GEOMETRÍA DINÁMICA: APRENDIZAJE MOTIVADO POR LA INCERTIDUMBRE

Armando Echeverry Gaitán * y Leonor Camargo Uribe**
*Universidad de Valéncia, armandoech@gmail.com – España
**Universidad Pedagógica Nacional, lcamargo@pedagogica.edu.co - Colombia

***Abstract*— In this paper we discuss the role of the semiotic mediation of an artifact and the teacher in the management of the uncertainty generated before a visual phenomenon identified by solving a problem situation of demonstration in geometry, to mobilize learning through the intellectual need of students, future teachers of mathematics. The relationship between uncertainty and intellectual need is determined by the semiotic mediation carried out by the teacher to resolve uncertainty in order to build meaning.**

***keywords*— Dynamic geometry, uncertainty, intellectual need, learning.**

***Resumen*— En esta ponencia discutimos el papel de la mediación semiótica de un artefacto y del profesor en la gestión de la incertidumbre generada ante un fenómeno visual identificado al resolver una situación problema de demostración en geometría, para movilizar el aprendizaje a través de la necesidad intelectual de estudiantes, futuros profesores de matemáticas. La relación entre la incertidumbre y la necesidad intelectual está determinada por la mediación semiótica que lleve a cabo el profesor para dirimir la incertidumbre en busca de construir significado.**

***Palabras clave*— Geometría dinámica, incertidumbre, necesidad intelectual, aprendizaje.**

I. INTRODUCCIÓN

Las ideas expuestas en la presente ponencia se derivan de una investigación de diseño en curso, que apunta a la elaboración de un modelo teórico para el diseño y evaluación de tareas en geometría. En dicha elaboración hemos adoptado una perspectiva sobre el aprendizaje, según la cual los estudiantes construyen significado de objetos y relaciones geométricas en la medida en que se enfrentan a situaciones que les generan incertidumbre (Zaslavsky, 2005) e impulsan en ellos la necesidad intelectual (Harel, 2013) de resolverla.

En el ejercicio académico de experimentar esta perspectiva de aprendizaje en la enseñanza y el aprendizaje en el aula, estamos en la búsqueda y caracterización de situaciones en las que se genere incertidumbre y ella movilice de la necesidad intelectual. Una de tales situaciones sucedió en un curso de geometría de nivel universitario en el cual se desarrollaba una discusión acerca de la demostración de un hecho geométrico en apariencia simple: el plano está "lleno de puntos". La demostración había sido puesta como tarea en la clase anterior. Uno de los estudiantes cuestionó la validez de la demostración hecha, a partir de la representación de la situación en Cabri[1].

El objetivo de la ponencia es ilustrar, con un ejemplo, el potencial de la mediación semiótica, del artefacto y el profesor, para favorecer el aprendizaje cuando los estudiantes experimentan la necesidad intelectual de resolver una incertidumbre. A continuación, presentamos el marco de referencia, algunos elementos de la metodología y el análisis puesto en juego en el ejemplo.

II. MARCO DE REFERENCIA

Como ya lo mencionamos, asociamos el aprendizaje con la motivación intrínseca de los estudiantes por conocer y organizar su conocimiento. Esta motivación surge de la incertidumbre, conceptualizada por Zaslavsky (2005) como un constructo que unifica aquellos estados mentales de conflicto, duda y perplejidad que surgen en la interacción social, cuando la resolución de un problema enfrenta a los estudiantes a una situación que es incompatible con su actual conocimiento o no es soluble con éste. La autora describe tres tipos de incertidumbre: afirmaciones en conflicto, camino desconocido o conclusión cuestionable y resultado no verificable fácilmente. El primero, hace referencia al caso en que una o más afirmaciones chocan para dar solución a una situación. El segundo, sucede cuando quien aborda la situación no tiene una sensación clara de cuál puede ser el resultado. El tercero hace alusión a situaciones en las cuales no puede tenerse seguridad de lo correcto o válido de un resultado.

Compartimos el planteamiento de Stylianides y Stylianides (2009) según el cual, la incertidumbre actúa como un mecanismo que apoya el desarrollo del conocimiento matemático a través de la necesidad intelectual, conceptualizada por Harel (2013) cómo el requerimiento de ampliación o modificación del conocimiento, para hacerlo compatible con la situación. Los siguientes son cuatro tipos de necesidad intelectual sugeridos por Harel*: necesidad de certidumbre*, sucede cuando se desea establecer si un enunciado es

[1] Esta afirmación se apoya en la entrevista que se hizo al finalizar la clase, que quedó registrada en vídeo.

verdadero*; necesidad de causalidad*, ocurre cuando al establecer que una afirmación es verdadera, interesa saber por qué es válida*; necesidad de comunicación*, se presenta cuando se requiere formular o expresar un planteamiento discursivo en lenguaje matemático o hacer público el significado exacto de una idea o las bases lógicas de ésta; *necesidad de estructura*, se manifiesta cuando se requiere reorganizar el conocimiento que ha sido aprendido empleando conexiones en una estructura lógica.

Desde nuestro punto de vista, no existe una conexión a priori entre los tipos de incertidumbre y los tipos de necesidad intelectual. Las conexiones entre unos y otros dependen del contexto de aprendizaje en el cual se desarrolla la situación problema. Es decir, los nexos que se generen son influidos por la mediación semiótica de la situación de aprendizaje, mediación en la cual son relevantes los artefactos empleados en la instrucción y el profesor quién es el responsable de gestionar la interacción comunicativa relacionada con la incertidumbre generada.

III. **METODOLOGÍA**

La experiencia de aprendizaje que ilustra las ideas previamente mencionadas se desarrolla en un curso de geometría de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional; esta institución forma profesores de matemáticas para la educación básica secundaria y media. En este curso, la profesora propone situaciones problema, donde se deba hacer una conjetura o una demostración, e invita a los estudiantes a realizar exploraciones en un entorno de geometría dinámica, para generar ideas que nutran los procesos de argumentación. Los estudiantes están habituados a explorar los objetos y relaciones geométricas involucradas, mediante representaciones dinámicas, formular ideas y discutirlas para elaborar argumentos que resulten convincentes para toda la clase.

La sesión de clase de la cual se extrajeron los fragmentos a analizar sucede al comienzo del semestre académico, en una clase conformada por 20 estudiantes, quiénes junto con la profesora, discuten acerca de la demostración sugerida en la clase pasada en la que validan la afirmación: “el plano está lleno de puntos”. Los fragmentos se obtienen a partir de la transcripción del vídeo de la situación de incertidumbre que genera la intervención de un estudiante, tomando momentos relevantes de la interacción y algunas respuestas que dan tres estudiantes, que tuvieron un papel protagónico en la clase, a preguntas formuladas por uno de los investigadores, al finalizar la clase. Analizamos los fragmentos a partir de las categorías, listadas en la Tabla 1.

Categorías de análisis	
Incertidumbre	• afirmaciones en conflicto • camino desconocido o conclusión cuestionable • resultado no verificable fácilmente
Mediación semiótica	• Del profesor • Del artefacto
Necesidad intelectual	• necesidad de certidumbre • necesidad de causalidad • necesidad de comunicación • necesidad de estructura

Tabla No 1. Categorías de análisis

EJEMPLO DE ANÁLISIS Y RESULTADOS

Descripción general de la clase, génesis de la incertidumbre

La profesora comienza la clase pidiendo a los estudiantes explicar cómo demostraron que el plano “está lleno de puntos” De acuerdo al estilo usual de trabajo matemático en este curso, resolver la situación problema de demostración implica apoyarse en los postulados y teoremas previamente considerados. Laura sugiere partir del postulado “Todo plano tiene al menos tres puntos que no están alineados”, el cual garantiza la existencia de al menos tres puntos en el plano. Luego propone usar el postulado “Dos puntos determinan una única recta”. La profesora ilustra en el tablero las sugerencias de Laura (Figura 1).

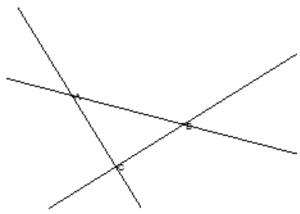

Figura 1

Luego, para demostrar que las regiones determinadas en el plano por la intersección de esas rectas, están “cubiertas” de puntos. Laura sugiere valerse del teorema:

Un punto está contenido en infinitas rectas. Propone enfocarse en el punto A, y como ya habían demostrado que las rectas tienen infinitos puntos propone tomar un punto genérico X de la recta BC y trazar la recta AX, Para todos los X_i de esa recta BC, existen rectas AX_i lo que permitiría "cubrir" el plano con esas rectas y por tanto cubrirlo de puntos (Figura 2).

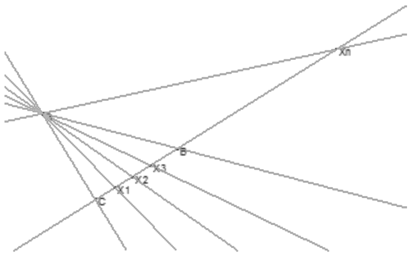

Figura 2

Al terminar de esbozar la demostración la profesora pregunta si todos están de acuerdo con que es una vía promisora para validar el teorema. La mayoría de estudiantes asiente, pero Yesid, José Luis y Cesar platean la siguiente objeción:

30	Yesid:	*Yo tengo una duda profe. Que existe un punto (X) qué, cuando el punto está en la recta AB […] [y] que no esté en la recta BC. O sea, un punto acá (señala la recta AB), que no esté en la recta BC […] Digamos, en la recta que se forma acá, paralela a ésta (señala la recta BC).*
35	José Luis:	*Por ese método no se alcanza a llenar todo el plano.*
37	Cesar:	*Porque llegamos hacer todas estas iteraciones. Supongamos que esta recta se extiende hasta el infinito […] Pero entonces llega un punto en que se empieza a cerrar el plano, todo lleno de rectas, pero llega un punto en que se tendrían que hacer dos rectas paralelas.*

Al escucharlos, la profesora y los demás compañeros se sorprenden porqué consideraban que la demostración, como la presentó Laura, era válida. En este momento se produce una situación de incertidumbre del tipo "camino desconocido o conclusión cuestionable". Los estudiantes ponen de manifiesto que no consideran la demostración válida, pues encuentran una excepción. No se trata de una incertidumbre derivada de afirmaciones en conflicto, porque no se presentan dos o más propuestas de demostración. Tampoco se trata de un "resultado no verificable", pues la vía de demostración es aceptada.

Mediación semiótica, explicitación de la incertidumbre

La propuesta de generar distintas rectas AX_i se puede ilustrar en Cabri al animar la recta AX, activando previamente su traza, para recubrir el plano; así se representa la familia de rectas AX_i. Hay una aparente correspondencia isomorfa en la demostración y su representación en Cabri. Si el plano tiene tres puntos, se pueden generar tres rectas, ya está demostrado que las rectas si están "llenas de puntos", ahora al cubrir el plano con rectas mediante las herramientas animación y traza, de una recta, puede mostrarse que el plano está lleno de puntos.

Inmediatamente se genera la situación de incertidumbre, la profesora pide a los estudiantes valerse del programa Cabri para estudiar la situación. La incertidumbre no se zanja mediante un argumento de autoridad; por el contrario, ella la pone a consideración de la comunidad de la clase:

40	Profesora:	*Repartamos los computadores.*

Los estudiantes representan la situación en Cabri, al tiempo que la profesora lo hace en un computador conectado a una pantalla de televisor, que todos pueden ver.

41	Profesora:	*¿Y ustedes qué creen voy a lograr llenarlo [el plano]? [...] Ahí parece que lo estoy llenando ¿Entonces tú porque me dices que no [se dirige a Cesar]?*
42	Cesar:	*Es que vea profe, si ve que en la parte transversal queda como un espacio [señala la representación en la pantalla del televisor].*
43	Profesora:	*No, pero […] ¿tú me estás diciendo que yo hago todas estas rectas y que, de pronto, hay un punto aquí [señala una región del plano entre las dos rectas] que no está en una recta que pasa por A?*
44	Cesar:	*[Pasa al frente]. Vemos que en este caso [señala con el lápiz un trazo imaginario de una recta paralela a BC que contiene a A], tenemos este punto y esta recta sobre la que necesitamos […] esa es la que digo yo que no sé si está contenida.*

45 Profesora: *¡Ah! Sí […] es cierto. No va a estar porque si es un punto [...]*

La mediación del artefacto se produce cuando la profesora pide hacer uso de Cabri para analizar la objeción hecha a la demostración. Este tiene un uso intencionado por la profesora, que en el marco de la mediación semiótica, se denomina explotar el potencial semiótico del artefacto Mariotti (2013). Adicionalmente, la interacción discursiva es la que da lugar a un examen juicioso de la situación.

Necesidad intelectual

Al darle curso al cuestionamiento generado por Yesid, César y José Luis, la incertidumbre es ahora palpable en la clase. La mediación de la profesora la conduce hacia la necesidad intelectual de estructura; los estudiantes se ven abocados a completar la demostración para llenar el "vacío" detectado. Afirmamos que, en este caso la necesidad es de estructura porque en la clase se tiene un sistema teórico de referencia y se requiere que la demostración se ajuste a este.

46 Walter: *Sí, es la recta paralela […]*

47 Profesora: *Paralela a ésta [señala la recta BC] y (...) no está. Entonces nos queda un hueco en el plano ¿y cómo llenamos ese hueco? ¿Cómo sabemos que si hay puntos hay puntos ahí? […] ¿teóricamente?*

De acuerdo al lenguaje compartido con la clase, la expresión "teóricamente" de la profesora, remite precisamente a esa necesidad de completar la demostración del teorema, para insertarlo en el sistema axiomático que han venido construyendo.

IV. CONCLUSIONES

La incertidumbre puede ser un importante motor del aprendizaje y se produce, en algunos estudiantes, sin que medie un diseño instruccional específico. Pero sería muy conveniente que esta desempeñe un papel relevante en las clases de matemáticas, razón por la cual hacemos el seguimiento a situaciones en la que esta ocurre, para caracterizar el tipo de problemas que la suscitan y la mediación semiótica que la conduce a la necesidad intelectual.

En el ejemplo presentado, nos pareció particularmente interesante la manera en la cual surgió la objeción a la demostración pues, aunque puede parecer a simple vista un asunto de excesivo rigor en la argumentación, en el aprendizaje es relevante la construcción de imágenes mentales que soporten los argumentos lógicos que se exhiben. Además, nos llamó la atención la gestión que hizo la profesora al pedir analizar la objeción con el apoyo de Cabri e involucrar a los estudiantes en una discusión colectiva en la cual es palpable el interés de todos por revisar la demostración.

En la tarea de construir un modelo teórico para el diseño y evaluación de tareas en geometría, ejercicios de análisis como el que comunicamos, nos permite vislumbrar una vía en la cual se armonizan los constructos de incertidumbre y necesidad intelectual con la teoría de la mediación semiótica. Esta última funciona como un marco apropiado para examinar la construcción de significado por parte de los estudiantes, en los casos en los que la incertidumbre actúa como generador de la necesidad intelectual y esta última es guiada por la manera en la cual la profesora hace uso del potencial semiótico del artefacto y orienta la gestión en esa dirección.

REFERENCIAS

Harel, G. (2013). Intellectual Need. In K. R. Leatham (Ed.), *Vital Directions for Mathematics Education Research* (pp. 119–151). New York: Springer. http://doi.org/10.1007/978-1-4614-6977-3

Mariotti, M. A. (2013). Introducing students to geometric theorems: How the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *45*(3), 441–452. http://doi.org/10.1007/s11858-013-0495-5

Stylianides, J., y Stylianides, J. (2009). the Transition from Facilitating to Proof Empirical Arguments. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(3), 314–352. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/40539339

Zaslavsky, O. (2005). Seizing the Opportunity to Create Uncertainty in Learning Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(3), 297–321. http://doi.org/10.1007/sl0649-00Inc5-0606-5