 6} = \frac{a^2 - 12a + 12a - 43}{a - 6}$.
- Middle Right:** A graph of a parabola $y = x^2$ and a coordinate system with points $A(1,1)$ and $B(2,4)$.
- Bottom Left:** Quadratic equation solution: $5x^2(x^2 - 2x + 3) = 5x^4 - 10x^3 + 15x^2$, $x^2 + 10x + 22 = 0$, $x^2 + 4 > 0$, $D = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 22 = 100 - 88 = 12$, $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-10 - \sqrt{12}}{2} = \frac{-10 - 2\sqrt{3}}{2} = -5 - \sqrt{3}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-10 + \sqrt{12}}{2} = \frac{-10 + 2\sqrt{3}}{2} = -5 + \sqrt{3}$.
- Bottom Center:** Trigonometric identities: $X = Y^2 \sin(a+b)$, $3) \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, $\sqrt{2} \approx 1,4$, $\sqrt{3} \approx 1,7$.
- Bottom Right:** A graph of a parabola $y = x^2$ and a coordinate system with points $A(1,1)$ and $B(2,4)$.

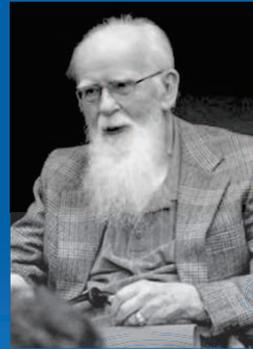
- Sin embargo, existe una larga tradición de enseñar conocimientos de naturaleza algebraica previos a la generalización y el simbolismo en edades inferiores, ya desde la etapa de Educación Infantil, como por ejemplo diversos tipos de relaciones (clasificaciones y ordenaciones).



M. Montessori
Educación
Sensorial



J. Piaget
Razonamiento
lógico-
matemático



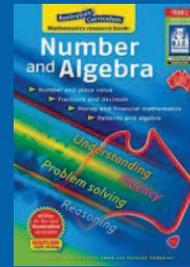
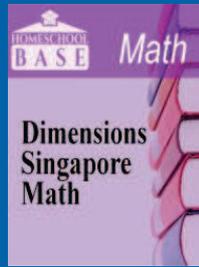
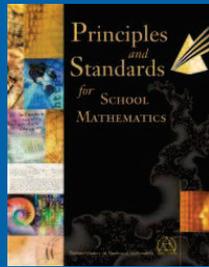
Z. P. Dienes
Lógica
matemática

¿Por qué en muchos países no hay todavía un bloque de contenidos de álgebra temprana en el currículo de matemáticas de Educación Infantil y Primaria?

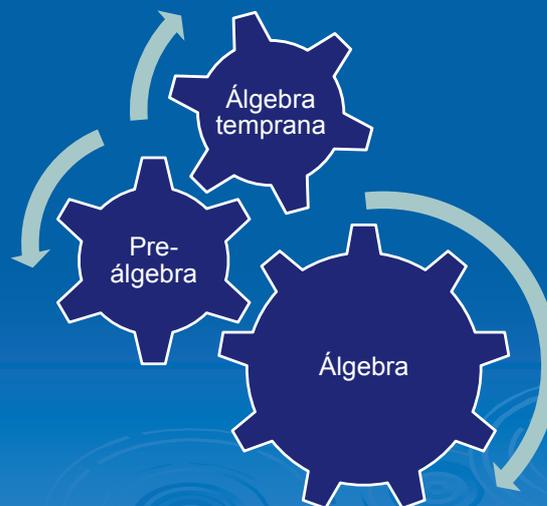
1. La nomenclatura tradicional usada para denominar los conocimientos de naturaleza algebraica.

2. La presencia de la matemática moderna en el currículo de matemáticas.

- A pesar de estas circunstancias adversas, en las últimas décadas los conocimientos algebraicos se han incorporado con fuerza en las orientaciones curriculares más avanzadas desde los 3 años.



- La incorporación de los conocimientos algebraicos en los currículos contemporáneos de matemáticas para las primeras edades se ha realizado a partir de dos nuevos enfoques: álgebra temprana y pre-álgebra.



Principales contenidos de álgebra temprana (NCTM, 2000)

- Comprender patrones, relaciones y funciones.
- Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas con símbolos apropiados.
- Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.
- Analizar el cambio en diversos contextos.

Etapa Pre k-2 (3-8 años)

Comprender patrones, relaciones y funciones.	y	<p>Seleccionar, clasificar y ordenar objetos por el tamaño, la cantidad y otras propiedades.</p> <p>Reconocer, descubrir y ampliar patrones tales como secuencias de sonidos y formas o sencillos patrones numéricos, y pasar de una representación a otra.</p> <p>Analizar cómo se generan patrones de repetición y de crecimiento.</p>
Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos	y	<p>Ilustrar los procesos generales y las propiedades de las operaciones, como la conmutatividad, usando números.</p> <p>Usar representaciones concretas, pictóricas y verbales para desarrollar la comprensión de notaciones simbólicas inventadas y convencionales.</p>

Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas	Modelizar situaciones relativas a la adición y sustracción de números naturales, utilizando objetos, dibujos y símbolos.
Analizar el cambio en contextos diversos	Describir cambios cualitativos , como “ser más alto”. Describir cambios cuantitativos , como el aumento de estatura de un alumno en dos pulgadas en un año.

Etapa 3-5 (9-14 años aprox.)

Comprender patrones, relaciones y funciones.	Describir y extender patrones geométricos y numéricos y hacer generalizaciones acerca de ellos. Representar y analizar patrones y funciones , verbalmente y mediante tablas y gráficas.
Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos	Identificar propiedades como la conmutatividad, la asociatividad y la distributividad , y emplearlas en el cálculo con números naturales. Representar la idea de variable como cantidad desconocida, por medio de una letra o un símbolo. Expresar relaciones matemáticas mediante expresiones algebraicas .

Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas	Modelizar situaciones problemáticas con objetos, y usar representaciones como gráficas, tablas y expresiones algebraicas para extraer conclusiones.
Analizar el cambio en contextos diversos	Investigar de qué manera el cambio que experimenta una variable se relaciona con el de una segunda variable Identificar y describir situaciones con tasas de cambio constantes , y compararlas.

2. Itinerario de enseñanza del álgebra de 6 a 12 años.

¿Qué es un itinerario didáctico de enseñanza de las matemáticas?

- Se trata de una **secuencia de enseñanza intencionada que contempla las necesidades reales de los niños y niñas de las primeras edades para aprender matemáticas (Alsina, 2019).**
- Parte de la base que **la enseñanza de las matemáticas debería iniciarse en situaciones concretas y, progresivamente, ir avanzando hacia contextos más abstractos.**

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Barcelona: Graó.
Alsina, Á. (2018). Seis lecciones de educación matemática en tiempos de cambio: itinerarios didácticos para aprender más y mejor. *Padres y Maestros*, 376, 13-20.

De un itinerario que da **vueltas y vueltas** a un mismo contexto de enseñanza ...



A un itinerario didáctico de enseñanza de las matemáticas que **considera diferentes contextos ...**

- No todos los alumnos aprenden de la misma manera, por lo que es necesario diversificar los contextos de enseñanza-aprendizaje.
- El proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, de acuerdo con el Principio de Niveles de la EMR (Freudenthal, 1991), va de lo concreto a lo abstracto.



➤ Fases de los itinerarios de enseñanza de las matemáticas:

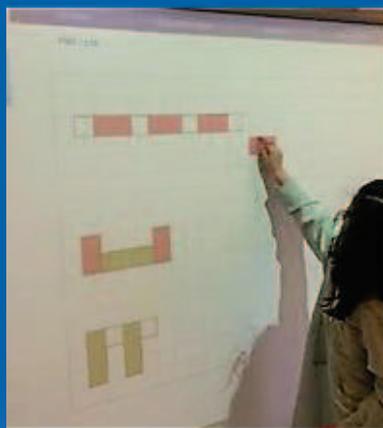


- **Contextos informales:** permiten visualizar las ideas matemáticas de manera concreta.
- **Contextos intermedios:** conducen a la esquematización y generalización progresiva.
- **Contextos formales:** contribuyen a la representación y formalización del conocimiento matemático con notaciones convencionales.

Fase 1: situaciones de vida cotidiana, materiales manipulativos y juegos.

Redescubriendo Palencia con ojos matemáticos

- Lugar de implementación: Escuela Pública “Sofía Tartilán” (Palencia)
- Nivel: 5-6 años
- Maestra responsable de la implementación: Asunción Moreno
- Asesoramiento pedagógico: Ángel Alsina y M^a Luisa Novo
- Contenidos matemáticos trabajados:
 - Patrones de repetición



En primer lugar, los alumnos realizan seriaciones con regletas siguiendo un patrón de repetición (AB) en la pizarra digital y en el papel cuadriculado.



Posteriormente, hacen una salida por el entorno de la escuela para descubrir y observar patrones (AB, principalmente)





Niño: *Me sé una serie yo*

Niña: *Y yo otra.*

Niña: *Balcón, balcón y ¿esto?*

Maestra: *Eso es un mirador.*

Niña: *balcón, balcón, mirador, balcón, balcón, mirador...*

Niño: *Yo sé otra... Con lo que sujeta...*

Maestra: *¿Cómo se llama?*

Niño: *¿Columna?*

Maestra: *Sí. Y sigue...*

Niño: *columna, no hay nada, columna, no hay nada, columna, no hay nada...*

Maestra: *Mira un poco hacia arriba, ¿qué ves?*

Niño: *¿Una farola?*

Maestra: *Es un farol porque no se apoya en el suelo.*

Niño: *columna, farol, columna, farol, columna, farol...*



Niño: Tiene una serie que me la sé. Y señala: Dibujo, raya, dibujo, raya, dibujo, raya...

Materiales manipulativos y juegos



Bloques Lógicos de Dienes

Cualidades	FORMA	COLOR	TAMAÑO	GROSOR
Atributos	Cuadrado Rectángulo Círculo Rectángulo	Amarillo Rojo Azul	Grande Pequeño	Gruoso Delgado
	4	x3	x2	X2= 48 piezas







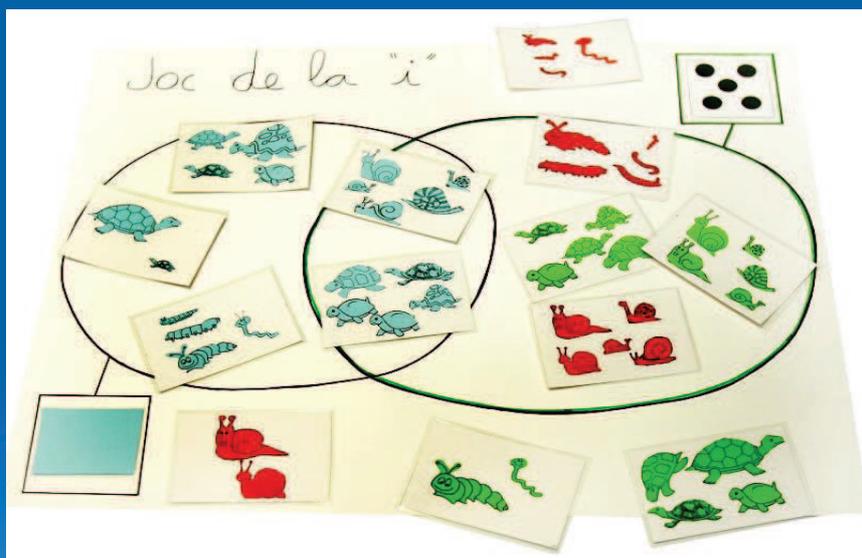
Agrupaciones de elementos por una cualidad común, con una etiqueta afirmativa



Agrupaciones de elementos por una cualidad común, con una etiqueta negativa



Agrupaciones de elementos a partir de dos cualidades



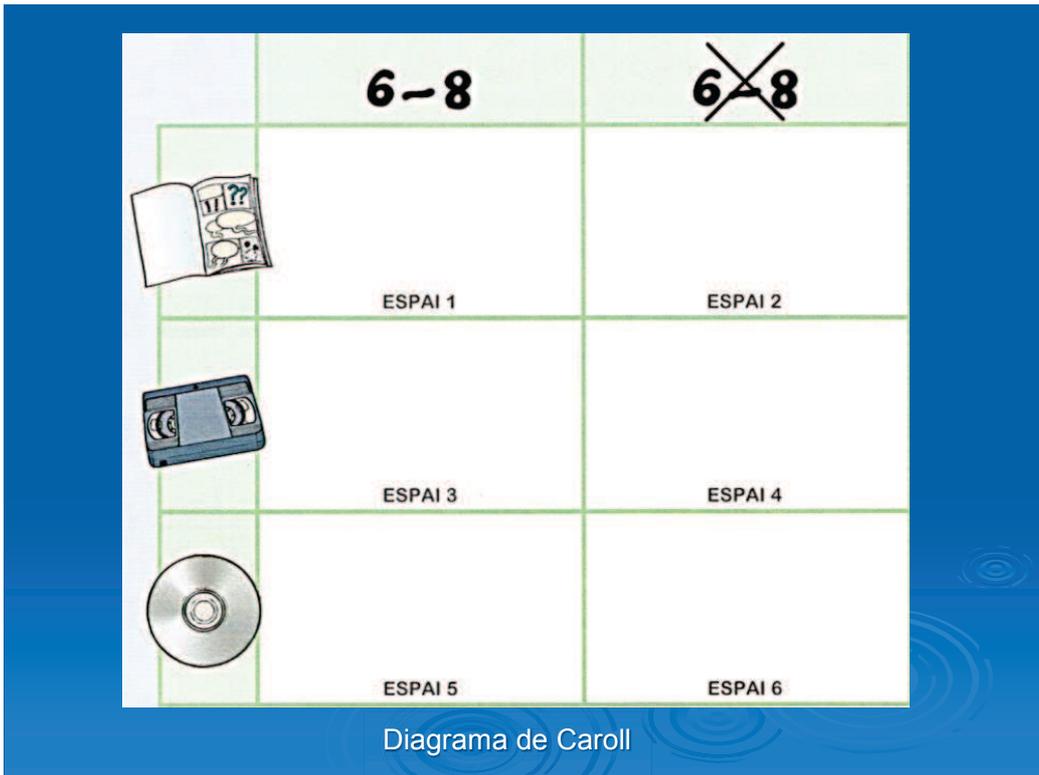


Fuente: Alsina, À. (2004). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos para niños y niñas de 6 a 12 años*. Madrid: Narcea S.A. de Ediciones (6a edición, 2015)

Alsina, À. (2004). *Barrinem? Matemàtiques amb jocs i problemes*. Vic: Edicions l'Àlber.

ENTRETENIMIENTO	TEMA	EDAD
Còmic Vídeo DVD Libro	Aventuras Misterio Risa Terror	6-8 años 9-10 años 11-12 años
4 atributos x	4 atributos x	3 atributos = 48 PIEZAS





Relaciones de equivalencia: clasificaciones



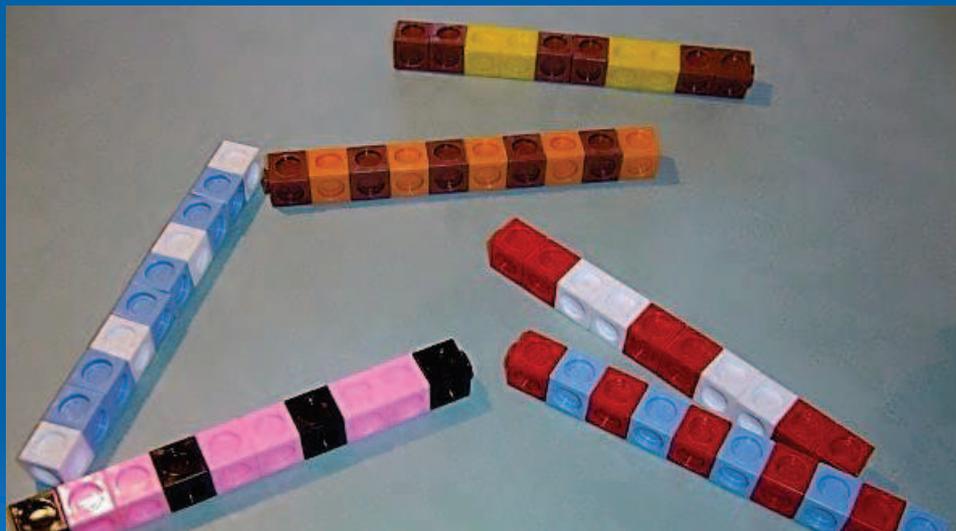
Relaciones de orden: ordenaciones



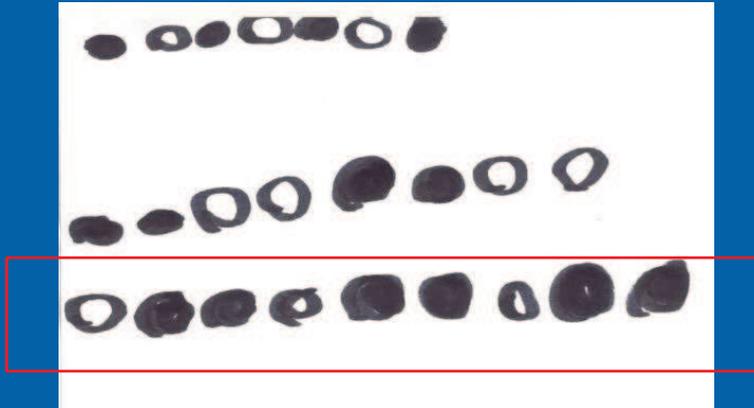
Correspondencias cualitativas: asociaciones (cuadros de doble entrada/producto cartesiano)



Patrones de repetición



Análisis, comparación y representación de patrones



ABBABBABB

XOOXOOXOO

+ - - + - - + - -

Búsqueda de regularidades

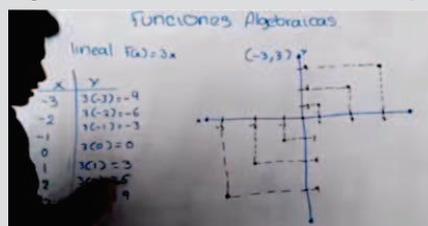
1. Seriación con un patrón ABB



2. Análisis de la regularidad interna a través de una tabla

Patrón	Cuadrados rojos	Cuadrados azules	Cuadrados en total
1 módulo	1	2	3
2 módulos	2	4	6
3 módulos	3	6	9
.../...			
n módulos	x	2x	3x

3. Noción de función algebraica (Educación Secundaria): función lineal de primer grado $f(x) = 3x$



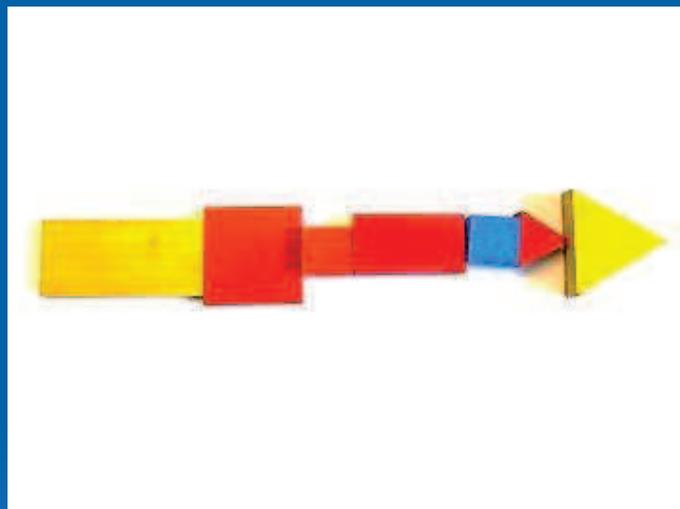


Patrones de crecimiento con polícubos: seguir la serie de los números cuadrados y encontrar la expresión general.

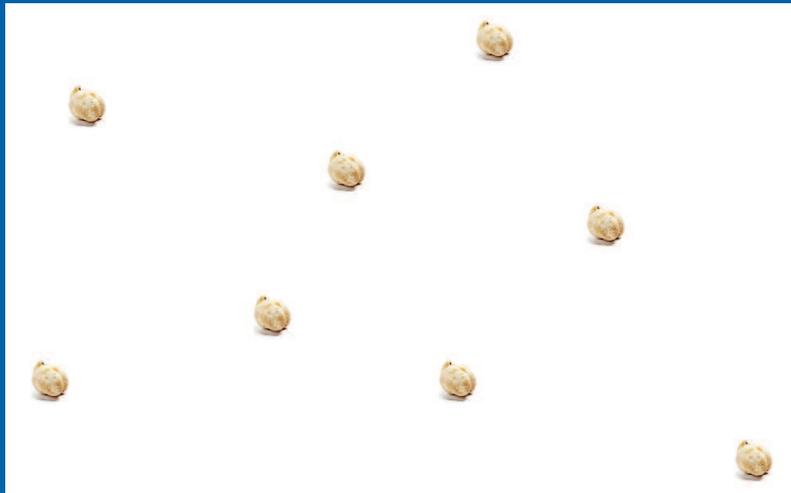
Análisis de cambios cualitativos: operadores lógicos directos



operadores lógicos inversos



Análisis de dos (o más) cambios constantes, con los Bloques Lógicos: se parte de una pieza y para colocar la siguiente deben cambiar dos cualidades (por ejemplo: rectángulo amarillo, grande y delgado; cuadrado rojo, grande y delgado (forma y color); cuadrado rojo, pequeño y grueso (tamaño y grosor); etc.



Análisis de situaciones con **tasas de cambio crecientes** (Cardet, 2009): analizar cuántos triángulos se generan con 3, 4, 5, 6, 7, 8 ... garbanzos y generalizar.

Fase 2: Recursos literarios y tecnológicos.

Recursos literarios

- Los cuentos se han usado habitualmente para trabajar contenidos de numeración y cálculo, geometría, etc.
- Si bien es cierto que muchos de ellos inciden en aspectos vinculados a la numeración o a la geometría, **la verdadera aportación es la presencia de patrones** que abren la posibilidad de predecir, de anticipar lo que va a suceder, de buscar regularidades, de generalizar.
- En los cuentos se pueden encontrar **patrones de repetición, patrones de crecimiento/decrecimiento** e incluso **estructuras de correspondencia entre elementos de dos conjuntos**.

- **Los patrones de repetición** se encuentran en cuentos clásicos adecuados principalmente para los alumnos de los primeros niveles, como “La Ratita Presumida” en el que **la estructura del cuento sigue siempre el mismo patrón, pero con un cambio al final que advierte que, aunque los patrones sirven para predecir o anticipar lo que va a suceder, hay que estar atentos a los cambios y comprobar si las predicciones se cumplen o no.**

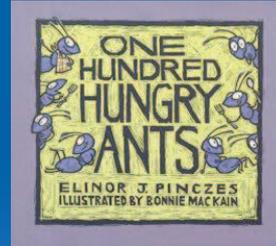


- **Los patrones de crecimiento/decrecimiento** se encuentran en cuentos con una estructura que se caracteriza por una **sucesión de personajes o eventos que se presentan en orden ascendente o descendente respectivamente.**
- La suma de estos personajes o eventos es lo que permite, al final, conseguir el objetivo.



“A qué sabe la luna”

Patrón de crecimiento (secuencia de personajes que, juntos, alcanzan la luna)

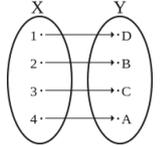


“Cien hormigas hambrientas”

Patrón de decrecimiento: secuencia de sucesos centrados en la descomposición del 100 en sumandos cada vez menores.

- Finalmente, **las correspondencias entre elementos de dos conjuntos** se encuentran en cuentos cuya estructura se basa en un personaje que tiene una misión por cumplir, se presentan obstáculos y debe buscar estrategias para superarlos, estableciendo así una correspondencia “obstáculo-solución”, como por ejemplo “El sastrecillo valiente” o bien otras narraciones de héroes.



$1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \dots$	\dots $1 + 1 + 1$ $1 + 1$ 1	 <p>X "obstáculos" Y "soluciones"</p>
"La Ratita Presumida"	"A qué sabe la luna"	"El sastrecillo valiente"

Recursos tecnológicos I: calculadora



- **Exploración de patrones numéricos:** muchas calculadoras básicas, al teclear un número cualquiera (por ejemplo el 2), el signo más (+) y a continuación el signo igual (=) de manera repetida, van presentando una progresión o sucesión aritmética: 2, 4, 6, 8, 10 ...
- **Realización de conjeturas:** realizar predicciones, como por ejemplo estimar qué número saldrá al teclear 10 veces el mismo sumando (+2) en las progresiones aritméticas.
- En los niveles superiores se puede plantear que generalicen a "n" casos y lo representen algebraicamente: $2n$.

Recursos tecnológicos II: *Applets*

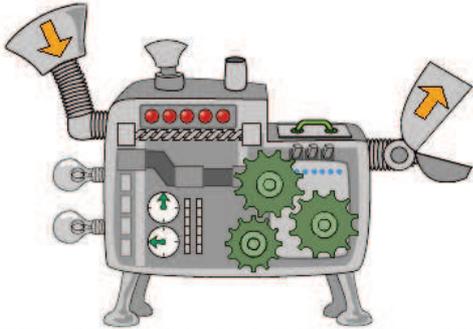
- NRICH (<https://nrich.maths.org>)
- Illuminations (<https://illuminations.nctm.org>)
- Math Playground (<http://www.mathplayground.com>)
- Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales (<http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html>)
- Proyecto Canals (<http://recursostic.educacion.es/canals/web>)
- PuntMat (<http://appletspuntmat.blogspot.com.es>)

Máquina para analizar funciones:

http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_191_g_4_t_2.html?from=category_g_4_t_2.html

1
2
3
4

Arrastra cada número dentro de la máquina y busca el patrón que te permitirá completar la tabla.

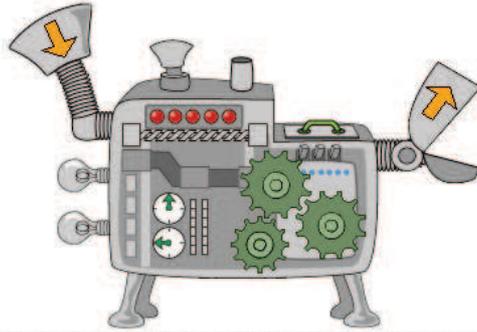


Entrada	Salida
5	
6	
7	

Función Nueva

Arrastra cada número dentro de la máquina y busca el patrón que te permitirá completar la tabla.

2
3
4

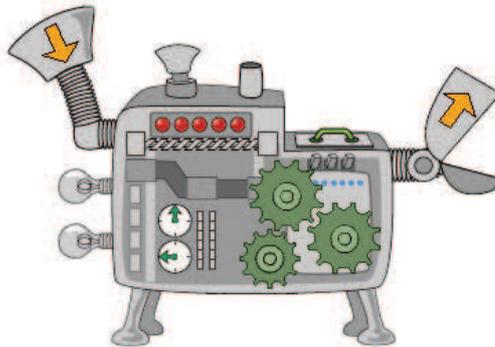


Entrada	Salida
1	2
5	
6	
7	

Función Nueva

Arrastra cada número dentro de la máquina y busca el patrón que te permitirá completar la tabla.

3
4

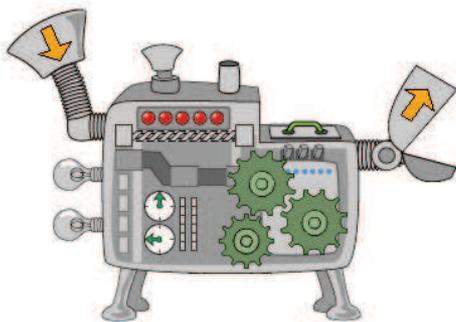


Entrada	Salida
1	2
2	4
5	
6	
7	

Función Nueva

Arrastra cada número dentro de la máquina y busca el patrón que te permitirá completar la tabla.

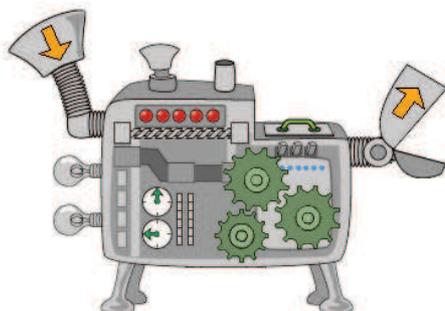
4



Entrada	Salida
1	2
2	4
3	8
5	
6	
7	

Función Nueva

Arrastra cada número dentro de la máquina y busca el patrón que te permitirá completar la tabla.

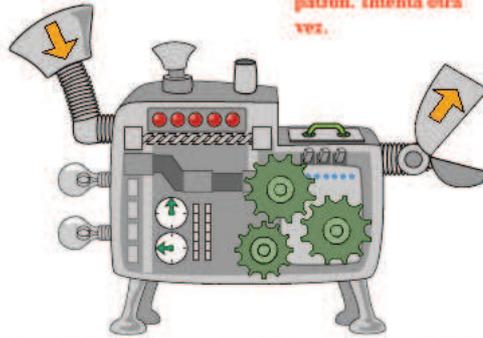


Entrada	Salida
1	2
2	4
3	8
4	16
5	
6	
7	

Función Nueva

Arrastra cada número dentro de la máquina y busca el patrón que te permitirá completar la tabla.

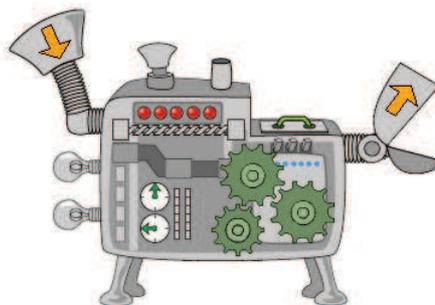
Eso no coincide con mi patrón. Intenta otra vez.



Entrada	Salida
1	2
2	4
3	8
4	16
5	18
6	
7	

Función Nueva

Arrastra cada número dentro de la máquina y busca el patrón que te permitirá completar la tabla.



Entrada	Salida
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128

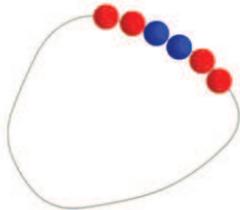
Función Nueva

Instituto Freudenthal (Universidad de Utrecht, Holanda)

<http://www.fi.uu.nl/toepassingen/03047/taak0.html>

"Tenemos bolas de tres colores: amarillas, azules y rojas, y queremos hacer un collar de 24 bolas. Haciendo series que combinen los colores, ¿qué collares podemos hacer?"

	patroon	armband
goud		
blauw	2	
rood	4	
totaal	6	

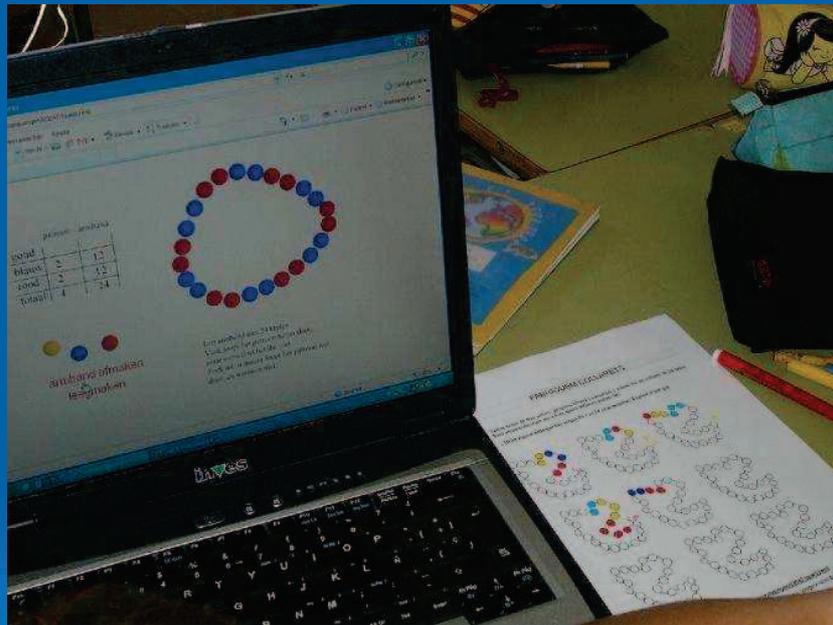


armband afmaken
leegmaken

Een armband met 24 kralen.
Vaak loopt het patroon netjes door,
maar soms doet het dat niet.
Zoek uit: wanneer loopt het patroon wel
door, en wanneer niet?



Los alumnos trabajan por parejas.



Cada vez que una pareja de alumnos piensa un patrón lo va completando hasta llegar a 24, comprobando si el collar cierra o no. Después lo representan en el papel.



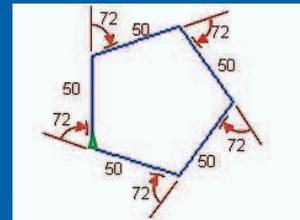
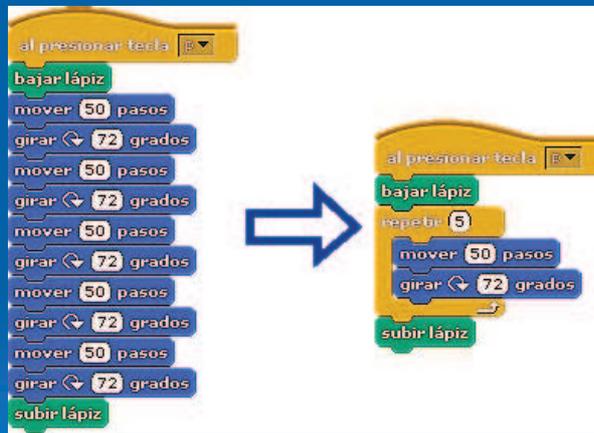
La maestra supervisa la acción de los alumnos. No da instrucciones, sino que ofrece ayuda cuando alguna pareja no avanza.

➤ Se recogen las investigaciones realizadas por los alumnos en la pizarra:

- Con 2 elementos ---- cierra.
- Con 3 elementos ---- cierra.
- Con 4 elementos ---- cierra.
- Una pareja explica que han tratado de hacerlo con 5 elementos y que han visto que no era posible.

➤ Escriben las series numéricas según el número de elementos del patrón:

- 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24.
- 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24.
- 4, 8, 12, 16, 20, 24.
- 5, 10, 15, 20, 25.....pasa.
- 6, 12, 18, 24.
- 8, 16, 24



Fase 3: Recursos gráficos

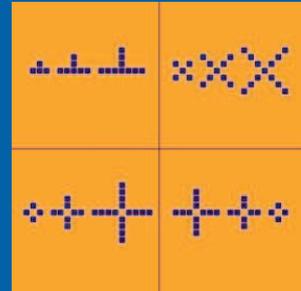
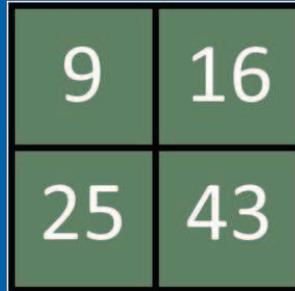
Preguntas sobre números (origen histórico del álgebra)

PREGUNTA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
¿Qué número, más 4, da 10 de resultado?	$4 + ? = 10$
¿Qué número, multiplicado por 4, da 20?	$? \times 4 = 20$
¿Qué número fraccionario, multiplicado por 2, da 1?	$? \times \frac{1}{2} = 1$
¿Qué número decimal, sumado a 4.8, da 5 de resultado?	$4.8 + ? = 5$

Escritura de expresiones algebraicas

FRASE	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
La suma de 5 y un número	$5 + d$ (la "d" representa la cantidad desconocida)
2 más que un número	$x + 2$
La diferencia entre un número y 1	$a - 1$
6 menos que n	$n - 6$
Un número aumentado en 4	$k + 4$

Which One Doesn't Belong? WODB



<https://www.instagram.com/p/BgcJ12dAZiz/>

<https://wodb.ca>

Los alumnos deben argumentar críticamente en qué son iguales y en qué son diferentes

3. Conclusiones

- Los diferentes contextos de enseñanza-aprendizaje de las matemática (situaciones de vida cotidiana, materiales manipulativos, TICs, etc.) **no contribuyen por ellos mismos al desarrollo de la competencia matemática en general y del pensamiento algebraico en particular.**
- Una actividad es rica en función de **cómo se plantea la actividad** y de **cómo se gestiona en el aula.**

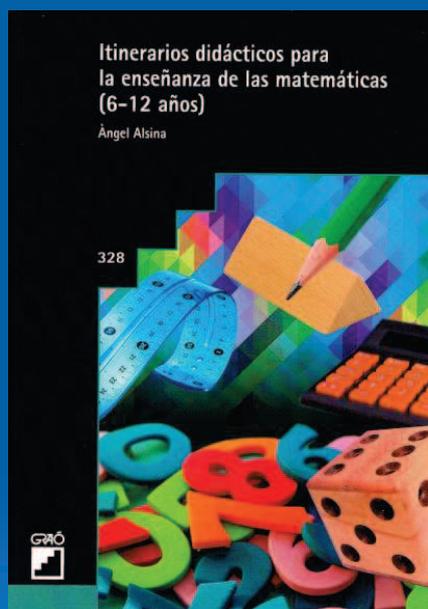
➤ **Con respecto al planteamiento, es interesante preguntarse**

- ¿Es una actividad que tiene por objetivo responder una pregunta, resolver un reto?
- ¿Permite aplicar conocimientos ya adquiridos y hacer nuevos aprendizajes?
- ¿Ayuda a relacionar conocimientos diversos dentro de la matemática o con otras materias?
- ¿Es una actividad que se puede desarrollar de diferentes formas y estimula la curiosidad y la creatividad del alumnado?
- Implica el uso de instrumentos diversos como por ejemplo material que se pueda manipular, herramientas de dibujo, programario, calculadora, etc.?

➤ **En la gestión de la actividad, es interesante preguntarse**

- ¿Se fomenta la autonomía y la iniciativa del alumnado?
- ¿Se interviene a partir de preguntas adecuadas más que con explicaciones?
- Se pone en juego el trabajo y el esfuerzo individual pero también el trabajo en parejas o en grupos para dialogar, argumentar, convencer, consensuar, etc.?
- ¿Implica razonar sobre lo que se ha hecho y justificar los resultados?
- ¿Se avanza en la representación de manera cada vez más precisa y se usa progresivamente lenguaje matemático más adecuado?

**ALGUNAS
REFERENCIAS
BIBLIOGRÁFICAS**



Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Barcelona: Editorial Graó.



**Facebook: Educación Matemática Infantil y Primaria /
EMIP-Alsina**

angel.alsina@udg.edu

Universitat de Girona
Grup de Recerca
en Educació Científica
i Ambiental
GRECA