GRÁFICAS FINITAS

Vianey Córdova-Salazar *, David Herrera-Carrasco** y Fernando Macías-Romero***
*Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, vcordova@alumnos.fcfm.buap.mx **Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, dherrera@fcfm.buap.mx ***Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, fmacias@fcfm.buap.mx

***Abstract*— In this paper we present the concepts of continuum and finite graph, we show some elementary topological properties which have the finite graphs. Some characteristics that they have are the follow: each subcontinua of a finite graph and the union of two finite graphs is also a finite graph. The finale purpose of this paper is the answer the following question: can finite graphs be embedded in the plane?**

***keywords*— Continuum, finite graph, dimenstion, hyperspace.**

***Resumen*— En este trabajo presentamos los conceptos de continuo y de gráfica finita demostramos algunas propiedades topológicas elementales que poseen las gráficas finitas. Entre las características que tienen estas están las siguientes: cada subcontinuo de una gráfica finita es una gráfica finita y la unión de dos gráficas finitas es una gráfica finita. Contestaremos la siguiente pregunta: ¿Las gráficas finitas pueden ser encajadas en el plano?**

***Palabras clave*— Continuo, gráfica finita, dimensión, hiperespacio.**

I. INTRODUCCIÓN

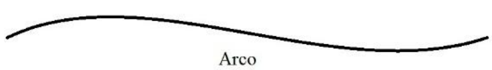
El presente trabajo pertenece a la rama de la topología conocida como Teoría de los Continuos. Dicha temática trata del estudio de las propiedades topológicas de espacios que son métricos, compactos, conexos y no vacíos. A un espacio topológico con las propiedades antes mencionadas se le llama continuo. Un subcontinuo de un espacio topológico X es un continuo contenido en X.

El propósito de este trabajo es presentar algunas propiedades topológicas elementales de las gráficas finitas.

II. CONTINUOS

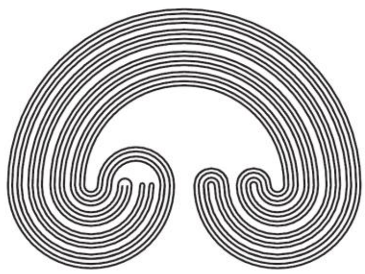
En esta sección revisamos las nociones de continuo, conexidad local, conexidad en pequeño y arco conexidad, estas nociones se usan a lo largo de este trabajo; también presentamos algunos resultados relacionados con estas nociones.

Definición 2.1. Un espacio métrico X es un *continuo* si X es compacto, conexo y no vacío. Dado $Y \subset X$, Y es un *subcontinuo* de X si Y es un continuo.



Arco

Algunos ejemplos de continuos son los siguientes:



Arcoíris de Knaster

Definición 2.1. Un arco es un espacio el cual es homeomorfo al intervalo cerrado [0,1]. Una curva cerrada simple es un espacio el cual es homeomorfo a $S^1 en\, \mathbb{R}^2$ donde

$$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : /x/ = 1\}.$$

A continuación estudiamos los conceptos de conexidad en pequeño, conexidad local y arco conexo, junto con algunas de sus propiedades.

Definición 2.2. Sean X un continuo y $x \in X$. Entonces, X es *localmente conexo en* x, si para cada abierto U en X tal que $x \in U$, existe un abierto y conexo V en X tal que $x \in U \subset V$. Diremos que X es localmente conexo, si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Teorema 2.3. Un espacio topológico X es localmente conexo si, y sólo si toda componente de cada conjunto abierto en X es un conjunto abierto en X.

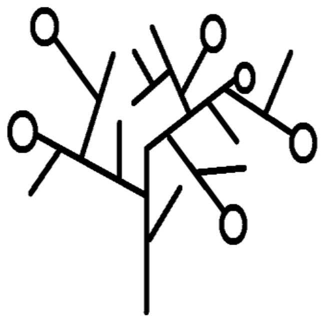
Definición 2.4. *Un espacio topológico X es arco conexo, si para cualesquiera $y,\ x \in X$ con $x \neq y$, existe un arco en X de x a y.*

Los conjuntos abiertos y conexos en un continuo localmente conexo son arco conexos como se cita a continuación.

Teorema 2.5. [2, Teorema 8.26] *Sea X un continuo localmente conexo. Si U es un conjunto abierto en X y conexo*

III Propiedades generales de las gráficas finitas

Definición 3.1. Una *gráfica finita* es un continuo que puede escribirse como la unión de una cantidad finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos son ajenos o bien se intersectan solo en uno o en sus dos puntos extremos.



Teorema 3.2. Si X y Y son gráficas finitas tales que $X \cap Y \neq \emptyset$ y $X \cap Y$ es finita, entonces $X \cup Y$ es una gráfica finita.

Demostración. Como X, Y son gráficas finitas y $X \cap Y \neq \emptyset$, entonces $X \cup Y$ es un continuo. Además, como $X \cap Y$ es finita, para $k \in \mathbb{N}$, podemos denotar la intersección por $X \cap Y = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$. En la unión de X con Y consideramos sólo los arcos que contienen a los puntos $p_1, p_2, \ldots, p_k$, ya que la unión de los arcos de X y Y que no tienen a los puntos $p_1, p_2, \ldots, p_k$, es una unión finita de arcos. Notemos que en cada punto de intersección se generan a lo más cuatro nuevos arcos.

Así, $X \cup Y$ está formada por arcos de X y Y que no se intersecctan, y por aquellos que se generan, los cuales sólo son un número finito de estos arcos con la propiedad de que cualesquiera dos de ellos son ajenos o se intersectan en uno o en sus dos puntos extremos. Por lo tanto, $X \cup Y$ es una gráfica finita.

Definición 3.3. Sean A, un subconjunto no vacío de un espacio topológico X y β un número cardinal. Se dice que A es de **orden menor** o **igual** a β en X, denotado por $ord(A, X) \leq \beta$, si para cualquier conjunto abierto U de X con $A \subset U$ existe un conjunto abierto V de X, tal que $A \subset V \subset U$ y $|fr(V)| \leq \beta$. Si $A = \{p\}$ en lugar de escribir $ord(\{p\}, X) \leq \beta$ sólo se escribirá como $ord(p, X) \leq \beta$. Se dice que A es de **orden** β en X, denotado por $ord(A, X) = \beta$, si $ord(A, X) \leq \beta$ y para cualquier número cardinal $\alpha < \beta$, tenemos que $ord(A, X) \nleq \alpha$.

Teorema 3.4. Si X es un continuo tal que $ord(x, X) < \aleph_0$ para cada $x \in X$, entonces se cumple lo siguiente:

1. Cada subcontinuo de X es un continuo localmente conexo.
2. Cada subcontinuo de una gráfica finita es un continuo localmente conexo.

Demostración. Supongamos que X es un continuo tal que $ord(x, X) < \aleph_0$ para cada $x \in X$. Entonces X no contiene un continuo de convergencia, así, ningún subcontinuo de X contiene un subcontinuo de convergencia. Por lo tanto, cada subcontinuo de X es conexo en pequeño para todo $x \in X$. Luego, cada subcontinuo de X es localmente conexo. La proposición 2. es consecuencia de 1.

Teorema 3.5. Si X es un continuo no degenerado, entonces $ord(p, X) \leq 2$ para todo $x \in X$ si y sólo si X es un arco o una curva cerrada simple.

Demostración. Supongamos que $ord(p, X) \leq 2$ para todo $x \in X$. Luego, por el Teorema 4.4, implicamos que X es un continuo locamente conexo, y claramente X no contiene un triodo simple. Por lo tanto, X es un arco o una curva cerrada simple.

Teorema 3.6. [2, Corolario 9.6] El continuo X es una curva cerrada simple si y sólo si cada punto de X es de orden 2 $en\, X$.

Teorema 3.7. [2, Lema 9.7] Sea X un continuo localmente conexo y $p \in X$ tal que $ord(x, X) = n < \aleph_0$. Entonces existe una base local numerable $\{B_i : i = 1,2,\ldots\}$ de p tal que para cada $i = 1,2,\ldots$, se tiene que B_i es un subconjunto abierto y conexo de X y $|fr(B_i)| = n$.

Definición 3.8. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$. Un **n-odo simple** es un continuo T_n que es una unión de n arcos que se intersectan dos a dos en un punto p el cual es un punto extremo de cada uno de los n arcos. El punto p es llamado el vértice de T_n. En el caso en que $n = 3$, decimos que T_3 es un triodo simple.

Definición 3.9. Sea X una gráfica finita. Un punto p en X es un punto **ordinario** de X si $ord(p, X) = 2$. El punto p es un punto de **ramificación** de X si $ord(p, X) > 2$. Un punto p es un punto **extremo** de X si $\mathrm{ord}(\mathrm{p}, \mathrm{X}) = 1$.

La colección de puntos ordinarios de X, se denota por $O(X)$; la colección de puntos de ramificación de X, se denota por $R(X)$; y la colección de puntos extremos de X, se denota por $E(X)$. De esta forma una gráfica finita X puede expresarse de la siguiente manera $X = E(X) \cup O(X) \cup R(X)$.

Teorema 3.10. [2, Lema 9.9] Sea X un continuo con exactamente un punto p de orden mayor o igual a 3 en X. Si $ord(p, X) = n < \aleph_0$, entonces p es el vértice de un n-odo simple, el cual es una vecindad de p en X.

Teorema 3.11. Sea X un continuo. Entonces X es una gráfica finita si, y sólo si se cumple lo siguiente.

1. Para todo $p \in X$, tenemos que $ord(p, X) < \aleph_0$.
2. Existe un subconjunto finito M en X tal que para todo punto $p \in X - M$, el $\mathrm{ord}(\mathrm{p}, \mathrm{X}) \leq 2$.

Demostración. Si X es una gráfica finita y M es el conjunto de puntos de ramificación, entonces se satisfacen las condiciones (1) y (2).

Probemos la implicación inversa por inducción. Sea X un continuo tal que X cumple las condiciones (1) y (2), y $M = \emptyset$, así X es un arco o una curva cerrada simple, por lo tanto, X es una gráfica finita.

Supongamos por hipótesis de inducción que si X es un continuo que satisface las condiciones (1) y (2), donde M tiene a lo más k puntos, $p_1, p_2, \ldots, p_k$, entonces X es una gráfica finita.

Sea Y un continuo que satisface las condiciones (1) y (2), donde el conjunto M tiene exactamente $k+1$ puntos, supongamos que $M = \{p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}\}$. Como el continuo Y satisface la condición (1), implicamos que Y es un continuo localmente conexo. Así, existe un subconjunto U abierto en Y y conexo U tal que para todo $i \in \{1,2,\ldots,k+i\}$, tenemos que $p_1 \in U$ y $p_i \notin \overline{U}$. Como $p_1 \in U$ y U es un abierto en Y tenemos que $fr_{\overline{U}}(U) = fr_Y(U)$, con ésto implicamos que $ord(p_1, \overline{U}) = ord(p_1, Y)$. Así, $\overline{U}$ es un continuo y p_1 es el único punto de $\overline{U}$, tal que $ord(p_1, \overline{U}) \geq 3$.

Sea $n = ord(p_1, \overline{U})$, por la condición (1), tenemos que $n < \aleph_0$, así implicamos que p_1 es el vértice de un n-odo simple W el cual es una vecindad de p_1 en $\overline{U}$. Veamos que W es una vecindad en Y. Como W es una vecindad de p_1 en $\overline{U}$, existe un abierto O en $\overline{U}$ con $p_1 \in O \subset W$. Sea Q un abierto en Y tal que $O = Q \cap \overline{U}$. Notemos que $p_1 \in Q \cap U$ y $Q \cap U$ \$ es abierto en Y, además $Q \cap U \subset Q \cap \overline{U}$, donde $O = Q \cap \overline{U}$ y $O \subset W$, por lo tanto, W es una vecindad de p_1 en Y. Luego, existe un conjunto abierto y conexo V en Y tal que $p_1 \in V$ con $|fr(V)| = n$ y tal que $\overline{V}$ es un n-odo simple.

Como $fr(Y - V) = fr(V)$, luego $Y - V$ tiene a lo más n componentes $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \ldots, \mathrm{K}_t$ con $1 \leq t \leq n$. Luego, para todo $i \in \{1,2,\ldots,t\}$, tenemos que $p_1 \notin K_i$ así, por hipótesis de inducción podemos asumir que K_i es una gráfica finita. Así, $K_i \cap \overline{V} \neq \emptyset$ y $K_i \cap \overline{V} \subset fr(V)$, ya que para todo $i \in \{1,2,\ldots,t\}$, tenemos que $K_i \cap \overline{V} \subset \overline{V} \cap \overline{Y - V}$. Para todo $i \in \{1,2,\ldots,t\}$, inferimos que $K_i \cap \overline{V}$ es finita, ya que $|fr(V)| = n$. Como $\overline{V}$ es una gráfica finita, tenemos que $\overline{V} \cup K_1$ es una gráfica finita. Luego, $(\overline{V} \cup K_1) \cap K_2 = \overline{V} \cap K_2$, inferimos que $(\overline{V} \cup K_1) \cup K_2$ es una gráfica finita, siguiendo este proceso obtenemos que $\overline{V} \cup K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_t$ es una gráfica finita. Por lo tanto, Y es una gráfica finita.

Teorema 3.12. Cada subcontinuo de una gráfica finita es una gráfica finita.

Demostración. Sean X una gráfica finita, A un subcontinuo de X y $p \in A$. Como $p \in X$, por el Teorema 4.11, tenemos que $ord(p, X) < \aleph_0$. Además, $ord(p, A) \leq ord(p, X) < \aleph_0$ así, $ord(p, X) < \aleph_0$. Tenemos que existe un subconjunto finito M en X tal que para todo $p \in X - M$, el $ord(p, X) \leq 2$. Notemos que $A - M \subset X - M$, así para todo $p \in A - M$ tenemos que $ord(p, A) \leq 2$.

Definición 3.13. Sea X un espacio topológico regular. La dimensión de X, denotada por $dim[X]$ es un entero mayor o igual a -1 o infinito. La definición de dimensión se da recursivamente como sigue:

i $dim[X] = -1$ si, y sólo si $X = \emptyset$.

ii Sean $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $x \in X$. Se dice que la dimensión de X en x es menor o igual que n, denotado por $dim_x[X] \leq n$, si para cada conjunto abierto V en X con $x \in V$, existe un conjunto abierto U en X, tal que $x \in U \subset V$ y $dim[frX(U)] \leq n - 1.$

iii Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces $dim[X] \leq n$ si, y s´olo si para todo $x \in X$, tenemos que $dim_x[X] \leq n.$

iv Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces $dim[X] = n$ si, y s´olo si para cada $x \in X$, tenemos que $dim_x[X] \leq n$ y $dim[X \nleq n - 1.$

v $dim[X] = \infty$ si y s´olo si para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tenemos que $dim[X] \nleq n.$

Lema 3.14. Sean X y Y espacios topológicos regulares y $n \in \mathbb{N} \cup \{-1,0\}$. Si X es homeomorfo a Y y $dim[X] = n$, entonces $dim[Y\,] = n$.

Demostración. La prueba la hacemos por inducción sobre $dim[X]$. Sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo.
Si $dim[X] = -1$, entonces $X = \emptyset$. Como h es suprayectiva, tenemos que $Y = h(X) = h(\emptyset) = \emptyset$. Así, $dim[Y\,] = -1.$
Si suponemos que $dim[X] = m$ con $m \leq n - 1,$ entonces $dim[Y\,] = m.$ Veamos que si $dim[X] = n,$ entonces la $dim[Y\,] = n.$ Sean $y \in Y$ y un conjunto abierto U en Y, tal que $y \in U.$ Como h es suprayectiva, existe $x \in X$ tal que $h(x) = y.$ Además, como h es continua y $y \in U,$ tenemos que $h^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en X tal que $x \in h^{-1}(U)$. Como la $dim[X] = n,$ existe un conjunto abierto V en X tal que $x \in V \subset h^{-1}(U)$ y $dim[frX(V\,)] \leq n - 1.$ Luego, $h(x) \in h(V\,) \subset h(h^{-1}(U))$. Como h es biyectiva, tenemos que $h(h^{-1}(U)) = U.$ Así, $y \in h(V\,) \subset U.$ Como h es una función abierta, tenemos que $h(V\,)$ es un conjunto abierto en Y. Como $dim[fr_X(V\,)] = k \leq n - 1$ y $h|fr_X(V\,) : fr_X(V\,) \to h(fr_X(V\,))$ es un homeomorfismo, por hipótesis de inducción, tenemos que $dim[h(fr_X(V\,))] \leq n - 1.$ Como $h(fr_X(V\,)) = fr_Y\,(h(V\,)),$ tenemos que $dim[fr_Y\,(h(V\,))] \leq n - 1.$ Así, $dim[Y\,] \leq n.$
Veamos que $dim[Y\,] > n - 1.$ Supongamos que $dim[Y\,] = l.$ Por hipótesis de inducción, tenemos que $dim[X] = l$ con $l \leq n - 1.$ Esto es una contradicción porque $dim[X] = n.$ Así, $dim[Y\,] > n - 1.$ Por lo tanto, $dim[Y\,] = n.$

Teorema 3.15. Si J es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$, entonces $dim[J] = 1.$
Demostración. Sean $p \in \mathbb{R}$ y W un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ tal que $p \in W.$ Como $\{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}, con\ a < b\}$ es una base para la topología usual de $\mathbb{R}$, existe un intervalo abierto (a_0, b_0) en $\mathbb{R}$, tal que $p \in (a_0, b_0) \subset W,$ luego $dim[fr_{\mathbb{R}}(a_0, b_0)] = 0,$ así $dim_p[\mathbb{R}] = 1.$ Como p es un punto arbitrario, tenemos que $dim[\mathbb{R}] = 1.$
Sea $J = [a,b]$ en $\mathbb{R}$ con J no degenerado. Notar que $dim_{\mathbb{R}}[J] > 0,$ como $J \subset \mathbb{R}$ y $dim[\mathbb{R}] = 1,$ implicamos que $dim[J] = 1.$

Corolario 3.16. Si A es un arco en un espacio topológico regular X, entonces $dim[A] = 1.$
Demostración. Sea X un espacio topológico y A un arco en $X.$ Como A es homeomorfo a $[0,1]$, por el Lema 4.13,

tenemos que $dim[A] = dim[[0,1]]$. Por el Teorema 2.5, tenemos que $dim[[0,1]] = 1$. Por lo tanto, $dim[A] = 1$.

Definición 3.17. *Dado $n \in \mathbb{N}$, al producto topológico de n intervalos $[0,1]$ se denota con I^n. Una n-celda es un espacio topológico homeomorfo a I^n.*

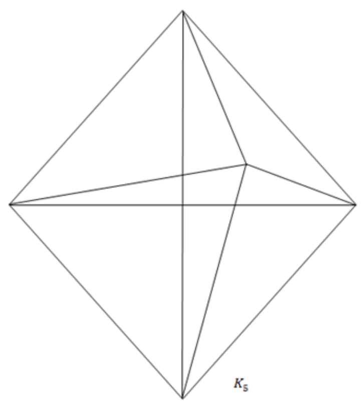
Corolario3.18. *La dimensión de una n-celda es n.*

Teorema 3.19. [2, Lema 9.11] Sea X un continuo tal que existen puntos $x_i \in X$, con $i \in \mathbb{N}$, los cuales satisfacen que $ord(x_i, X) \geq 3$ para cada i y para cada $x_i \neq x_j$ con $i \neq j$. Entonces existe un subcontinuo K de X tal que $ord(K, X) \geq \aleph_0$ y si X es un continuo localmente conexo, entonces existe un subcontinuo L de X tal que $\left|L^{[1]}\right| \geq \aleph_0$, donde $L^{[1]}$ es el conjunto de los puntos extremos de L.

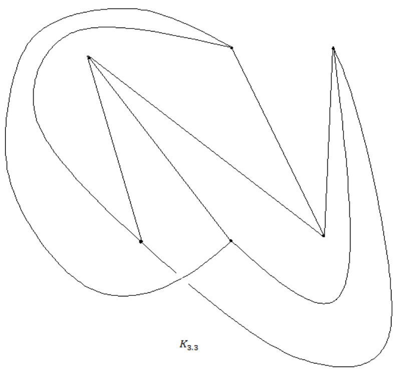
Teorema 3.20. [2, Teorema 9.12] Un continuo X es una gráfica finita si y sólo si $\mathrm{ord(A, X)} < \aleph_0$ para todo subcontinuo A de X.

Teorema 3.21. [2, Teorema 9.13] Un continuo localmente conexo X es una gráfica finita si y sólo si cada subcontinuo de X tiene sólo una cantidad finita de puntos extremos.

Teorema 3.22. [2,Teorema 9.36] Si X es una gráfica finita, entonces X puede ser encajado en $\mathbb{R}^2$ si y sólo si X no contiene la gráfica finita K_5 o la gráfica finita bipartita $\mathrm{K}_{3,3}$. (Vea las siguientes figuras).



K_5



$K_{3,3}$

III. Conclusiones

- Se muestran las características que tienen las gráficas finitas con respecto a la definición de orden.
- La unión de dos gráficas finitas cuya intersección es un conjunto finito, es una gráfica finita.
- Los subcontinuos de una gráfica finita son una gráfica finita.
- Toda gráfica finita se puede encajar en $\mathbb{R}^3$.

Referencias

[1] Córdova-Salazar, V., Herrera-Carrasco, D., Macías-Romero, F. "Gráficas finitas con hiperespacio único $C_n(X)$". *En F. Macías-Romero (Ed.). Matemáticas y sus Aplicaciones 4 (pp. 159-182) (2014). Textos Científicos, Fomento Editorial BUAP.*

[2] Sam B. Nadler, Jr. "Continuum Theory. An introduction". *Monographs and Texbooks in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 158, Maarcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.