Investigaciones sobre dendritas e hiperespacios de continuos

Fernando Macías Romero*, Luis Alberto Guerrero Méndez** y David Herrera Carrasco***
*Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, fmacias@fcfm.buap.mx **Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, luisgm@alumnos.fcfm.buap.mx ***Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, dherrera@fcfm.buap.mx

***Abstract*— In this paper we see the concepts of continuum, dendrites and its hyperspaces for talk about some topological properties of the hyperspaces $C_n(X)$, $F_n(X)$ and $HS_n(X)$. We see some results about uniqueness of hyperspaces.**

***keywords*— Continuum, finite graph, dendrite, unique hyperspace.**

***Resumen*— En este trabajo presentamos los conceptos de continuo, de dendritas y sus hiperespacios para poder comentar sobre algunas propiedades topológicas de los hiperespacios $C_n(X)$, $F_n(X)$ y $HS_n(X)$. Veremos algunos resultados sobre unicidad de hiperespacios.**

Palabras clave— **Continuo, gráfica finita, dendrita, hiperespacio único.**

I. Introducción

Un *continuo* es un espacio métrico, no vacío, compacto y conexo. El estudio sistemático de los continuos comenzó a principios del siglo pasado, principalmente en Polonia, donde personajes como Knaster, Kuratowski y Sierpinski se dedicaron a cultivar esta nueva rama de la matemática. Casi al mismo tiempo se empezaron a estudiar también los hiperespacios.

Los hiperespacios más comunes de un continuo X para son:

$2^X = \{A \subset X :\ A$ es cerrado en X y no vacío$\}$,

$C_n(X) = \{A \in 2^X :\ A$ tiene a lo más n componentes$\}$ y

$F_n(X) = \{A \in 2^X : A$ tiene a lo más n puntos$\}$,

a estos hiperespacios se les dota de una métrica llamada métrica de Hausdorff. De hecho, a $F_n(X)$ y a $C_n(X)$, considerados con la métrica de Hausdorff, se les conoce como el *n-ésimo producto simétrico* de X y el *n-ésimo hiperespacio* de X, respectivamente. El *n-ésimo hiperespacio suspensión* de X, denotado por $HS_n(X)$, es el espacio cociente $C_n(X)/F_n(X)$ que es obtenido de $C_n(X)$ al identificar $F_n(X)$ a un punto.

Los primeros trabajos a principios del siglo XX se deben a los alemanes Vietoris y Hausdorff, la métrica de Hausdorff fue definida por Pompeiu en 1905. En 1940 Kelley en su tesis doctoral nombrada Un estudio de hiperespacios hizo el primer estudio sistemático de los hiperespacios e implementó técnicas que siguen siendo utilizadas hasta hoy en día. En nuestro país, durante las últimas dos décadas, se ha intensificado el número de investigadores de estas teorías.

II. Los hiperespacios

La teoría de continuos y la teoría de los hiperespacios son dos ramas muy importantes de la topología; aunque ambas teorías se han desarrollado de manera extraordinaria en los últimos veinte años, aún tienen muchos problemas por resolver. En esta sección se enuncian algunos conceptos y resultados que son necesarios para el desarrollo de este trabajo, tales nociones son: conexidad local, continuo, hiperespacio, la topología que tienen los hiperespacios, así como funciones de Whitney.

A continuación se define el límite inferior, el límite superior y el límite de una sucesión de conjuntos.

Definición 1. Sean X un espacio topológico y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X, el *límite inferior* de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es

$lím\ ínf\ A_n = \{x \in X :$ *para cada abierto U en X con* $x \in U$ *se cumple que* $U \cap A_n$ *es un conjunto no vacío para casi todo* n, *excepto una cantidad finita de números* $n\}$.

Definición 2. Sean X un espacio topológico y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X, el *límite superior* de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es

$lím\ \sup A_n = \{x \in X :$ *para cada abierto U en X con* $x \in U$ *se cumple que* $U \cap A_n$ *es un conjunto no vacío par una cantidad no finita de números* $n\}$.

Obsérvese que a partir de las Definiciones 1 y 2, se tiene que

Definición 3. Sean X un espacio topológico y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X, el *límite* de la sucesión, que denotamos por $lím\ A_n = A$ existe cuando

$lím\ ínf\ A_n = A = lím\ \sup A_n$.

A. Conexidad local

Una de las nociones más interesantes y fundamentales para nuestro estudio es el concepto que sigue.

Definición 4. Sean X un espacio topológico y x un punto de X. El espacio X es localmente conexo en x si para cada conjunto abierto U en X tal que x pertenece a U, existe un conjunto conexo y abierto V en X tal que x pertenece a V y V es subconjunto de U. El espacio topológico X es localmente conexo si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Además recuérdese la definición de componente.

Definición 5. Dado un espacio topológico X y un punto x en X, la *componente* C_x *de* x *en* X es la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a x. Si Y es un subconjunto de X, la *componente de* Y *en* X es el subconjunto conexo maximal de X contiene a Y.

Una propiedad equivalente a ser localmente conexo, es la que sigue.

Teorema 1. [4, Teorema 4.2, pág. 113] Un espacio topológico X es localmente conexo si y sólo si toda componente de cada conjunto abierto U en X es un conjunto abierto en X.

El concepto que sigue ofrece una caracterización de la conexidad local como se ve en el Teorema 2.

Definición 6. Sean X un espacio topológico y x un punto en X. El espacio topológico X es *conexo en pequeño en* x si cada vecindad U de x en X, contiene un subconjunto conexo V de X tal que V es vecindad de x en X. El espacio topológico es *conexo en pequeño* si es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.

Teorema 2. [13, 5.22, pág. 83]Sea X un espacio topológico. Entonces X es conexo en pequeño si y sólo si es localmente conexo.

B. Continuos e hiperespacios

En 1883 George Cantor (1845-1918), introdujo la noción de continuo diciendo que éste es un subconjunto de un espacio euclidiano que es conexo, cerrado y denso en sí mismo. Ahora, las cosas han cambiado y este concepto está determinado, oficialmente, como sigue.

Definición 7. Un *continuo* es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Un subcontinuo es un continuo que está contenido en algún espacio topológico.

M. Fréchet (1878-1973) definió, en 1906, la clase de los espacios métricos (aunque el término "espacio métrico" no fue introducido sino hasta 1914 por F. Hausdorff (1868-1942)), fue la primera clase de espacios abstractos en la cual fueron generalizados varios conceptos y resultados. En ese mismo año también fue establecida la noción de espacio de Hausdorff. Sin embargo, por un periodo extenso los espacios métricos fueron mucho más estudiados que los espacios de Hausdorff.

Una de las nociones básicas e imprescindibles de la topología es la conexidad. La definición actual de este concepto fue introducida en 1883 por C. Jordan (1838-1922), para la clase de los subconjuntos compactos del plano. El estudio sistemático de la conexidad fue iniciado en 1914 por F. Hausdorff, y en 1921 por B. Knaster (1893-1980) y K. Kuratowski (1896-1980).

Otro concepto topológico relacionado con la noción de continuo es el de compacidad. Su origen está vinculado con un teorema demostrado en 1895 por É. Borel (1871-1956), el cual establece que toda cubierta abierta numerable de un intervalo cerrado y acotado tiene una subcubierta finita. En 1903, Borel generalizó este resultado para todo subconjunto cerrado y acotado de un espacio Euclidiano. La definición actual esencialmente se debe a P. S. Aleksandrov (1896-1982) y a P. S. Urysohn (1898-1924).

C. Ejemplos de continuos

1. El intervalo unitario , con la métrica usual es conexo y por ser un conjunto cerrado y acotado es compacto.

2. Considérese como subespacio topológico de con la topología euclidiana. Como es la imagen de la función continua tal que , se tiene que es conexo. Además, dicha circunferencia unitaria es compacto, y de aquí, es un continuo.

Definición 8. Un arco es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado [0,1]. Sean h:[0,1]→J un homeomorfismo, tal que h(0)=a y h(1)=b, los puntos a y b son los puntos extremos del arco J.

Nótese que los subcontinuos, no degenerados, de la circunferencia unitaria son los arcos.

Se pueden construir nuevos continuos uniendo algunos ya conocidos. Por ejemplo, si se considera la unión de arcos que se intersectan en un único punto, que debe ser un punto extremo de cada arco, llamado el vértice del n-odo, el resultado también es un continuo llamado n-odo simple.

Siguiendo esta idea se pueden considerar la unión de una cantidad finita de arcos tales que, sean ajenos dos a dos o si se intersectan lo hagan en uno o en ambos puntos extremos. A este nuevo concepto se le llama gráfica finita. Cuando una gráfica finita no contiene curvas cerradas simples es llamada árbol.

III. UNICIDAD DE HIPERESPACIOS

Es claro que si dos continuos X y Y son homeomorfos y si H(X) es alguno de los hiperespacios 2^X, $C_n(X)$, $F_n(X)$ o $HS_n(X)$, entonces H(X) es homeomorfo a H(Y).

Sin embargo, puede ser que dos espacios no homeomorfos tengan el mismo hiperespacio; por ejemplo, los hiperespacios de los subcontinuos de la circunferencia unitaria y del intervalo unitario [0,1] son homeomorfos, vea Ejemplos 3.1 y 3.2 de [11].

Definición 1. Para un continuo X y n un número natural, sea H(X) alguno de los hiperespacios 2^X, $C_n(X)$, $F_n(X)$ o $HS_n(X)$. Un continuo X tiene *hiperespacio único* H(X), si la siguiente implicación es verdadera: si Y es un continuo tal que H(X) es homeomorfo a H(Y), entonces X es homeomorfo a Y.

Surge de manera natural la pregunta siguiente:

Pregunta 1. ¿Bajo qué condiciones un continuo X tiene hiperespacio único H(X)?

Respecto de las gráficas finitas se sabe lo siguiente:

1. Si X es una gráfica finita diferente de un arco y de una curva cerrada simple, entonces X tiene hiperespacio único C(X), vea Teorema 1 de [1] y 9.1 de [3].
2. Si X es una gráfica finita, entonces X tiene hiperespacio único $C_2(X)$, vea Teorema 4.1 de [9].
3. Si X es una gráfica finita y n es un número natural diferente de 1 y 2, entonces X tiene hiperespacio único $C_n(X)$, vea Teorema 3.8 de [10].
4. Si X es una gráfica finita n es un número natural, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$, vea Corolario 5.9 de [2].

Sean E(X) el conjunto de puntos de X tal que X-{p} es conexo y $\mathbb{D}$ la clase de las dendritas tal que E(X) es cerrado en X.

Para los elementos de la clase $\mathbb{D}$ sabemos lo siguiente:

Si X es un elemnto de la clase $\mathbb{D}$ y no es un arco, entonces X tiene hiperespacio único C(X), vea Teorema 10 de [5].

Si X es un elemento de la clase $\mathbb{D}$, entonces X tiene hiperespacio único $C_2(X)$, vea [6] y Teorema 3.1 de [12].

Si X es un elemento de la clase $\mathbb{D}$ y n es un número natural diferente de 1 y 2, entonces X tiene hiperespacio $C_n(X)$, vea Teorema 5.7 de [8].

Si X es un elemento de la clase $\mathbb{D}$ y n es un número natural, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$, vea Teorema 3.7 de [7].

IV. Conclusiones

Como se puede ver, la investigación en unicidad de hiperespacios es un tema de actualidad, por nuestra parte actualmente investigamos unicidad del n-ésimo producto simétrico y del n-ésimo hiperespacio suspensión para los elementos de otras clases de continuos que fueron definidas recientemente como los continuos enrejados y casis enrejados.

Referencias

[1] G. Acosta, *Continua with unique hyperspace,* Continuum theory (Denton, TX, 1999, 33-49 Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 230, Dekker, New York, 2002.

[2] E. Castañeda y A. Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, Topology Appl., 153 (2006), 1434--1450.

[3] R. Duda, *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph, I,* Fund. Math., 62 (1968), 265--286.

[4] J. Dugundji, *Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1978.

[5] D. Herrera-Carrasco, *Dendrites with unique hyperspace*, Houston J. Math., 33 (2007), 795--805.

[6] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, M. de J. López y F. Macías-Romero, *Dendrites with unique hyperspace $C_2(X)$,* Topology Appl., 156 (2009), 549--557.

[7] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López y F. Macías-Romero *Dendrites with Unique Symmetric Products*, Topology Proc., 34 (2009), 175--190.

[8] D. Herrera-Carrasco y F. Macías-Romero, *Dendrites with unique* n- fold hyperspace, Topology Proc., 32 (2008), 321-337.

[9] A. Illanes, The hyperspace $C_2(X)$ for a finite graph X is unique, Glasnik. Mat. Ser. III, 37(57) (2002), 347-363.

[10] A. Illanes, *Finite graphs X have unique hyperspaces $C_n(X)$*, Topology Proc., 27 (2003), 179-188.

[11] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos,* Aportaciones Matemáticas, Serie Textos N. 28, Sociedad Matemática Mexicana, ISBN: 968-36-3594-6, 2004.

[12] A. Illanes, *Dendrites with unique hyperspace $C_2(X)$*, II, Topology Proc., 34 (2009), 77-96.

[13] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An introduction,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.