ESTRATEGIAS DE INVESTIGACIÓN CUANDO LOS MARCOS TEÓRICOS EXISTENTES NO SON ÚTILES

ANGEL GUTIÉRREZ

Universidad de Valencia

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE
INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Almería, Septiembre 2001

ESTRATEGIAS DE INVESTIGACIÓN CUANDO LOS MARCOS TEÓRICOS EXISTENTES NO SON ÚTILES

ANGEL GUTIÉRREZ
Universidad de Valencia

RESUMEN

En este texto se reflexiona sobre la problemática que surge cuando, al planificar o realizar una investigación, nos damos cuenta de que los marcos teóricos pertinentes existentes no cubren nuestras necesidades. También se muestran dos ejemplos, que permiten observar este fenómeno, de investigaciones en las que sus autores tuvieron que elaborar un nuevo marco teórico porque los existentes eran, en un caso, inadecuados y, en el otro caso, incompletos.

ABSTRACT

This paper is a reflection on the problem raised when, while planing or elaborating a research, researchers realize that available theoretical frameworks don't fit their necessities. Two examples of research were such problem may be observed are presented. In both researches, authors had to elaborate a new theoretical framework because the available ones were either inappropriate or incomplete.

INTRODUCCIÓN

Es normal que un campo de investigación interesante atraiga la atención de diversos equipos, generalmente ubicados en países diferentes. Aunque los equipos se conozcan e intercambien información de vez en cuando, lo más habitual es que cada uno tenga su línea de investigación y sus objetivos, métodos de trabajo, etc., lo cual se traduce en resultados y propuestas diferentes. Esta situación, que por sí misma es enriquecedora, puede llevar a otros investigadores posteriores a tener que resolver algunos conflictos en el momento de determinar un marco de referencia para su propio trabajo:

En algunos casos conviven marcos teóricos diferentes que, al menos en cierta medida, son contradictorios o incompatibles. A los investigadores que empiezan a trabajar en este campo no les queda más remedio que adoptar un marco y rechazar el otro, o rechazar ambos y definir el suyo propio, diferente.

En otros casos, las propuestas publicadas previamente, aunque dentro del mismo marco teórico global, corresponden a diferentes aproximaciones al problema de investigación (por ejemplo, referidos a estudiantes de diferentes niveles educativos, o a distintas variables relevantes). Aquí los nuevos investigadores suelen empezar adoptando una de las líneas de trabajo pre-existentes, pero en ocasiones, una vez que empiezan a analizar los datos que han recogido, se dan cuenta de que ni esa ni ninguna otra aproximación previa les permite obtener respuestas suficientemente satisfactorias para sus cuestiones de investigación.

Ante situaciones como las descritas en los párrafos anteriores, creo que la postura más razonable y productiva es coger el toro por los cuernos, abandonar el refugio cómodo de los trabajos previos y desarrollar nuestro propio marco creando los elementos necesarios para llevar la investigación adelante. En las siguientes páginas describiré dos ejemplos, un de cada tipo, sacados de mi propia actividad. Al primero me referiré brevemente, pues se trata de una investigación que tuvo lugar hace algunos años, es suficientemente conocida por los interesados en este tema, y mi mala memoria no me permite recordar con suficiente detalle algunos momentos clave del proceso. El segundo ejemplo puedo describirlo con más detalle, pues estoy trabajando en él actualmente y, por tanto, tengo todos los detalles a mi alcance.

FRENTE A MARCOS TEÓRICOS INADECUADOS, UN MARCO TEÓRICO DIFERENTE

El "descubrimiento" del modelo de razonamiento matemático de Van Hiele por los investigadores de los países occidentales tuvo lugar tras la publicación de "Mathematics as an educational task" (Freudenthal, 1973) y de una conferencia de I. Wirszup (1976). Durante la década siguiente, vieron la luz resultados de diversas investigaciones dirigidas a estudiar varias componentes de los niveles de Van Hiele y a observar su aplicación a la enseñanza. Las investigaciones más influyentes de esa época (Usiskin, 1982; Fuys, Geddes y Tischler, 1988; Burger y Shaughnessy, 1986) utilizan criterios de evaluación del razonamiento de los estudiantes muy diferentes, basados en tests escritos de elección múltiple en el primer caso o en entrevistas clínicas en los otros.

A pesar de las claras diferencias metodológicas entre las tres investigaciones, comparten el mismo marco teórico, que tiene dos características destacables: i) El resultado de la evaluación del razonamiento de un estudiante es su asignación a *uno* de los niveles de Van Hiele. ii) Hay dificultades para asignar algunos estudiantes a un nivel de razonamiento porque éstos muestran claramente en sus respuestas la presencia de *dos* niveles de razonamiento consecutivos. En las tres investigaciones, los autores justifican estos casos, atípicos pero en cantidad significativa, aludiendo a la posibilidad de que los estudiantes estuvieran en la transición de un nivel al siguiente, pero no van más allá de esta rápida conjetura y no desarrollan el concepto de transición. Por tanto, a pesar de sus diferencias, las tres investigaciones se sitúan en un marco teórico que interpreta los niveles de razonamiento de Van Hiele como una sucesión discreta en la que sólo cuando se ha desarrollado por completo un nivel es posible que comience a desarrollarse el siguiente y en la que, por tanto, la transición de un nivel al siguiente es muy rápida.

Las demás investigaciones sobre el modelo de Van Hiele publicadas en los 80 y principios de los 90 que conozco utilizan de forma más o menos directa la metodología de alguna de las tres publicaciones mencionadas antes, y todas asignan sus estudiantes a un determinado nivel de Van Hiele.

Alrededor de 1988, J.M. Fortuny inició una investigación sobre los niveles de razonamiento de Van Hiele en geometría espacial a la que nos unimos poco después A. Jaime y yo. Aplicar los métodos conocidos de asignación de niveles de Van Hiele no nos resultaba satisfactorio, pues notábamos que debíamos poner "en el mismo cajón" respuestas demasiado diferentes. Además, algunos de los problemas planteados en nuestros experimentos planteaban varias preguntas encadenadas, encontrando casos de estudiantes que mostraban niveles de razonamiento diferentes en las sucesivas respuestas al mismo problema, por lo que no nos parecía razonable asignar estos estudiantes a un nivel de razonamiento despreciando parte de sus respuestas.

Así pues, nos encontramos con la falta de un marco teórico previo adecuado. Como consecuencia de nuestro esfuerzo para avanzar en la investigación, surgió un marco teórico basado en una interpretación de los niveles de Van Hiele con dos características clave que lo diferencian del anterior: i) Reconocer que la transición de un nivel al siguiente puede ser lenta, larga en el tiempo y, por tanto, observable y evaluable. ii) Asumir la estructura jerárquica de los niveles de Van Hiele, pero reconocer la realidad escolar, en la cual es posible que comience a desarrollarse un nivel de razonamiento antes de que el nivel anterior esté completamente desarrollado.

La aplicación de este nuevo marco teórico dio lugar al concepto de los "grados de adquisición" de los niveles de Van Hiele y a una metodología de asignación de estudiantes a los niveles completamente diferente de la usada hasta ese momento. No explicaré aquí en qué consiste esta metodología ni mostraré un ejemplo de aplicación, pues no es mi objetivo en este texto. Ver Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) y Jaime (1993).

A pesar del avance que supuso la definición de este marco teórico, todavía no estaba justificada la posibilidad de que los estudiantes inicien la adquisición de un nivel de razonamiento antes de haber completado la adquisición del anterior. Esto se logró en investigaciones posteriores (Jaime y Gutiérrez 1994; Gutiérrez y Jaime 1995), en las que consideramos cada nivel de razonamiento como integrado por varias habilidades (describir, clasificar, definir, demostrar) que los estudiantes deben desarrollar para adquirir plenamente dicho nivel. Ocurre con frecuencia que la enseñanza escolar potencia unas habilidades más que las otras, por lo que los estudiantes progresan más en el desarrollo de las primeras y, antes de completar la adquisición de un nivel, inician la adquisición del nivel siguiente.

FRENTE A MARCOS TEÓRICOS INCOMPLETOS, UN MARCO TEÓRICO QUE LOS INCLUYA

Un tema por el que la comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas mantiene un interés sostenido desde hace muchos años es el de la adquisición de la capacidad de razonamiento formal y el aprendizaje de los métodos de demostración formal en matemáticas. Rastreando en las bases de datos, se pueden encontrar numerosas publicaciones relacionadas con este tema, si bien sólo unas pocas incluyen aportaciones realmente útiles para entender a los estudiantes de Secundaria y Universidad. Centrándonos en los últimos 25 años, y sin ánimo de ser exhaustivos, podemos considerar el trabajo de Alan Bell como el primero que va más allá de la consideración estricta de las demostraciones formales como único modo admisible de demostración.

Bell (1976 b) plantea que la demostración (formal o no[1]) puede tener diversos objetivos en matemáticas: "Verificación", cuando intenta asegurar la veracidad de una afirmación. "Iluminación", cuando, además de asegurar su veracidad, permite entender por qué es cierta una afirmación. "Sistematización",

[1] Las publicaciones internacionales sobre este tema usan de manera unánime el término "demostración" para referirse a las demostraciones matemáticas formales, pero hay un pequeño caos en el uso de la terminología al referirse a las maneras no formales de convicción: Términos como "explicación", "verificación", "justificación" o "demostración" se usan unas veces para referirse al mismo concepto y otras veces para referirse a conceptos diferentes. En la literatura en español la cosa se complica más porque aparece también "prueba". Mi opción personal es, cuando tengo que elegir uno de los términos anteriores, quedarme con "justificación", aunque creo que deberíamos hablar de "demostraciones formales", "demostraciones no formales" y "demostraciones" (para aludir a ambos tipos a la vez), pues es necesario transmitir al mundo de la enseñanza la idea de que no hablamos de dos cosas diferentes sino de dos aspectos de una misma cosa, la demostración en matemáticas, y ayudar de esta forma a desmitificarla y a que estudiantes y profesores le pierdan el miedo.

cuando permite organizar el enunciado demostrado en un sistema de axiomas, definiciones y otros teoremas. Michael de Villiers desarrolla posteriormente esta línea de investigación describiendo nuevos objetivos para la realización de una demostración (De Villiers, 1993): "Descubrimiento", cuando la demostración conduce al descubrimiento o invención de nuevos conceptos o teoremas. "Comunicación", cuando la demostración tiene como objetivo transmitir conocimientos matemáticos a otras personas. No obstante, con frecuencia los estudiantes no se sienten identificados con ninguno de los objetivos anteriores de las demostraciones. Un elemento clave para entender por qué un estudiante resuelve los problemas de demostrar como lo hace es conocer sus creencias al respecto, es decir qué tipos de argumentos considera convincentes y cuáles no (De Villiers, 1991). En este sentido, un objetivo de la enseñanza de las matemáticas es inducir un cambio en las concepciones de demostración de los estudiantes. Esta línea de investigación queda fuera de mis trabajos, por lo que no me referiré más a ella.

Desde una perspectiva complementaria a la anterior, Bell (1976 a, 1976 b) hace una descripción de diversos tipos de demostraciones no formales producidas por los estudiantes, las cuales representan puntos en el camino hacia el razonamiento y la demostración formales. Identifica dos categorías de demostraciones, las "empíricas", caracterizadas por el uso de ejemplos como elemento de convicción, y las "deductivas", caracterizadas por el uso de elementos deductivos abstractos para conectar los datos (o hipótesis) y la conclusión. En las demostraciones empíricas Bell describe diferentes tipos, que van desde aquéllas que usan ejemplos sin relación directa con el enunciado planteado hasta las que consisten en la verificación sistemática del enunciado en todos los ejemplos posibles (conjunto finito). En cuanto a las demostraciones deductivas, su tipología se basa en diferentes grados de completitud al construir las cadenas de argumentos, desde las fallidas, en las que realmente no existe tal cadena, hasta las completas, cuando se produce una deducción matemáticamente correcta. En la base del estudio de Bell está la concepción de que cada enunciado matemático lleva asociado un conjunto de ejemplos (finito o no) y que para demostrar la veracidad del enunciado hay que verificar todos sus ejemplos. Por este motivo, su tipología analiza la completitud de los conjuntos de ejemplos usados por los estudiantes.

Otra de las referencias obligadas en la investigación sobre los procesos de aprender a demostrar es el trabajo de Nicolas Balacheff. En su tesis doctoral (Balacheff, 1988), este autor da un paso adelante sobre los resultados de Bell introduciendo una clasificación más amplia de tipos de demostración, en la cual el énfasis no está sólo en la relación entre los ejemplos usados y el enunciado que se quiere demostrar, sino en el motivo por el que los estudiantes usan los ejemplos. Esta investigación se basa en un experimento cuyo fin es analizar las respuestas de un grupo de estudiantes a varios problemas de demostrar. Balacheff identifica dos categorías de demostraciones, las "pragmáticas", basadas en manipulaciones o en ejemplos concretos, y las "conceptuales", basadas en la formulación abstracta de propiedades matemáticas y de relaciones deductivas entre ellas. En la categoría de demostraciones pragmáticas describe los tipos de "empirismo naïf", basado en la verificación del enunciado que hay que demostrar en unos pocos ejemplos, normalmente elegidos de manera aleatoria, "experimento crucial", basado en la selección cuidadosa de un ejemplo con el convencimiento de que si la conjetura es cierta en este ejemplo, lo será siempre, y "ejemplo genérico", basado en la selección y manipulación de un ejemplo que actúa como representante de su clase, por lo que la demostración, aunque sea particular, pretende ser abstracta y tener validez para toda la clase representada. Entre las demostraciones conceptuales, Balacheff distingue el "experimento mental", cuando los estudiantes interiorizan las acciones realizadas previamente (generalmente observación de ejemplos), las disocian de esas acciones concretas y las convierten en argumentos abstractos deductivos, y el "calculo simbólico", cuando la demostración se basa en la transformación de expresiones simbólicas formales.

Probablemente porque los resultados proceden de experimentos con estudiantes de secundaria, no suficientemente avanzados, la tipología de Balacheff no analiza en profundidad las demostraciones formales.

Más recientemente, Harel y Sowder (1998) han propuesto varios "esquemas de demostración", tipos de justificaciones que convencen a los estudiantes y que ellos usan para convencer a otros estudiantes y al profesor. Estos autores identifican tres categorías de esquemas de demostración: Los de "convicción externa", aquéllos en los que se alude a una autoridad externa al propio problema, los "empíricos", cuando la justificación está formada por ejemplos, y los "analíticos", cuando la justificación se basa en argumentos abstractos y deducciones lógicas. En los esquemas de convicción externa, estos autores distinguen entre los "autoritarios", basados en la autoridad de un profesor, libro de texto, etc., los "rituales", basados en la forma como está presentada la demostración, y los "simbólicos", basados en la manipulación algorítmica de símbolos y expresiones. En los esquemas empíricos distinguen los "perceptivos", basados en la observación de ejemplos concretos de tipo gráfico, y los "inductivos", cuando la demostración consiste en comprobar la validez del enunciado en uno o varios ejemplos concretos. Finalmente, en los esquemas analíticos distinguen los "transformativos", basados en operaciones sobre objetos y anticipación de su resultado, que luego son convertidos en argumentos deductivos, y los "axiomáticos", formados por cadenas deductivas basadas en elementos de un sistema axiomático.

A modo de resumen global, podemos observar que las tres clasificaciones de demostraciones descritas son coherentes entre sí, útiles para analizar las respuestas de los estudiantes, pero parciales: Bell plantea sólo dos tipos válidos de demostración, verificación más o menos exhaustiva de ejemplos y demostración formal, en una propuesta que ignora la importante componente cognitiva del significado que tienen las demostraciones para los estudiantes. Balacheff analiza detalladamente las demostraciones pragmáticas (empíricas), observando cómo y por qué se seleccionan los ejemplos, pero no hace lo mismo con las conceptuales (deductivas), pues no presta atención a las formas de usar los ejemplos para organizar argumentaciones deductivas ni a las formas de construir demostraciones formales. Por último, Harel y Sowder analizan detalladamente los esquemas analíticos (deductivos), observando diferentes operaciones mentales que dan lugar a estas demostraciones, pero no hacen lo mismo con los esquemas empíricos, en los que sólo distinguen si se utilizan ejemplos visualmente o matemáticamente.

La tendencia actual de la didáctica de las matemáticas a prestar atención destacada a los aspectos psicológicos y cognitivos del aprendizaje indica que los modelos de Balacheff y Harel y Sowder son los que resultan más útiles como marco para el aprendizaje de los procesos de demostración. Por tanto, es razonable intentar integrar estos modelos en uno sólo, si bien esta integración no puede hacerse simplemente superponiendo un modelo a otro. En un proyecto de investigación desarrollado en la Universidad de Valencia, hemos analizado la actuación de estudiantes de ESO al resolver problemas de demostrar en un entorno Cabri. Al iniciar las primeras etapas de dicho análisis, nos dimos cuenta de que ninguno de los modelos que acabo de describir nos resultaba útil, por lo que decidimos definir una nueva clasificación de demostraciones que contuviera las anteriores pero que las desarrollara, teniendo en cuenta también las lagunas que habíamos detectado en ellas.

1) En primer lugar, igual que los investigadores citados, nosotros consideramos dos grandes categorías de demostraciones:

a) *Demostraciones empíricas:* Demostraciones en las que el elemento de convicción es la verificación de la propiedad en ejemplos.

b) *Demostraciones deductivas:* Demostraciones en las que el elemento de convicción son argumentos descontextualizados de ejemplos concretos y basados en propiedades generales, operaciones mentales abstractas y deducciones lógicas.

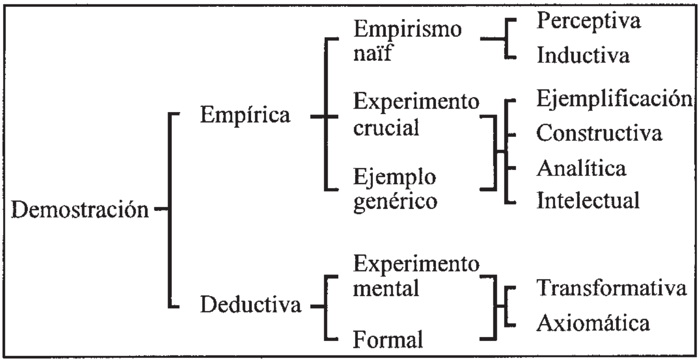
2a) Distinguimos tres familias de demostraciones empíricas, dependiendo de la *forma de selección de los ejemplos,* cada una de las cuales, a su vez, incluye varios tipos correspondientes a diferentes *formas de uso de los ejemplos* seleccionados en la demostración:

- Empirismo naïf: Los estudiantes seleccionan varios ejemplos sin ningún criterio específico. En unas ocasiones la verificación de la propiedad se hace táctil o visualmente (tipo "perceptivo") y en otras se hace observando propiedades o elementos matemáticos del ejemplo (tipo "inductivo").
- Experimento crucial: Los estudiantes son conscientes de la necesidad de generalización y la resuelven mediante la selección cuidadosa de un ejemplo "lo menos particular posible" (Balacheff, 1987), convencidos de que si el enunciado es válido en este ejemplo, lo es siempre (Balacheff, 1988), si bien éste no deja de tener carácter de ejemplo específico. Los experimentos cruciales pueden ser "ejemplificación", cuando la demostración consiste sólo en mostrar la existencia del ejemplo crucial, "constructivo", cuando la demostración incide en la forma de obtención del ejemplo, "analítico", cuando la demostración se basa en propiedades matemáticas observadas empíricamente, e "intelectual", cuando la demostración intenta separarse de las observaciones empíricas y se basa en propiedades matemáticas aceptadas y relaciones deductivas entre elementos del ejemplo.
- Ejemplo genérico: Los estudiantes, conscientes de la necesidad de generalización, seleccionan un ejemplo al que dan el carácter de representante de su clase. La demostración está formada por razonamientos abstractos referidos a propiedades y elementos generales de la clase pero obtenidos a partir de operaciones o transformaciones hechas con el ejemplo. En los ejemplos genéricos distinguimos los mismos tipos que en los experimentos cruciales (ejemplificación, constructivo, analítico e intelectual), si bien en este caso las demostraciones no se limitan a reflejar la actividad empírica, sino que la transforman en referencias a propiedades abstractas de la clase del ejemplo y a razonamientos deductivos que las ligan.

2b) Distinguimos dos familias de demostraciones deductivas, dependiendo de la forma de construirlas:

- Experimento mental: La demostración, aun siendo deductiva y abstracta, está organizada con la ayuda de un ejemplo, lo cual se nota a veces en que la demostración tiene un desarrollo temporal. Distinguimos dos tipos de experimentos mentales, los "transformativos", cuando la demostración se basa en una transformación del enunciado o conjetura inicial en otro equivalente, y los "axiomáticos", cuando la demostración es una cadena de implicaciones lógicas basada en definiciones, axiomas o propiedades aceptadas. El ejemplo ayuda, respectivamente, a prever las transformaciones más convenientes y a organizar la cadena de implicaciones.
- Demostración formal: Es el tipo de demostración, formada por cadenas de deducciones lógicas formales y sin soporte de ejemplos, usual en los trabajos de los matemáticos profesionales. También ahora es posible encontrar los dos tipos anteriores de demostración (transformativo y estructural), con la diferencia de que en las demostraciones formales no se usa ningún ejemplo como ayuda.

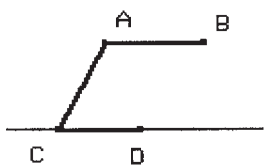
El siguiente diagrama resume la clasificación que acabo de describir. Como indicaba más arriba, se trata de una clasificación que contiene y desarrolla las clasificaciones de Balacheff y Harel y Sowder, pues intenta ser completa y englobar todo tipo de demostraciones. Al mismo tiempo, es suficientemente detallada como para permitir hacer distinciones finas entre unas demostraciones y otras y ser útil a investigadores y profesores que quieran valorar la habilidad de realización de demostraciones matemáticas de estudiantes y su progreso en la realización de demostraciones matemáticas.



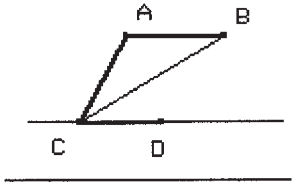
Para completar la descripción de este modelo de clasificación de demostraciones, presento un ejemplo de la resolución de un problema de demostrar por una pareja de estudiantes y el análisis de esta demostración. Dicho ejemplo forma parte de una unidad de enseñanza de geometría para estudiantes de 4º de ESO basada en el uso de Cabri y formada por 30 actividades. En este experimento tratábamos de verificar la utilidad del software de geometría dinámica para ayudar a los estudiantes a mejorar sus destrezas de demostración. Se trataba de estudiantes que nunca antes habían tenido contacto con otro tipo de demostraciones que no fuera el empirismo naïf, en particular mediante arrastre en la pantalla de Cabri.

El experimento se realizó en un grupo completo como parte de sus clases normales. Los estudiantes trabajaban por parejas y se les pedía que dieran una respuesta común de la pareja. La recogida de datos se realizó mediante varias fuentes de información: Las respuestas escritas de los estudiantes, los archivos de Cabri con las construcciones realizadas, los registros de pantalla realizados por el comando “sesión”, y entrevistas, grabadas en video, a algunas parejas después de resolver determinados problemas. Más información sobre esta investigación puede encontrarse en Marrades y Gutiérrez (1998). Uno de los problemas propuestos (actividad 20) es el siguiente:

DIBUJA una figura que cumpla las siguientes condiciones:
1. El segmento AB es paralelo al segmento CD (es decir, AB//CD).
2. El segmento AB mide lo mismo que el segmento AC (es decir, AB = AC).



Asegúrate de que la figura construida sigue cumpliendo las condiciones de partida sea cual sea la transformación debida a la acción de ratón arrastrando diferentes puntos.
3. Dibuja el segmento CB.



INVESTIGA: ¿Es el segmento CB la bisectriz del ángulo ∠ACD?

DEMUESTRA la respuesta afirmativa o negativa a la pregunta anterior. Se supone que la conclusión a la que has llegado es cierta, pero ¿POR QUÉ ES CIERTA? Es necesario basarse en propiedades geométricas ya estudiadas y aceptadas en clase.

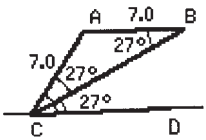
Los siguientes párrafos resumen la resolución de este problema por una pareja de estudiantes. Los textos entre corchetes son míos para ayudar a entender las respuestas de los estudiantes.

(1) Los estudiantes empiezan intentando crear la figura pedida. Utilizan el arrastre para verificarla, detectan algunos errores de construcción, los corrigen y usan el arrastre de nuevo.

(2) Cuando la figura ya está bien construida, añaden las medidas de AB, AC, ∠BCA y ∠BCD, y construyen el segmento BD para verificar si la conjetura es cierta en los paralelogramos. Sin embargo, al arrastrar puntos de la figura, los estudiantes descubren que a veces ABDC no es un paralelogramo, por lo que borran BD y comienzan de nuevo.

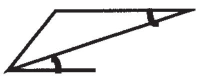
Durante la entrevista, los estudiantes explican que habían añadido el segmento BD por *la regla del paralelogramo, que estos dos triángulos* [ΔABC y ΔBCD] *son siempre iguales.*

(3) Los estudiantes añaden la medida de ∠ABC [ver la figura]. Mediante arrastre, comprueban que ∠ABC, ∠ACB y ∠BCD son siempre congruentes.



(4) A continuación, los estudiantes dibujan la figura y escriben una demostración de la congruencia de ∠ABC y ∠BCD:

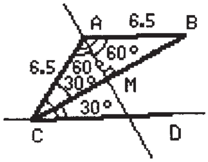
- *∠BCD = ∠ABC porque son alternos internos.*
- *(∠ACB + ∠ext C) + ∠ABC = 180° (interiores consecutivos).*
- AB = AC.
- AB // CD.



Con ∠ext C denotan el suplementario de ∠ACD. Después de demostrar la congruencia de esos dos ángulos, consideran que la medida de ∠ABC ya no les hace falta y la borran. Es interesante observar que, en las líneas anteriores, los estudiantes tienen todos los elementos necesarios para completar la demostración de la congruencia pedida, pero no se dan cuenta de que ΔABC es isósceles.

En la entrevista, los estudiantes explicaron que creían que ya podían escribir una demostración: *Después de tener esto* [la congruencia de los ángulos], *intentamos demostrar que ∠ACB es igual a ∠ABC y lo hacemos por construcción.*

(5) Los estudiantes construyen la recta perpendicular a BC por A, marcan el punto M de corte de esta recta con BC, y miden los ángulos ∠CAM, ∠BAM y ∠AMB [ver la figura]. A continuación comprueban, mediante arrastre, que AM es la bisectriz de ∠CAB observando que ∠CAM y ∠BAM son siempre congruentes.



(6) Por último, los estudiantes escriben en su hoja de respuestas una demostración:

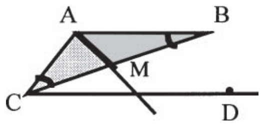
- Si AB = AC y AB // CD entonces ∠BCD = ∠ABC por alternos internos y ∠ACB = ∠ABC por el 2º criterio [de congruencia] *= dos lados y un ángulo comprendido: (*)*

AB = AC un lado.

AM común.

∠CAM = ∠BAM el ángulo comprendido.

Por tanto, si (*) entonces ∠ACB = ∠ABC.



En esta solución podemos identificar dos partes: En la primera, (2) a (5), los estudiantes añaden algunos elementos auxiliares (rectas o segmentos) y realizan mediciones para verificar empíricamente igualdades de segmentos o de ángulos. Durante este proceso encuentran algunos datos útiles, (3) y (5), que les permiten escribir una demostración completa (6). La demostración está organizada siguiendo un esquema deductivo, con justificaciones abstractas basadas en propiedades generales aceptadas previamente, independientes de los valores específicos de los ángulos en la pantalla, y sin referencias a las igualdades observadas empíricamente como fuente de certeza. La única excepción es la congruencia de ∠CAM y ∠BAM, comprobada empíricamente en (5) y usada en (6) como una propiedad cierta, pero no demostrada explícitamente. Por lo tanto, se trata de una demostración empírica mediante ejemplo genérico de tipo intelectual.

La catalogación de las respuestas a este problema mediante la clasificación de demostraciones propuesta por Balacheff es menos fina que la planteada por nuestra tipología, pues podemos encontrar respuestas de estudiantes a este problema que quedan incluidas en la misma clase de Balacheff, por ejemplo ejemplos genéricos, pero que, debido a que hacen distintos usos de los ejemplos, corresponden a distintos tipos en nuestra clasificación. Algo parecido ocurre con la clasificación de Harel y Sowder, pues estos autores no analizan suficientemente los esquemas de demostración empíricos. En cuanto a la clasificación de Bell, no es aplicable a este problema debido a que el entorno Cabri impone unos modos de uso de los ejemplos diferentes de los subyacentes en el marco de Bell.

REFERENCIAS

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18,* 147-176.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège,* 2 vols. Tesis de estado. Univ. J. Fourier, Grenoble, Francia.

Bell, A.W. (1976 a). *The learning of general mathematical strategies.* Tesis doctoral. Shell Center for Mathematical Education, Nottingham, G.B.

Bell, A.W. (1976 b). A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7* (1), 23-40.

Burger, W.F., y Shaughnessy, J.M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17* (1), 31-48.

De Villiers, M. (1991). Pupils' needs for conviction and explanation within the context of geometry. *Pythagoras, 26,* 18-27.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon, 26,* 15-29.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht, Holanda: D. Reidel.

Fuys, D., Geddes, D., y Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph, 3.*

Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1995). Towards the design of a standard test for the assessment of the student's reasoning in geometry. En *Proceedings of the 19th PME conference, 3,* 11-18.

Gutiérrez, A., Jaime, A., y Fortuny, J.M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22* (3), 237-251.

Harel, G., y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A.H. Schoenfeld, J. Kaput, y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education, III* (pp. 234-283). Providence, EE.UU.: American Mathematical Society.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.* Tesis doctoral. Universidad de Valencia, Valencia.

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1994). A model of test design to assess the Van Hiele levels. En *Proceedings of the 18th PME conference, 3,* 41-48.

Marrades, R., y Gutiérrez, A. (1998). Organizing the learning in a Cabri environment for a journey into the world of proofs. En *Proceedings of the 22th P.M.E. Conference, 4,* 276.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* Columbus, EE.UU.: ERIC.

Wirszup, I. (1976). Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry. En J.L. Martin, y D.A. Bradbard (Eds.), *Space and geometry* (pp. 75-97). Columbus, EE.UU.: ERIC.