MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ECONOFÍSICA

María N. Quevedo, Hernando Quevedo**
Universidad Militar Nueva Granada, maria.quevedo@unimilitar.edu.co, Universidad Nacional Autónoma de México, quevedo@nucleares.unam.mx,

***Abstract* — Under Econophysics and using mathematical procedures shows that the distribution functions used in economics can be derived from certain thermodynamic variables which, when studied in certain periods, as eligible to be considered as variables conserved within a thermodynamic system. Is supposed to depend on such variables micro parameters. The distribution of income in an economic system is not empirical but the result of a mathematical assumption. We show for hypothetical systems and later distribution functions as Boltzmann Gibbs and Pareto which have proved very useful when describing the economic system of many companies in different continents are derived.**

***Keywords* — Mathematics, Econophysics, distribution function, Boltzmann-Gibbs distribution, Pareto distribution JEL: A12, C02, C49, D10, D31**

***Resumen*— En el marco de la econofísica y haciendo uso de procedimientos matemáticos se demuestra que las funciones de distribución usadas en economía se pueden derivar a partir de ciertas variables termodinámicas que, al ser estudiadas en determinados periodos de tiempo, satisfacen las condiciones para ser consideradas como variables conservadas dentro de un sistema termodinámico. Se supone que dichas variables dependen de parámetros microeconómicos.**

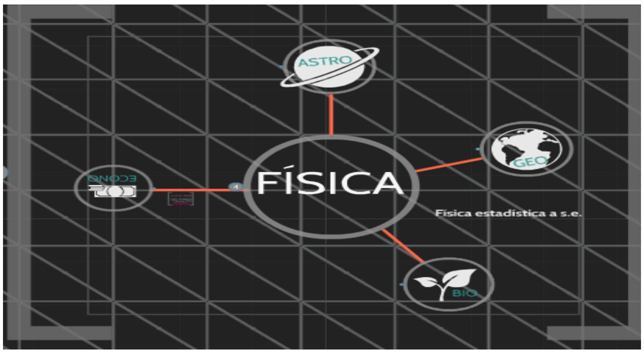
La distribución de ingresos en un sistema económico no es empírico sino el resultado de una suposición matemática. Se demuestra para sistemas hipotéticos y posteriormente se derivan funciones de distribución como las de Boltzmann-Gibbs y Pareto que han demostrado ser muy útiles en el momento de describir el sistema económico de muchas sociedades en diferentes continentes.

Palabras clave - Matemáticas, Econofísica, función de distribución, distribución de BoltzmannGibbs, distribución de Pareto.
JEL: A12, C02, C49, D10, D31

En la Vicerrectoría de Investigaciones de la Universidad Militar Nueva Granada se encuentra avalado el Grupo MATRIX con la línea de investigación: Matemática Aplicada, entre otras. Dicha línea está liderada por María Nubia Quevedo Cubillos, docente de planta del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Básicas y Aplicadas; y cuenta con la asesoría del Dr. Hernando Quevedo Cubillos, docente investigador de la UNAM, (México) e Investigador Adjunto de la Universidad de Roma.

Para el periodo 2014 fue aprobado por la Vicerrectoría el proyecto CIAS 1467 denominado "Parámetros micro y macro económicos de la distribución de ingresos en Colombia. Econofísica como herramienta", los avances del proyecto y la contextualización del mismo constituyen el tema del presente paper.

La búsqueda de aplicaciones de la física a diferentes campos ha permitido incursionar en el mundo de lo muy pequeño con la teoría cuántica y partículas subatómicas, pasando por el mundo de los seres vivos: biofísica; el del comportamiento de la tierra: geofísica, hasta llegar al mundo de lo muy grande (teoría general de la relatividad y cosmología): astrofísica. En forma análoga podríamos decir que, cuando entramos al mundo de la economía desde la física estaremos hablando de ECONOFISICA.



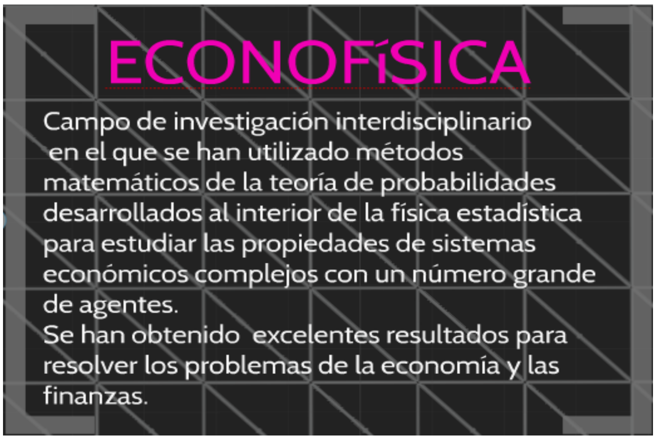
Este término fue introducido por Eugene Stanley en su conferencia Dynamics of Complex Systems presentada en el año de 1995 en Calcuta, afirma que las leyes que describen el comportamien-to de un gran número de objetos inanimados pueden describir el comportamiento de un gran número de objetos animados" Stanley et al., 1996 , habla entonces de "el campo multidisciplinar de econofísica" como "un neologismo que denota las actividades de los físicos que están trabajando en los problemas de la economía para probar una variedad de nuevos enfoques conceptuales derivadas de las ciencias físicas.

Chakrabarti, B. K., 2005, "Econophys-Kolkata: a short story," in Chatterjee, Yarlagadda, and Chakrabarti, 2005, *Econophysics of Wealth Distributions*, pp. 225–228.

Chakrabarti, B. K., A. Chakraborti, and A. Chatterjee, 2006, Eds., *Econophysics and Sociophysics: Trends and Perspectives* _Wiley-VCH, Berlin_.

http://link.springer.com/chapter/10.1007/88-470-0389-X_26#page-1

Pronto se empieza a hablar del término en diferentes congresos y encuentros, de tal forma que surge la econofísica como un campo de investigación interdisciplinario relativamente nuevo y en el que se han utilizado varios métodos matemáticos de la teoría de probabilidades desarrollados al interior de la física estadística para estudiar las propiedades de sistemas económicos complejos con un número grande de agentes.
Gracias a la econofísica, se han obtenido excelentes resultados para resolver los problemas de la economía y



las finanzas.

Nuestra propuesta de trabajo consiste en usar resultados de la termodinámica estadística para describir el sistema económico colombiano. Para ello recordemos lo que es la

TERMODINAMICA: Es una ciencia fenomenológica que deriva sus resultados de la observación y la experimentación, lo que hace que sus resultados sean tremendamente poderosos y válidos. Las leyes de la termodinámica pueden ser consideradas como axiomas de

modelos matemáticos.

Una de las mayores dificultades consiste en identificar las variables termodinámicas, entendiéndose por

VARIABLE TERMODINAMICA: Aquella que satisface las leyes de la termodinámica
1. La ley de conservación de la energía
2. La entropía es mayor que cero
3. La temperatura es diferente de cero

Existe controversia entre los estudios que consideran el dinero como una variable termodinámica bien definida y quienes consideran que el dinero es una variable económica irrelevante: E. **Samanidou, E. Zschischang, D. Stauffer, and T. Lux, "Agentbased models of financial markets," Reports on Progress in Physics, vol. 70, no. 3, article R03, pp. 409–450, 2007.**

A pesar de ello, la econofísica ha ganado un espacio importante dentro de los grandes encuentros, coloquios, congresos, etc, tanto de física como de economía.

A pesar de ello, la econofísica ha ganado un espacio importante dentro de los grandes encuentros, coloquios, congresos, etc, tanto de física como de economía.

Otro tema controversial es el considerar un sistema económico en equilibrio, pero en este caso es un equilibrio estadístico, en el que la función de distribución del dinero es estable, pero a la vez es dinámico en el sentido de que los constituyentes del sistema se mueven continuamente. Esta suposición de equilibrio no es la misma que en economía hace referencia al momento idealista en que la oferta es igual a la demanda.

La termodinámica estadística estudia sistemas en equilibrio y utiliza métodos matemáticos desarrollados en física estadística para describir propiedades

macroscópicas a partir de propiedades moleculares o microscópicas.

Yakovenko en "Econophysics, statistical mechanics approach to," presenta un número razonable de argumentos con los que prueba que ciertos sistemas económicos pueden ser considerados como sistemas en equilibrio y algunas cantidades como la totalidad de dinero dentro del sistema se puede considerar como conservada durante ciertos periodos de tiempo.

V. M. Yakovenko, "Econophysics, statistical mechanics approach to," in Encyclopedia of Complexity and System Science, R. A. Meyers, Ed., Springer, New York, NY, USA, 2009.

Luego, usando termodinámica estadística, consideramos el Sistema económico colombiano como un sistema en equilibrio, durante el periodo de tiempo transcurrido entre una y otra emisión de moneda por parte del banco de la República, y empezamos considerando las variables:

M= Cantidad de dinero dentro del sistema.
Donde M es una variable conservada

N = Número de agentes dentro del sistema

n = Cantidad de dinero por agente

Consideremos un sistema en equilibrio sobre el definimos las variables:

M = Total de dinero dentro del sistema
(M es una variable conservada)

N = Número de individuos (agentes) dentro del sistema

m = Cantidad de dinero por pesona (ingreso)

Veamos de una forma práctica y sencilla que M es una

VARIABLE CONSERVADA:
Consideremos dos agentes A y B, donde A posee una cantidad m_i de dinero y B m_j, de tal manera que la cantidad de dinero dentro del sistema está dado por M = m_i + m_j y este valor se mantiene constante por un periodo de tiempo ya que ninguno de los agentes pueden producir o emitir dinero. Supongamos que A le ofrece un bien o servicio a B por un valor de Δ_m , donde $\Delta_m \leq m_j$ para que B pueda adquirir el bien o servicio que A le ofrece.
Una vez hecha la transacción económica, A incrementó su dinero a $m_i' = m_i + \Delta_m$, mientras que B disminuyó su dinero y ahora posee $m_j' = m_j - \Delta_m$. La cantidad de dinero dentro del sistema en ese momento es $m_i' + m_j'$ = $m_i + \Delta_m + m_j - \Delta_m$ = M, con lo cual vemos que el valor de M se conserva dentro del sistema.

Imagen tomada de © Getty Images

Modelos simples de este estilo fueron considerados por Dragulescu y Yakovenco en "Statistical mechanics of money". Haciendo simulaciones de la distribución del dinero en modelos económicos cerrados muestran cómo surge la distribución exponencial de Boltzmann-Gibbs en forma análoga con la energía, donde la temperatura efectiva es igual a la cantidad media de dinero por agente económico.

A. A. Dragulescu and V. M. Yakovenko, "Statistical mechanics of money", The European Physical Journal B, v. **17**, pp. 723-729 (2000), pdf.

En 2007 Justin Chen, estudiante de pregrado de Yakovenko en Caltech, simuló de un modelo de intercambio de dinero con 500 agentes a quienes se les da inicialmente la misma cantidad de dinero y empiezan a hacer transacciones económicas de compra y venta de bienes o servicios a un precio Δ_m, al cual no todos los agentes pueden acceder si no poseen el dinero suficiente, de los cuales existen muchos, mientras que los que poseen grandes cantidades de dinero son muy pocos. Mediante un histograma muestra la evolución temporal de la distribución de dinero entre los agentes. Conforme pasa el tiempo, la distribución de la función inicial de dinero se amplía y la a escala vertical se ajusta hasta cuando el sistema alcanza el equilibrio estadístico y la distribución de dinero se estabiliza en forma exponencial. Mediante este aporte, Chen ratifica la afirmación hecha por Dragulescu y Yakovenko en el año 2000 ("Statistical mechanics of money") de la concordancia con las leyes de la física estadística.

Un valor agregado en la simulación es el hecho de que muestra la evolución temporal de la entropía de la distribución de dinero. La entropía aumenta en el tiempo desde el valor inicial de 0 hasta el valor máximo alcanzado cuando el sistema alcanza el equilibrio estadístico- Principio de máxima entropía..

Usando lo datos de la Gran Encuesta Integrada de Hogares (GEIH) deL Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE) desde 2002 hasta 2012 se observaron características de la distribución del ingreso que resultan ser muy semejantes a las de otros estudios en otras economías. Dragulescu y Yakovenco ya en 2000 habían mostrado que el ingreso en la economía norteamericana tenía una distribución exponencial
Evidence for the exponential distribution of income in the USA
Adrian Dr˘agulescu and Victor M. Yakovenko
Department of Physics, University of Maryland, College Park, MD 20742-4111, USA

y en 2004 junto con Cristian Silva publica resultados afirmando que la distribución de ingresos bajos es exponencial para el 97% de la población, mientras que el 3% correspondiente a la población de clase alta, tiene una distribución de potencias de Pareto.
Temporal evolution of the "thermal" and "superthermal" income classes in the USA during 1983–2001 A. Christian Silva and Victor M. Yakovenko
Department of Physics, University of Maryland - College Park, MD 20742-4111, USA
received 13 September 2004; accepted in final form 9 November 2004 published online 22 December 2004

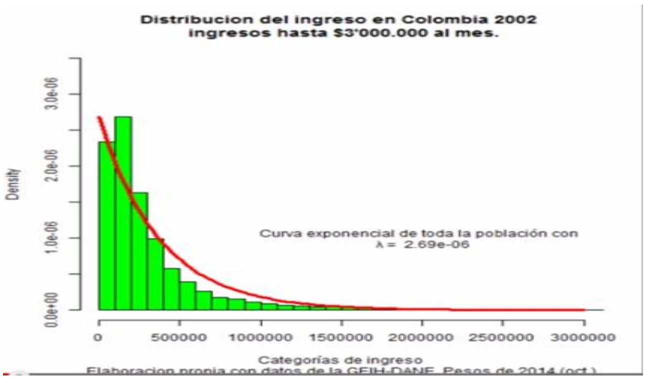
Otros trabajos pueden ser consultados en Dragulescu and y Yakovenko Statistical mechanics of money, income, and wealth: A short survey, in "Modeling of Complex Systems: Seventh Granada Lectures .2003. Y
A. Dragulescu and V. M. Yakovenko, Statistical mechanics of money, income, and wealth: A short survey, in "Modeling of Complex Systems: Seventh Granada Lectures", AIP Conference Proceedings 661 (2003) 180.

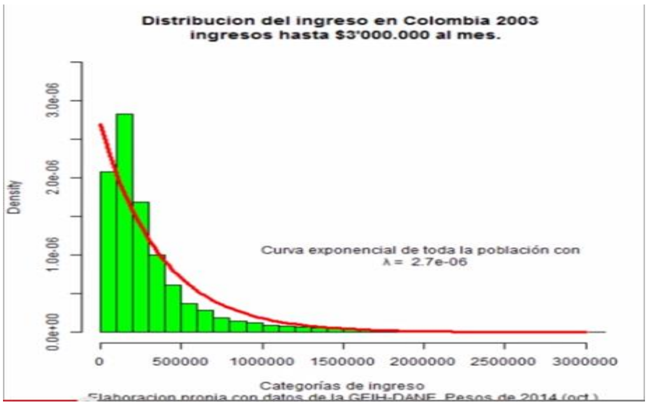
En 2006 Anand Banerjee y Yakovenko encuentran similitudes en la distribución de ingresos en Australia y muestran que la distribución presenta dos fases, una exponencial de Boltzman-Gibbs y otra de potencias de Pareto.

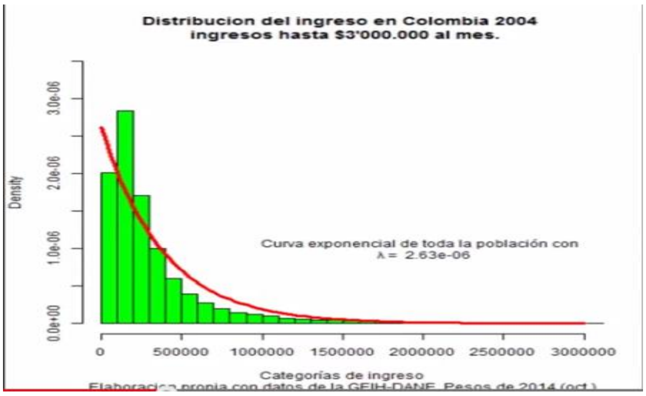
Study of the Personal Income Distribution in Australia. Anand Banerjee a, Victor M. Yakovenko a, T. Di Matteo baDepartment of Physics, University of Maryland, College Park, Maryland 20742-4111, USA bDepartment of Applied Mathematics, The Australian National University, Canberra, ACT 0200, Australia

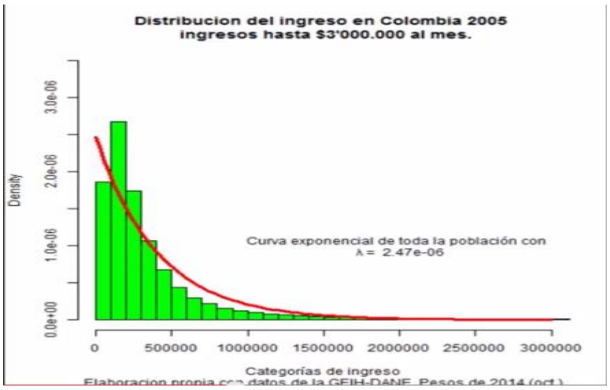
En nuestro trabajo se observó que, para valores del ingreso inferiores a 3´000.000, la distribución tiene un comportamiento exponencial negativo, lo cual avala la búsqueda de los parámetros de la correspondiente distribución de Boltzman-Gibbs para cada año.

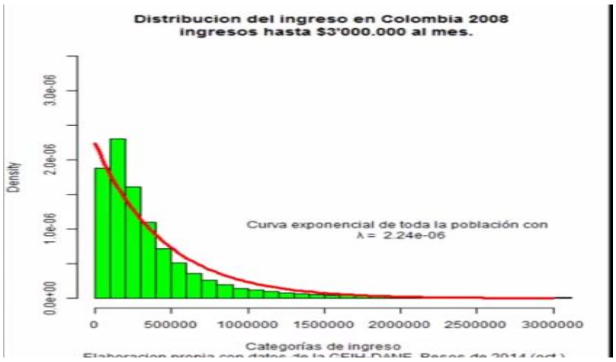
En las siguientes ilustraciones podemos ver el comportamiento de los ingresos, el valor del parámetro para la distribución de Boltzman-Gibbs y su g´rafica en color rojo:

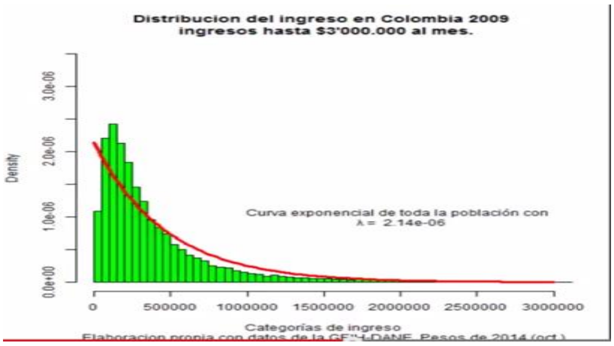


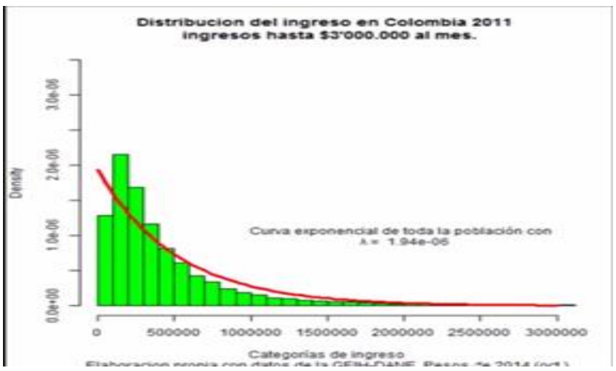












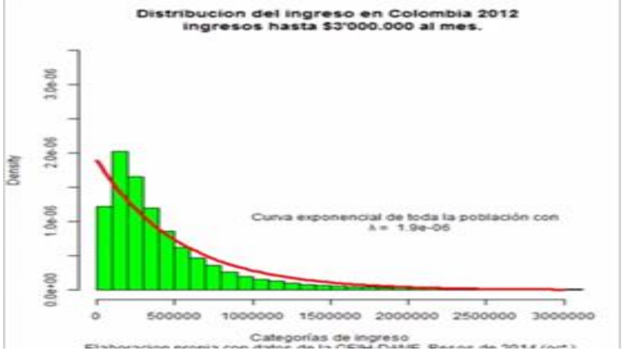


Figura 1: Distribución del ingreso en Colombia para valores de a lo más 3´000.000 con datos de la GEIH. La gráfica de color rojo es la exponencial de Boltzman-Gibbs. Fuente: Elaboración propia del grupo.
Se puede ver en https://www.youtube.com/watch?v=sedYnPxtYVU

Para el sistema económico Colombiano, tenemos entonces las evidencias para tomar como función de densidad de m, $\rho(m)$ dada por

$$\rho(m) \propto e^{-m/T}$$ Distribución de Boltzmann-Gibbs

Donde $T = \frac{M}{N} =$ Cantidad promedio de dinero por agente.

La función de densidad de m es

$\rho(m) \propto e^{-m/T}$ Distribución de Boltzmann- Gibbs

$T = \frac{M}{N}$ (Promedio de dinero por agente)

Def. 1: **Función del dinero** $m = m(\bar{\lambda})$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots\dots\dots \lambda_n)$

λ_i= Parámetros micro económicos. Determinan la cantidad de dinero por agente

2: **Función de densidad**

$\rho(\bar{\lambda}) = \frac{e^{-m(\bar{\lambda})/T}}{Q(T,\bar{\chi})}$, $\bar{\chi}$ = parámetros macroeconómicos

3. **Función de partición** (podemos conocer características del sistema)

$Q(T,\bar{\chi}) = \int e^{-\frac{m(\bar{\lambda})}{T}} d\bar{\lambda}$

Propiedad $\int \rho(\bar{\lambda}) d\bar{\lambda} = 1$

Ahora consideramos las siguientes definiciones:

Def. 1: **Función del dinero** $m = m(\bar{\lambda})$, con $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots\dots \lambda_n)$

Para λ_i= Parámetros micro-económicos que determinan la cantidad de dinero por agente.

Def. 2: **Function de densidad**

$$\rho(\bar{\lambda}) = \frac{e^{-m(\bar{\lambda})/T}}{Q(T,\bar{\chi})} \quad , \quad \bar{\chi}$$ = Parámetros macro-económicos

Def 3. **Función de Partición**

$$Q(T,\bar{\chi}) = \int \frac{1}{T} e^{-\frac{m(\bar{\lambda})}{T}} d\bar{\lambda}$$

Por último recordemos que la función de densidad $\rho(\bar{\lambda})$ debe satisfacer la propiedad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\bar{\lambda})\, d\bar{\lambda} = 1$$

Pero como $Q(T,\bar{\chi}) = \int_m^{\infty} \frac{1}{T} e^{\frac{-\lambda}{T}} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_m^n \frac{1}{T} e^{\frac{-\lambda}{T}} d\lambda = \lim_{n\to\infty} -e^{\frac{-\lambda}{T}} \Big|_m^n = e^{\frac{-\lambda}{T}} \quad \therefore \quad \rho(\bar{\lambda}) = 1$

Sobre el sistema económico colombiano, podríamos afirmar que al no tener crisis económicas y tener cierta estabilidad económica, satisface las condiciones de equilibrio para la variable ingreso dentro de un periodo de tiempo comprendido entre una y otra emisión de moneda. Por lo tanto siguiendo a Yakovenko (Econophysics, Statistical Mechanics Approach to,2007),

V. M. Yakovenko, Econophysics, Statistical Mechanics Approach to, (2007) arXiv:q-fin.ST /0709.3662

es posible hacerle un análisis desde el contexto de la econofísica. Pero también tenemos las bases teóricas que posibilitan la aplicación de las leyes de la termodinámica y la termodinámica estadística como se validó en un trabajo anterior de H. Quevedo y M.N. Quevedo (Statistical Thermodynamics of Economic Systems, 2011).

H. Quevedo and M. N. Quevedo, Statistical Thermodynamics of Economic Systems, J. Therm. 2011, 676495 (2011).

Por otra parte, debido a que, como ya se mencionó, existen trabajos que hacen análisis de la distribución del ingreso en otros sistemas económicos y se ha visto que muchas sociedades se caracterizan por tener dos regiones diferentes con funciones de distribución diferentes. Consideremos, entonces el caso más sencillo que sería tomar un

SISTEMAS LINEALES

1: **Función del dinero**

Sea $m(\lambda) = c_1 \lambda \quad m = c_1\lambda \quad c_1 = Const$

2: **Función de densidad**

$\rho(\lambda) = \frac{e^{-m(\lambda)/T}}{Q(T,\bar{\chi})}$, $\bar{\chi}$ = parámetros macroeconómicos

3. **Función de partición**

$Q(T,\bar{\chi}) = \int_m^{\infty} \frac{e^{-\lambda/T}}{T} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_m^n \frac{1}{T} e^{-\lambda/T}\, d(\lambda) = \lim_{n\to\infty} -e^{-\lambda/T} \Big|_m^n =$
$= \lim_{n\to\infty}(-e^{-n/T} + e^{-\lambda/T}) = e^{-\lambda/T} \quad \therefore$

$\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$

SISTEMA LINEAL

En el que $m = c_1\lambda$ para un $c_1 = Constante$

Ya vimos las funciones de densidad y de partición correspondientes y que la variable así definida tiene una distribución de Boltzmann-Gibbs.

2. SISTEMAS NO LINEALES

Sea $m = c_1 \Lambda_1^2$ $\quad c_1 = Const$

$$S = \frac{1}{2}\left(1 + ln\frac{\pi T}{c_1}\right) + ln\frac{\bar{\Lambda}}{\Lambda_1} \qquad < m >= \frac{T}{2} \qquad Y_j = \frac{T}{\Lambda_j} \;,\; Y_1 = 0$$

$$Q(T,\bar{\Lambda}) = \left(\frac{\pi}{c_1}\right)^{1/2} \frac{\bar{\Lambda}}{\Lambda_1} T^{1/2}$$

3. SISTEMAS MULTIPLICATIVOS

Sea $m = c_1 ln\lambda$ $\qquad \lambda \epsilon [\, x, \infty)$

$$Q(T,\bar{\Lambda}) = \frac{\bar{\Lambda}}{\Lambda} \cdot \frac{1}{\alpha x^{\alpha}} \qquad \alpha = \frac{c_1}{T} - 1 > 0$$

Distribución de Pareto $\rho_p \;\alpha\; \frac{1}{x^{\alpha}}$

También consideramos el Sistema **NO LINEAL** para el cual $m = c_1 \lambda^2$ para $c_1 = Constante$

El sistema que resulta de gran utilidad es el

MULTIPLICATIVO en el que se define

$m = c_1 ln\lambda$, para $c_1 = Constante$, y $\lambda > 0$

y la función de partición:

$$Q(T,\bar{\chi}) = \int_m^{\infty} \frac{1}{T}\, e^{\frac{-c_1 ln\lambda}{T}}\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_m^{n} \frac{1}{T}\, e^{ln\lambda^{\frac{-c_1}{T}}}\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T(1-\frac{c_1}{T})} \lambda^{1-\frac{c_1}{T}} \Big|_m = \frac{1}{k\, m^{\frac{c_1 - T}{T}}}$$

Con los cual se tiene que $\rho(m)\; \alpha\; \frac{1}{m^{\eta}}$ que corresponde a la distribución de potencias de Pareto.

Son estas las distribuciones halladas, para las cuales debimos hallar los correspondientes parámetros una vez estandarizadas y encontramos:

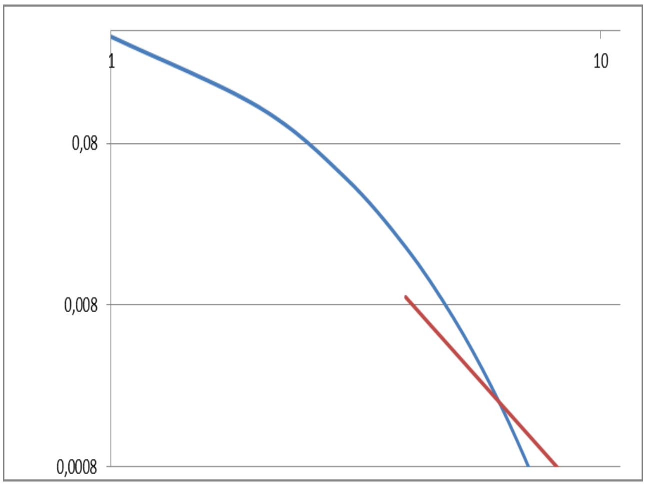
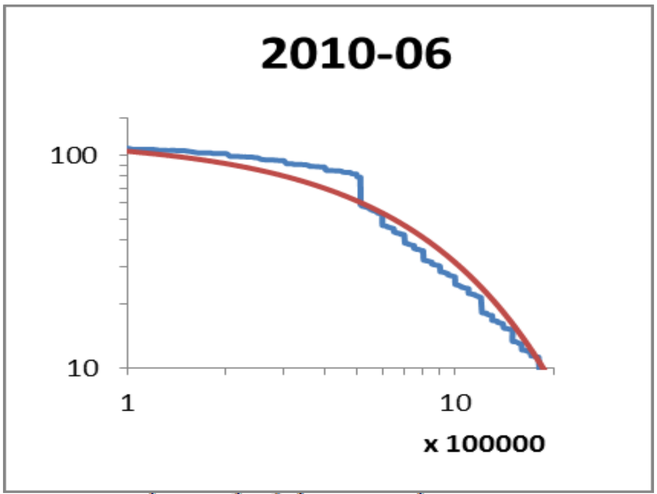


Figura 2: Distribuciones. La primera fase corresponde a una distribución tipo Boltzmann-Gibbs (curva en azul) y la segunda es de tipo Pareto (recta en rojo). Fuente: Elaborado por los autores

En la gráfica se puede observar las dos fases, la dominada por la distribución de Boltzmann-Gibbs (Azul), la cual abarca la mayor parte de la gráfica y corresponde a ingresos bajos y medianos. La fase con los más altos ingresos tiene un comportamiento diferente con una distribución tipo Pareto.

Este tipo de comportamiento con diferentes fases se ha corroborado en diversos sistemas económicos a nivel mundial, resultado que ha sido reconocido como uno de los más interesantes que se han derivado en la econofísica en los pocos años de su existencia. Resulta entonces interesante preguntarse si el sistema económico colombiano muestra un comportamiento similar al de otros países tales como Alemania, Estados Unidos, India, entre otros.



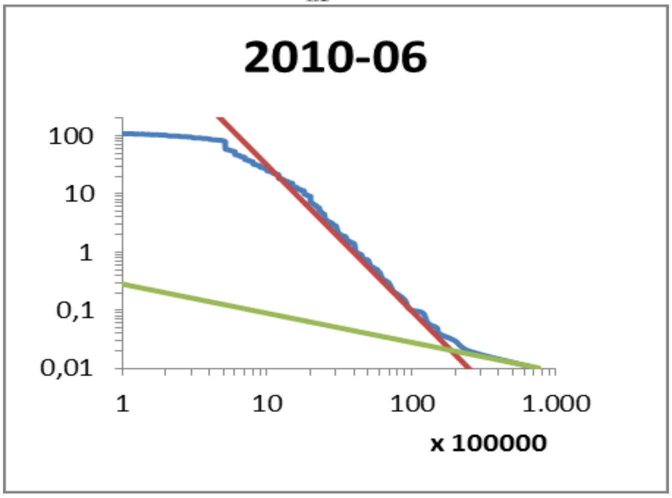


Figura 3: Comparación. La función acumulada (curva azul) en diferentes regiones se compara en la gráfica de la izquierda con una distribución exponencial (curva roja) y en la gráfica de la derecha con dos distribuciones de potencias. La recta roja corresponde a una potencia de 2.5 y la verde a 0.5. Fuente: Elaborado por los autores.

En la figura 3 se muestra primero la región que puede ser aproximada con una distribución exponencial. Esta corresponde aproximadamente al 90% de los individuos entrevistados. En la segunda gráfica se muestran dos rectas que reproducen la función de probabilidad acumulada en dos diferentes regiones que representan cerca del 10% de los entrevistados con los más altos ingresos. De esta manera vemos que esta parte de la gráfica corresponde a dos diferentes distribuciones de Pareto. Las diferentes pendientes de las rectas provienen de diferentes índices de Pareto.

CONCLUSIONES:

1. El uso apropiado de las matemáticas permite obtener resultados interdisciplinarios.
2. Es posible aplicar termodinámica estadística para generar sistemas económicos hipotéticos.
3. El sistema económico colombiano puede ser considerado en equilibrio estadístico.
4. La distribución del ingreso en Colombia presenta dos fases: La de Boltzmann-Gibbs correspondiente a los menores ingresos en el 90% de la población y la de Pareto con dos parámetros diferentes en el 10% de la población y que corresponde a los ingresos más altos.

RECURSOS BIBLIOGRAFICOS

• Stanley, H. E., et al., 1996, “Anomalous fluctuations in the dynamics of complex systems: from DNA and physiology to econophysics,” Physica A 224, 302–321
• Chakrabarti, B. K., 2005, “Econophys-Kolkata: a short story,” in Chatterjee, Yarlagadda, and Chakrabarti, 2005, Econophysics of Wealth Distributions, pp. 225–228.
• Chakrabarti, B. K., A. Chakraborti, and A. Chatterjee, 2006, Eds., Econophysics and Sociophysics: Trends and Perspectives _Wiley-VCH, Berlin_.
• E. Samanidou, E. Zschischang, D. Stauffer, and T. Lux, “Agentbased models of financial markets,” Reports on Progress in Physics, vol. 70, no. 3, article R03, pp. 409–450, 2007.
• V. M. Yakovenko, “Econophysics, statistical mechanics approach to,” in Encyclopedia of Complexity and System Science, R. A. Meyers, Ed., Springer, New York, NY, USA, 2009.
• A. A. Dragulescu and V. M. Yakovenko, "Statistical mechanics of money", The European Physical Journal B, v. 17, pp. 723-729 (2000), pdf.
• Evidence for the exponential distribution of income in the USA Adrian Dr˘agulescu and Victor M. Yakovenko . Department of Physics, University of Maryland, College Park, MD 20742-4111, USA
• Temporal evolution of the “thermal” and “superthermal” income classes in the USA during 1983–2001 A. Christian Silva and Victor M. Yakovenko. Department of Physics, University of Maryland - College Park, MD 20742-4111, USA.received 13 September 2004; accepted in final form 9 November 2004 published online 22 December 2004
• Dragulescu and y Yakovenko Statistical mechanics of money, income, and wealth: A short survey, in “Modeling of Complex Systems: Seventh Granada Lectures .2003.
• Colloquium: Statistical mechanics of money, wealth, and income, Victor M. Yakovenko and J. Barkley Rosser, Jr. Reviewsof Modern Physics. 81, 1703 – Published 2 December 2009
• A. Dragulescu and V. M. Yakovenko, Statistical mechanics of money, income, and wealth: A short survey, in “Modeling of Complex Systems: Seventh Granada Lectures”, AIP Conference Proceedings 661 (2003) 180
• Study of the Personal Income Distribution in Australia. Anand Banerjee a, Victor M. Yakovenko a, T. Di Matteo baDepartment of Physics, University of Maryland, College Park, Maryland.20742-4111, USA bDepartment of Applied Mathematics, The Australian National University, Canberra, ACT 0200, Australia
• V. M. Yakovenko, Econophysics, Statistical Mechanics Approach to, (2007) arXiv:q-fin.ST /0709.3662
• H. Quevedo and M. N. Quevedo, Statistical Thermodynamics of Economic Systems, J. Therm. 2011, 676495 (2011).