

AVANCES EN LA CARACTERIZACION DEL PENSAMIENTO COMBINATORIO

JOSÉ CIRO ANZOLA CALDAS

Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.
ciro.anzola@gmail.com

MARY FALK DE LOSADA

Directora de tesis
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
rectoria.uan@gmail.com

Abstract

This research is based on the analysis of the manifestations of mathematical thinking that arise during the solution of significant problems, mathematical and context in the framework of combinatorial analysis, and the corresponding construction of meanings of the concepts implicit in them with the aim of Characterize and consolidate a way of thinking that was called combinatorial thinking.

The study was carried out with an experimental design in two phases, one under action research and the other under investigation of grounded theory, involving the design of a didactic unit, consisting of eight activities based on the basic principles of counting, instrument which was implemented and developed with first-year students of engineering careers, in the course of Problem Solving.

For its part, this research left the methodological and research proposal consolidated in the "Methodological Model" « I.C.O.R. ». Thus, on the structure of the model was made the didactic research, which concludes that the findings provided sufficient evidence that was consolidated in a systematic way, evidencing that in the process of construction and development of mathematical thinking during problem solving of combinatorial analysis, there are structures that are implemented with the support of fundamental operations of cognitive activity. These recognized structures correspond to the structure of representation, the structure of relation and connection, the conceptual structure, the combinatorial structure and the combinatorial generalization structure. The type of mathematical thinking implicit in them was characterized on this structure scheme, obtaining the description of the generation and structuring of the forms of understanding and the combinatorial ways of thinking and the interrelation between them, which originates the new ways of understanding combinatorial. The latter provides novel and valuable elements for the characterization of combinatorial thinking.

Resumen

Esta investigación se fundamenta en el análisis de las manifestaciones del pensamiento matemático que surgen durante la solución de problemas significativos, matemáticos y de contexto en el marco del análisis combinatorio, y la correspondiente construcción de significados de los conceptos implícitos en las mismas con el objetivo de caracterizar y consolidar un modo de pensar que se denominó pensamiento combinatorio.

El estudio se realizó con un diseño experimental en dos fases, una bajo la investigación-acción y la otra bajo la investigación de la teoría fundamentada, implicando el diseño de una unidad didáctica, constituida por ocho actividades fundamentadas en los principios básicos de conteo, instrumento que se implementó y se desarrolló con los estudiantes de primer año de las carreras de ingeniería, en el curso de Solución de Problemas.

Por su parte esta investigación dejó la propuesta metodológica y de investigación consolidada en el "Modelo Metodológico « I.C.O.R. »". De esta forma, sobre la estructura del modelo se hizo la investigación didáctica, con la cual se concluye que los hallazgos proporcionaron suficiente evidencia que se consolidó de manera sistemática, evidenciándose que en el proceso de construcción y desarrollo del pensamiento matemático durante la solución de problemas del análisis combinatorio, existen unas estructuras que se implementan con el apoyo de operaciones fundamentales de la actividad cognitiva. Estas estructuras reconocidas corresponden a la estructura de representación, la estructura de relación y conexión, la estructura conceptual, la estructura combinatoria y la estructura de generalización combinatoria. Sobre este esquema de estructuras se caracterizó el tipo de pensamiento matemático implícito en ellas, logrando la descripción de la generación y estructuración de las formas de entender y las formas de pensar combinatorias y la interrelación entre ellas, la cual origina las nuevas formas de entender combinatorias. Esto último aporta elementos novedosos y valiosos a la caracterización del pensamiento combinatorio.

INTRODUCCION

La Educación Matemática «EM», ubicada como una ciencia cognitiva y social, tiene entre sus objetivos y fines investigativos la caracterización del pensamiento matemático, la construcción y validación de modelos didácticos y la propuesta de estrategias metodológicas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se abordarán éstos, vistos desde la interacción de los elementos de la «EM» (las matemáticas, los estudiantes, los profesores, las instituciones, las sociedades y las culturas) y fundamentadas desde su aspecto epistemológico, ontológico, filosófico, psicológico y cognitivo.

Esto es propuesto y expuesto por varios autores. Schoenfeld (2000) ve en la educación matemática dos objetivos. El primero es el objetivo puro propuesto para la ciencia básica, el cual tiene como finalidad comprender la naturaleza del pensamiento matemático, la enseñanza y el aprendizaje. El segundo objetivo, es el objetivo propio formulado para las ciencias aplicadas, cuyo fin es mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática sobre la base de la comprensión de la finalidad del objetivo anterior. Desde su quehacer el autor de la presente investigación ve que hay un tercer objetivo, el objetivo futuro en el cual la educación matemática debe seguir construyendo teorías y modelos que la consoliden como ciencia, para lo cual espera y propone a los investigadores en «EM» trabajar en la construcción de teorías que permitan comprender y caracterizar el pensamiento matemático, el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles. A la par deben emerger y afianzarse los modelos, siendo éstos los mediadores entre lo teórico y lo práctico.

De otra parte Font (2002) dice que la investigación en educación matemática se focaliza de manera explícita o implícita en aspectos como: 1) la ontología general, 2) la epistemología general, 3) las

teorías sobre la naturaleza de las matemáticas, 4) la teoría sobre el aprendizaje y la enseñanza en general y de las matemáticas en particular, 5) la definición del objeto de investigación de la didáctica de las matemáticas y 6) una metodología de investigación.

En Godino (1991) se hace una introducción de la evolución de la educación matemática «EM» como una ciencia tendiente a formalizar y construir teorías que explican la existencia e interacción de los elementos mencionados anteriormente.

Así mismo Miguel de Guzmán (2007) plantea algunos puntos de vista con respecto a las tendencias innovadoras en los trabajos y tareas de la educación matemática como ciencia naciente. En cuanto a la filosofía de la matemática actual, dice que ésta ha dejado de preocuparse por los problemas de fundamentación de la matemática como en el siglo XIX, especialmente después los resultados de Gödel a principios del siglo pasado, indicando que desde entonces la filosofía de la matemática ha enfocado su atención en el carácter cuasiempírico de la actividad matemática propuesta por Lakatos. En cuanto a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, considera la matemática como un subsistema cultural, viendo así la «EM» como un proceso de “interculturación”- “proceso de inmersión en las formas propias de proceder del ambiente matemático”⁶⁴. Consideración sobre la cual se centran algunas las investigaciones en la actualidad. Y por otro lado revisa las investigaciones sobre los procesos de pensamiento propios de la matemática, viendo en ellas, más que una transferencia de contenidos, la matemática como un saber hacer y como una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido.

Estos puntos de vista han provocado en los matemáticos consideraciones importantes en el entender y sentir las matemáticas, y en el significado de la enseñanza y aprendizaje de las mismas, influenciando el futuro investigativo de la «EM», para que éste se dé en procesos de pensamiento matemático, en trabajos sobre la intuición directa en lo concreto, el formalismo, la importancia de la motivación desde lo histórico-cultural, y el impacto de las nuevas tecnologías sobre la matemática.

De esta forma estos cambios visionales sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y su objetivo por desarrollar el pensamiento matemático con permeabilidad y aplicabilidad sobre todas las ciencias también se han visto reflejados en el contexto social colombiano, primero desde los Lineamientos Curriculares (1998), y luego por los Estándares Básicos de competencias (2006), documentos emitidos por el MEN. En ellos se reconoce y establece la importancia de un cambio frente a la enseñanza y aprendizaje de la matemática motivado por una nueva concepción que es el aprendizaje por competencias; pensado desde la utilización del pensamiento lógico y matemático y sus herramientas como un medio para comprensión e interacción con un contexto. Además, en ello se deja explícito que las competencias matemáticas requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por la solución de problemas significativos, que posibiliten avanzar a niveles de competencia cada vez más complejos, es decir que construyan nuevos y más robustos significados de los conceptos matemáticos. Para ello se propone ver la matemática como un conjunto de cinco tipos de pensamiento. El pensamiento numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional. Así estos fines de tipo personal, cultural, social y político de la educación matemática, abren nuevos horizontes y refuerzan las razones para justificar la contribución de la formación matemática con respecto a los fines de la educación.

Lo anterior deja a la luz que una de las responsabilidades de la comunidad de educadores matemáticos es lograr la caracterización del

pensamiento matemático desde sus diferentes líneas de trabajo como lo son la lógica, la aritmética, la geometría, el álgebra, la estadística, y la probabilidad, entre otras.

En este punto se puede percibir una falencia al omitir la importancia y necesidad de considerar el estudio de la combinatoria como otro de los tipos de pensamiento matemático, ya que el tratamiento que se le da en esta postura no lo asume como tal, sino como una temática implícita dentro de los demás tipos de pensamiento.

Esta situación se sigue reflejando después de haber realizado una revisión del estado del arte concerniente a la caracterización del pensamiento matemático; se evidencia que estos trabajos e investigaciones tienen como eje la aritmética, el álgebra, la geometría, el análisis de datos (estadística) y cálculo de probabilidades, desarrollados en diferentes poblaciones que van desde los inicios de la actividad escolar hasta la universitaria, dejando ver que el trabajo en *combinatoria* ha sido poco explorado como lo afirma Lockwood, E. (2013).

Es ahí, donde se ve la necesidad de direccionar investigación de la «EM» sobre esta área del conocimiento matemático. Área que, como dice De Guzmán (2007), es el área hacia la cual se está desplazando la matemática actual, después del apogeo del análisis del continuo. Este fenómeno se debe al avance tecnológico y su estrecho ligamento con las ciencias de la computación e informática, que ahora permiten hacer el análisis de grandes cantidades de información, análisis que tiene una tendencia a lo cualitativo y descriptivo. Por este motivo se hace importante la enseñanza y aprendizaje de la combinatoria, al permitir que se consolide como una nueva forma de pensar cuya caracterización y desarrollo debe tenerse en consideración entre los fines de la «EM», el pensamiento combinatorio.

En la actualidad este tipo de pensamiento está siendo desaprovechado ya que, por un lado, se puede implementar como instrumento para lograr que los estudiantes desarrollen procesos de generalización, como por ejemplo, al utilizarlo en la transición del pensamiento aritmético, geométrico y probabilístico hacia el algebraico, mediante la generalización en modelos combinatorios. Y por otro lado, en la mayoría de los casos, al pensamiento combinatorio se le está limitando a un procedimiento intermedio para hacer cálculo de probabilidades. En cierto sentido se está subutilizando al ser un factor que permite evidenciar la estructuración del pensamiento formal en el adolescente, porque permite trabajar desde lo concreto para luego pasar a la generalización en una misma situación. En efecto, el estudiante transita progresivamente de lo particular a lo general mediante la construcción de modelos basados en la teoría de la combinatoria. Como lo afirma Restrepo P. (2010) “*la combinatoria enumerativa busca contar el número de elementos de un conjunto con ciertas propiedades, lo cual consiste en encontrar su cardinal y lograr contar sin contar; es decir poder determinar el número de elementos de un conjunto sin necesidad de tener que hacer la lista en la que se cuenten uno a uno*”⁶⁵. Es decir, a partir del análisis sobre algunos casos particulares de los elementos de un conjunto, se puede construir un modelo que permitirá construir y conocer todos los elementos del conjunto.

En concordancia con la descripción realizada anteriormente, en cuanto a los objetivos de la «EM», la responsabilidad de los educadores matemáticos, las exigencias modernas ante los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y la necesidad de evidenciar y consolidar el pensamiento combinatorio como otro tipo de pensamiento matemático, surge esta investigación, para la cual se plantea como pregunta orientadora de la misma **¿Cuáles son las características propias del pensamiento combinatorio?**, ya que

⁶⁴ Guzmán, M. de (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. Iberoamericana de Educación. No. 043, Enero-Abril, 19-58. Madrid, España.

⁶⁵ Restrepo Mesa Pascual. Un Recorrido por la Combinatoria I. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas, Universidad Antonio Nariño. 2010

conociendo estas características, se puede evidenciar su existencia, fortaleciendo y aportando herramientas para su consolidación como un tipo de pensamiento matemático a tener en cuenta, reconocido e implementado por la comunidad de educadores matemáticos.

Además, estas características se utilizarán como insumo para crear e implementar nuevas metodologías y didácticas, que serán replicadas en los procesos y experiencias de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en general, permitiendo una mejor orientación y aplicabilidad de las mismas. Al mismo tiempo permitirán mostrar las ventajas de la combinatoria como herramienta interdisciplinaria dentro de la misma matemática, dejando ver la necesidad de su aprendizaje y enseñanza, e inclusión en los currículos.

Este proyecto de investigación se desarrolla en el marco de las líneas de investigación del programa de Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño, en particular en la línea de la enseñanza y aprendizaje de la matemática a través de la solución de problemas (especialmente problemas no rutinarios) y en las estrategias del desarrollo, enriquecimiento y consolidación del pensamiento matemático (incluye la enseñanza y aprendizaje de la matemática para estudiantes talentosos), lo cual dio el aval de orden académico y científico para su ejecución.

En este orden de ideas, se da la importancia y reconocimiento a esta investigación, la cual se centra en describir las características del pensamiento que los estudiantes evidencian durante la solución de problemas significativos de combinatoria, a partir de las cuales se logra avances en la caracterización del pensamiento combinatorio. Se implementa en el marco de la solución de problemas matemáticos y de contexto abarcando la elaboración de significado de conceptos de conteo y la generalización en modelos.

Se organiza y propone la presente investigación, de carácter cualitativo, teniendo en cuenta las insuficiencias mencionadas anteriormente, siendo las que marcaron la elección del tipo de metodología de investigación científica necesaria para desarrollar la idea de investigación. En el Capítulo 3 se describe el modelo de investigación cualitativa y sus fases de desarrollo, a partir de las cuales se presenta la construcción y desarrollo de la investigación.

Problema de investigación

¿Cuáles son las características del pensamiento combinatorio implícitas en la solución de problemas matemáticos o de contexto y en su modelación para construir significado robusto de los conceptos propios del análisis combinatorio?

Interiorizado el problema de esta investigación, es claro que el resultado de la investigación es de orden conceptual descriptivo requiriendo de una indagación profunda para apropiarse de mayores evidencias o soportes que permitieron conocerlo y comprenderlo, logrando definirlo y describirlo para avanzar en la caracterización; para así construir el resultado final y dar respuesta al interrogante planteado.

Lo anterior permite delimitar el problema dentro del **objeto de estudio** denominado proceso de enseñanza y aprendizaje del análisis combinatorio que será manifestado en el transcurso de la solución de problemas significativos y no rutinarios del análisis combinatorio. La población participante se conformó por estudiantes (hombres y mujeres) del ciclo de fundación en carreras de ingeniería (primer año de carrera) de la Universidad Antonio Nariño, sede Bogotá con edades entre los 15 y 25 años.

Para hacer realidad esta investigación y tomar un horizonte que permitiera dar solución parcial o total al problema planteado se fija el siguiente objetivo general.

Objetivo general

Lograr avances en la caracterización del pensamiento combinatorio implícito en la solución de problemas significativos, matemáticos y de contexto y en la correspondiente elaboración de significado de los conceptos del análisis combinatorio en estudiantes que están en la transición del pensamiento concreto al abstracto.

Se entiende la caracterización como la descripción de las formas de entender y las formas de pensar combinatoriamente de los estudiantes, su interacción y su consolidación en la construcción del significado de los conceptos de conteo, proceso que se llevará a cabo durante el desarrollo de las clases de matemáticas en el contexto de solución de problemas. De esta manera queda direccionado como **campo de acción** el proceso de enseñanza y aprendizaje del conteo.

El proceso se desarrolla en el curso de Solución de Problemas para las carreras de ingeniería, en la Universidad Antonio Nariño, Sede Sur, de Bogotá, siendo éste la **unidad de análisis**.

Para tal fin, se formulan cinco preguntas científicas que permitieron direccionar la investigación. Sobre las preguntas se generaron las tareas de investigación, la planificación de éstas, y el cronograma, que se construyó sobre la base de las fases de la metodología de investigación científica, definida para este caso. Ésta a su vez es el medio organizador que permite ejecutar las tareas propuestas y entrelazar los resultados obtenidos en cada una de ellas, alcanzándose el objetivo propuesto en la investigación.

Preguntas científicas

P1. ¿Qué modelos de caracterización del pensamiento combinatorio se han desarrollado y cuál ha sido su impacto?

P2. ¿Cuáles son los conceptos y significados empíricos que traen los estudiantes en conteo?

P3. ¿Cuáles estrategias emplean los estudiantes en la solución de problemas de análisis combinatorio y cómo se puede caracterizar el pensamiento involucrado en ellas?

P4. ¿Cómo procede la consolidación de un modo de pensar que puede llamarse combinatorio y qué características tiene?

P5. ¿Cómo ayuda el pensamiento combinatorio a la comprensión y aprendizaje de otras ramas de la matemática?

La estructura del documento memoria de esta tesis está constituido por la introducción, cinco capítulos, las conclusiones, las recomendaciones, las referencias bibliográficas y los anexos.

Los resultados de las primeras fases se reflejaron en una primera revisión del estado del arte contenido en el Capítulo 1 de este documento. A su vez esta revisión permite construir la respuesta a **P1**, pues con la búsqueda de respuestas a este interrogante se proyectó la revisión de los antecedentes al problema de investigación. Con la realización de este estudio se consolida el estado del arte, se fundamenta el marco teórico y referencial, y se construye el marco metodológico con el cual se realiza la investigación.

El Capítulo 2 dedicado al marco teórico, construido en sí, para fundamentar los cuatro componentes del modelo metodológico propuesto. Siendo estos el componente de educación matemática – pensamiento matemático-, el componente disciplinar –la combinatoria-, el componente metodológico –solución de problemas- y el componente cognitivo –teorías del desarrollo cognitivo-.

En el Capítulo 3 se consolida la revisión del estado del arte, del marco teórico y referencial, dando como resultado la creación y construcción del modelo metodológico «I.C.O.R.». Propuesta que en adelante se asume como el eje director de la metodología, recolección de la información y análisis de los resultados.

En el Capítulo 4 se reportan el análisis de los resultados de la revisión de la información recolectada en los diferentes instrumentos, sobre la base de la solución de las actividades diseñada para tal fin. Análisis que en primera instancia se consigna en las relatorias de clase y a partir de este se definieron y consolidaron las categorías y variables de análisis. Estos resultados se emplean para construir las respuestas a las preguntas de investigación.

En el Capítulo 5, Discusión de los resultados, sobre la base del análisis de los resultados obtenidos en la fase anterior y las bases teóricas definidas para tal fin, se da respuesta a las preguntas de investigación **P2, P3, P4** y **P5.**, proporcionando un significado propio al entendimiento del problema planteado que repercute directamente sobre las conclusiones, las recomendaciones e implicaciones que surgieron de la investigación. Se describen los resultados y aportes que son de orden teórico, práctico y científico logrados al culminar esta investigación.

De este modo se da una respuesta clara, objetiva y contundente sobre el objetivo y preguntas de investigación, al igual que se logra consolidar una solución al problema de investigación. De igual manera, se dejaron abiertas nuevas preguntas de investigación para desarrollar en próximos trabajos.

En el CAPITULO 1. ESTADO DEL ARTE se presenta un resumen de las investigaciones más relevantes en relación con el problema de investigación, clasificadas de acuerdo a sus enfoques y líneas de investigación, ya que a partir de ellas se construye el estado del arte que soporta el trabajo. De éstas destacamos sus apartes referidos a la definición de combinatoria, los antecedentes referentes a la investigación en esta línea, la metodología de investigación (su población y muestra), sus conclusiones y/o aportes a la educación matemática. Cabe señalar que la revisión del estado del arte se orientó a partir de la primera pregunta de investigación: P1 ¿Qué modelos de caracterización del pensamiento combinatorio se han desarrollado y cuál ha sido su impacto?, interrogante que se tomó como la hoja de ruta para iniciar la búsqueda de los antecedentes al problema de investigación. A partir de ésta se subdividió la revisión en los siguientes aspectos: 1) caracterización del pensamiento combinatorio, 2) modelos de pensamiento combinatorio y 3) Otras investigaciones orientadas al estudio del conteo.

Realizada la búsqueda, la investigación concluye que no se encuentran modelos específicamente enfocados al estudio de la caracterización del pensamiento combinatorio que determinen particularidades al respecto. Precisa advertir, en todo caso, que existen trabajos científicos en los cuales se analiza el razonamiento combinatorio, sin que éstos describan específicamente las características del pensamiento combinatorio, que hace parte del objetivo de la presente investigación.

Los siguientes son algunos de los referentes consultados, observándose que estas investigaciones están enfocadas especialmente a revisar aspectos como: 1) Los errores más frecuentes y sus causas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las técnicas de conteo. 2) Las estrategias propuestas a los estudiantes para desarrollar problemas de conteo, más no a estudiar el tipo de estrategias que los estudiantes desarrollan de forma autónoma cuando se enfrentan a la búsqueda de una solución a un problema combinatorio. 3) El tipo de problemas rutinario que se presentan a los estudiantes, los cuales terminan convirtiéndose en ejercicios de combinatoria repetitivos en cuanto a estrategia de solución y a estructura del mismo problema.

En Dubois, (1984) se destacan las condiciones que permiten tipificar los problemas, permitiendo encontrar estrategias para abordar cada problema, situación que con la experiencia se convierte en rutinaria, dejando de lado el desarrollo del pensamiento.

Entre tanto, se puede mencionar trabajos como el presentado por Kavousian, S. (2005): *“The Development of Combinatorial Thinking in Undergraduate Students”* donde se investiga el desarrollo del razonamiento combinatorio y se examina las dificultades presentadas en la solución de diferentes problemas combinatorios, estudio que finaliza con asociar los errores en las soluciones a un tipo de problema, para lo cual proponen clasificar los problemas combinatorios según el tipo de solución convencional, antes de ser presentados a los estudiantes. Se concluye que en este estudio no se propone ni se usa ningún modelo que permita hacer un estudio sobre el pensamiento combinatorio o su caracterización.

Rezaie M, Gooya Z. (2011) exponen en *“What do I mean by combinatorial thinking? los cuatro niveles de comprensión del pensamiento combinatorio. Es así como mencionan la exploración de la configuración dada para contar en casos particulares, obtención de todos los arreglos posibles en el conteo, uso de casos de “n elementos” en lugar de un número finito dado de elementos, y conversión de un problema en otro problema de combinatoria. Este estudio se basó en explorar cómo los estudiantes usaban los niveles de comprensión en la solución de problema rutinarios de conteo, sin implementar algún tipo de modelo y sin hacer descripciones de los razonamientos realizados por los estudiantes.*

Maher, C. A., Powell, A. B., & Uptegrove, E. B. (2011) toman como referente en la investigación *“Combinatorics and Reasoning: Representing, Justifying, and Building Isomorphisms”* el aprendizaje individual que el estudiante alcanza y luego comparte en comunidad. Consideran que los estudiantes son participantes activos en la construcción y justificación de su conocimiento matemático que los llevó a la construcción de otros nuevos.

Lockwood, E. (2013) propone en la investigación *“A model of students’ combinatorial thinking”* que la caracterización del pensamiento combinatorio se puede convertir en un “modelo” basado en sistemas. En el modelo que construyó a partir del análisis conceptual, describe y explica los aspectos comunes y significativos en el proceso de conteo, más no los procesos de razonamiento que el estudiante realiza durante esta actividad.

En el CAPITULO 2. MARCO TEORICO se presentan los referentes teóricos que se utilizaron en el análisis de los resultados que permitieron formalizar y establecer el resultado de la investigación, al igual que los fundamentos teóricos del modelo metodológico propuesto desde la postura de cuatro componentes, el componente de educación matemática –pensamiento matemático-, el componente disciplinar –la combinatoria-, el componente metodológico –solución de problemas- y el componente cognitivo –teorías del desarrollo cognitivo.

En el componente de educación matemática: Pensamiento Matemático se concibe desde la base teórica de la propuesta realizada por Guershon Harel (2008 a, b) en su trabajo del modelo DNR. En este aparte se resaltan los aspectos más influyentes para esta investigación destacando que esta propuesta es el resultado de un profundo estudio realizado por Harel sobre la demostración matemática. La obra completa se puede consultar en <http://www.math.ucsd.edu/~harel/>. En su trabajo Harel (2008 a) plantea que el fin de la educación matemática es desarrollar el razonamiento matemático del estudiante, razonamiento que se compone de formas de entender y formas de pensar. Esta postura pedagógica la desarrolla Harel desde un marco teórico que ha denominado *“DNR de las matemáticas”*. Por sus iniciales corresponden a tres componentes tomados en el marco de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que son la Dualidad (D), la Necesidad (N) y el Razonamiento Repetido (R). Para su comprensión, a continuación se expone esta posición teórica, producto de la revisión realizada a los documentos que ese autor ha presentado para describir y definir el modelo. Esta postura de Harel surge como

fruto del debate en la búsqueda de respuestas a las preguntas “¿Cuál es la matemática que debemos enseñar en las escuelas? y ¿Cómo la debemos enseñar?”

En componente disciplinar matemático: Combinatoria se trabajó sobre la base teórica de la definición de combinatoria enumerativa y los principios fundamentales de conteo. De este modo se puede considerar que la definición de combinatoria se ha ido complementando a través de las nuevas aplicaciones encontradas, sin perder su esencia que es *contar*, como lo dice Restrepo (2010) “la *combinatoria enumerativa* busca contar el número de elementos de un conjunto con ciertas propiedades, lo cual concurre en encontrar su cardinal, teniendo como objetivo el “contar sin contar”, es decir poder determinar el número de elementos de un conjunto sin necesidad de tener que hacer la lista en la que se cuenten uno a uno”, pasando por relaciones de recurrencia, funciones generatrices, ecuaciones diferenciales, teoría de grafos y teoría de juegos entre otras temáticas que se incluyen en el grandioso campo de la combinatoria.

La definición presentada anteriormente permitió tomar una posición al respecto, alrededor de la cual se desarrolló el componente disciplinar utilizado en esta investigación.

Para determinar los tópicos a incluir se puede ver, por ejemplo, una publicación reciente en combinatoria, “How to Count” de Robert A. Beeler (2015), publicada por Springer, en la cual se puede ver la dimensión y aplicabilidad que ha ido ganando la combinatoria a nivel mundial, mientras que en el medio colombiano solamente se desarrollan algunos apartes de unos dos o tres capítulos de este referente, lo cual deja ver la falta de importancia que se le está dando a este campo.

Por otra parte, algunos de estos tópicos deberían haber sido tratados en la formación escolar del estudiante, pero en el contexto colombiano solamente se tratan en la universidad, y de manera muy superficial. Con lo anterior se quiere evidenciar que la combinatoria no solamente son las técnicas básicas de conteo, que en ocasiones son restringidas aún más, a solamente las permutaciones y combinaciones y como elementos requeridos para hacer una introducción al estudio de las probabilidades.

En el componente metodológico: Solución de Problemas se desarrolla a partir de una triangulación entre las teorías de solución de problemas propuestas por Polya (1965), Schoenfeld (1985, 1992) y Miguel de Guzmán (1985). Esta permitió consolidar parte de la metodología que está implícita en los instrumentos que se elaboraron para recoger la información, la que deja evidenciar el avance en la consolidación de las formas de entender a las formas de pensar y viceversa. Otra parte de la metodología se marca por los resultados metodológicos de la propuesta de Lakatos (1978). Sobre estos referentes no se hacen análisis y comentarios en este documento por su amplia consolidación en el ámbito de la educación matemática. Además, hicieron parte, como elementos metodológicos e interpretativos de los procesos y resultados obtenidos, las consideraciones dadas por Gowers (2000), en su trabajo “Dos Culturas Matemáticas”.

El componente cognitivo: Teorías del Desarrollo Cognitivo se soporta sobre los aportes teóricos pertinentes para nuestra investigación, tomados de las teorías del desarrollo cognitivo y del aprendizaje más destacadas de autores como Piaget y Fischbein. Sobre los aportes del primer autor no se hace referencia en este documento por su amplio reconocimiento dentro de la comunidad de educadores matemáticos. Con respecto al segundo autor se presentan algunos apartes de su teoría de esquemas e intuiciones.

En el CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACION se desarrolló desde dos enfoques; por un lado, está la metodología de investigación cualitativa propuesta por Hernández Sampieri et al (2014). La cual fue el hilo conductor del proceso investigativo en

general. Por otro lado, se desarrolló una metodología de investigación en didáctica, para lo cual se construyó, desarrolló e implementó el modelo metodológico «I.C.O.R.», constituyéndose éste en un espacio conceptual y metodológico que facilitó y organizó la comprensión del problema de investigación. De este modo se permitió establecer las relaciones y características de los elementos objeto de estudio. Sobre la base del modelo se diseñó y construyó la unidad didáctica, compuesta por ocho actividades que contenían los problemas cuya solución tiene implícita un concepto de conteo, al igual que se diseñaron y planificaron las dieciséis clases necesarias para desarrollar la unidad didáctica. Estos instrumentos sirvieron para obtener y recoger los datos e información necesaria para dar sustento a las respuestas de las preguntas de investigación.

Por otro lado, se hizo el diseño experimental en dos fases, una basada en la investigación-acción y la otra en los elementos de la teoría fundamentada, de manera que con estos diseños se validaron los instrumentos y la propuesta teórico-práctica del modelo metodológico «I.C.O.R.»:

La postura que permitió fundamentar el modelo metodológico fue considerar la investigación en educación matemática «EM» como un universo formado por cuatro componentes: uno de educación matemática, uno disciplinar, uno metodológico y otro cognitivo. Es oportuno ahora indicar que estos componentes se articularon y estructuraron bajo dos directrices, una de ellas es la ciencia del diseño tratada por Lesh y Sriraman (2005) en la reconceptualización de la educación matemática como una ciencia del diseño. La otra está dada por la adaptación de las fases del diseño instruccional⁶⁶, tomadas de las cinco fases del modelo genérico de procesos de diseño instruccional ADDIE, de sus siglas en inglés *Analysis* (análisis), *Design* (diseño), *Development* (desarrollo), *Implementation* (implementación) y *Evaluation* (evaluación), implementadas para dar la secuencialidad direccional a la construcción de cada uno de los módulos que estructuran el modelo.

La estructura del modelo metodológico inicia con la definición del primer módulo, el módulo de las *bases generales*, el cual es un *componente invariante* de la estructura general del modelo, quedando éste conformado por los cuatro componentes mencionados anteriormente.

El primer componente responde al [¿para qué?] o a el porqué del objeto investigado. Este da la directriz para definir la finalidad y el fundamento en el desarrollo e implementación del modelo, aplicado sobre un sujeto. El segundo componente concierne a un campo o rama del saber de las matemáticas según la clasificación que históricamente se le han dado, proporcionando el cuerpo a la intencionalidad, la cual responde a [¿el qué?] del objeto investigado. El tercer componente recoge el método o heurística [¿el cómo?] el cual permite definir y construir los instrumentos apropiados para el contexto del objeto y sujeto investigado. El cuarto componente recae sobre el sujeto, siendo éste el facilitador o participante sobre el cual se indagan sus opiniones, sus saberes y su subjetividad frente al fenómeno en estudio según sea el objetivo de investigación, el [¿a quién?].

Establecidas las bases generales del modelo, éstas se irán delimitando de forma progresiva en dos sentidos. Un primer sentido es el transversal guiado por las fases del diseño instruccional adaptadas al modelo lo cual permite concretar y consolidar un enfoque de lo general a lo particular sobre el objeto de estudio. El segundo sentido es el longitudinal, que estará direccionado por los componentes del

⁶⁶ Williams, P. eat, *Fundamentos de diseño técnico pedagógico en el aprendizaje*. Disponible en URL: <http://aulavirtualkamn.wikispaces.com/file/view/2.+MODELOS+DE+DISEÑO+INSTRUCCIONAL.pdf> [Consulta 2 de octubre de 2015]

módulo de las bases generales. Esto implica afianzar el desarrollo integral y coherente de los nuevos módulos que completarán la

estructura del modelo. Cada uno de éstos yace como el producto del diseño y la ejecución de cada una de las fases.

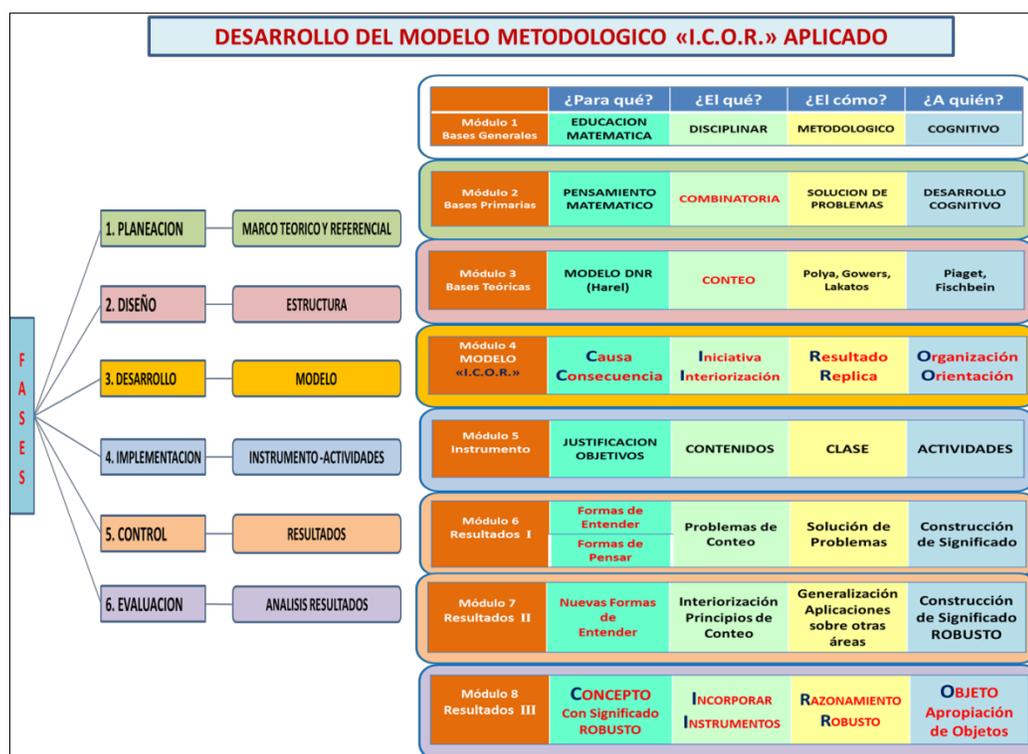


Figura 1. Desarrollo del Modelo Metodológico «I.C.O.R.» aplicado a la caracterización del pensamiento combinatorio

Lo explicado anteriormente corresponde al desarrollo e implementación del modelo metodológico «I.C.O.R.» de forma general. En la Figura 1, se presenta este desarrollo aplicado a la caracterización del pensamiento combinatorio sobre la base conceptual de los principios fundamentales de conteo. Además, se observa que el componente disciplinar es la única variante en toda la estructura, situación que deja abierta la posibilidad de ser implementado en los otros campos de la matemática.

La fase de implementación se da con la concreción del quinto módulo, el módulo del instrumento. Dadas las condiciones espacio-tiempo en las que se planificó esta investigación se asume y define que el instrumento pertinente para recoger la información, tener el control sobre ella y que cumple con las especificaciones dadas por el modelo para cada componente es una *unidad didáctica*.

El diseño y construcción de este instrumento metodológico y didáctico se dio bajo la adaptación de la estructura general de una unidad didáctica a los requerimientos del modelo. Esta estructura está compuesta por un título, una justificación y unos objetivos, elementos que responden al primer componente; unos contenidos (los principios fundamentales de conteo) que responden al segundo componente; una metodología (propia del modelo «I.C.O.R.») que responde al tercer componente; y unas actividades que responden al cuarto componente.

En el Anexo 1 se podrá ver como ejemplo del diseño de las clases C1 y C2, correspondientes al desarrollo de la actividad A1, la cual se presenta en el Anexo 2.

En este CAPITULO 4. ANALISIS DE LOS RESULTADOS DE LAS ACTIVIDADES se presenta el análisis de los resultados bajo un

enfoque de focalización progresiva (Mertens, 2010)⁶⁷ en la cual se hace una descripción progresiva de las situaciones. Para esta investigación se realizó el análisis de una forma exterior hacia una interior, es decir, de los resultados grupales a los particulares, siguiendo la estructura del modelo metodológico «I.C.O.R.», la cual permitió establecer los componentes y fases de análisis, como se muestra en la Figura 2.

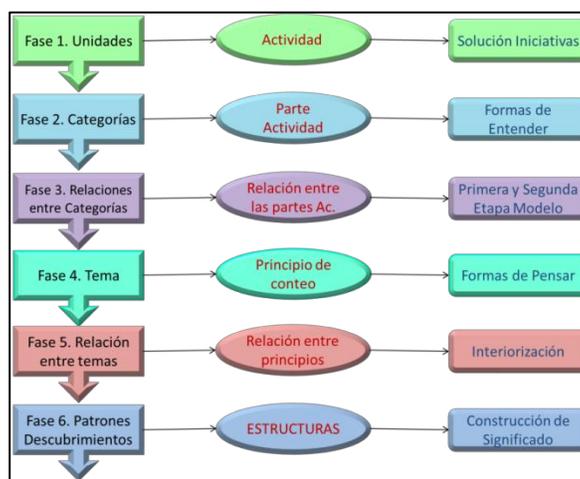


Figura 2. Estructura de Análisis. Enfoque de Focalización Progresiva

⁶⁷ Mertens, D. M. (2010) Research and evaluation in education and psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods, 3rd ed. Thousand Oaks, CA: Sage.

El insumo utilizado para tal fin son las relatorías de clase que se realizaron con el material producido por los estudiantes durante las 16 secciones de clase, al desarrollar las 8 actividades. Es de aclarar que para comenzar el punto se análisis se focalizó sobre el número de soluciones dadas a los diferentes problemas (iniciativas).

Antes cabe precisar dos aspectos. Un primer aspecto a considerar es que los resultados y las discusiones que se presentan a continuación están dados sobre la base de la consolidación del análisis de los resultados expuestos en el capítulo 4 del documento original de esta investigación. El segundo aspecto a considerar es que no se debe asociar los resultados al número de respuestas correctas o incorrectas dadas por los estudiantes, sino lo que se debe considerar es que estas cifras representan el número de soluciones (completas, parciales y no correctas) que fueron desarrolladas por los estudiantes. De éstas se analizó paso a paso el razonamiento manifestado y presentado de forma escrita por cada uno de los estudiantes participantes en la investigación. Además, éstas se cuantificaron para mostrar y evidenciar las tendencias y comportamientos encontrados en el análisis de los mismos.

De esta forma se puede estimar que las ocho actividades desarrolladas por el grupo de 23 estudiantes del curso de Solución de Problemas (sujetos), conformaron la unidad didáctica (instrumento) que agrupó 97 iniciativas (problemas), de las cuales se espera obtener 2231 soluciones (muestra objetivo). En la Figura 3 se presenta la distribución de este resultado, del cual se puede ver que el 60,8% de estas soluciones se utilizó en el análisis de los resultados, siendo ésta la muestra real.

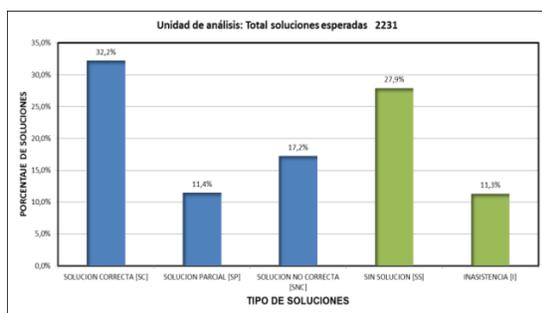


Figura3. Distribución del total de soluciones esperadas en la muestra objetivo

Como se puede observar en la Figura 4, realmente el aporte de la información analizada corresponde al 71.7% de la muestra real. Resultado que se da, ya que se excluyeron del análisis las soluciones no correctas, que realmente no hacían ningún aporte al objetivo de investigación. De otro modo si había algún aporte se consideraron soluciones parciales. Además, se presenta en la distribución el aporte tomado en cada una de las partes de las actividades, evidenciándose que en la medida en que se avanzaba en el desarrollo de cada una de las partes de la actividad, el aporte fue más significativo.

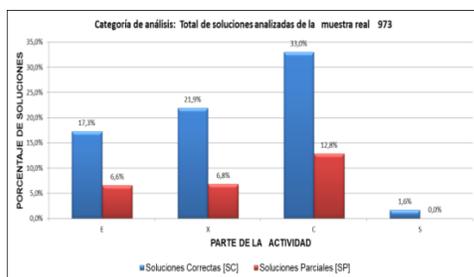


Figura4. Distribución de la muestra real de análisis

Por otro lado, se pudo suponer que si el proceso llevado a cabo fuese equitativo a lo largo del desarrollo de las ocho actividades, cada una de ellas debería haber aportado un 12.5% de información en promedio. Al comparar este valor con los presentados en la Figura 5 se puede considerar que el proceso fue homogéneo ya que los valores experimentales están alrededor del valor teórico con una mínima diferencia que en parte se debe a la inasistencia de los estudiantes, ya que el faltar al desarrollo de una de las dos partes de la actividad presencial en el aula, afectaba el desarrollo de las otras partes de la actividad. Esta situación se evidenció especialmente en la A3, ocasión en la cual faltaron más estudiantes, mientras que se presentó el caso contrario en la A1 y A8.

Estos resultados a su vez dejan ver como la propuesta metodológica basada en la estructura del modelo «I.C.O.R.» logró equilibrar el proceso de aprendizaje de los principios fundamentales de conteo, ya que en general los resultados de las dieciséis clases fueron similares como se muestra en la Figura 5

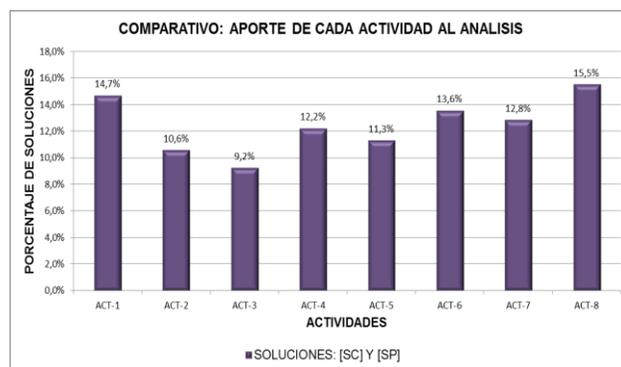


Figura 5. Distribución del aporte de cada actividad ala análisis

En el CAPITULO 5. DISCUSION DE LOS RESULTADOS se da respuesta a las preguntas científicas que se plantearon para direccionar esta investigación, conducentes a alcanzar el objetivo general y dar solución al problema de investigación planteado. Se recuerda que para las preguntas P1 se dio respuesta en las conclusiones del resumen del capítulo 1.

En cuanto a la **P2** *¿Cuáles son los conceptos y significados empíricos que traen los estudiantes en conteo?*

Para este investigador, esta situación se ha de considerar como lo ideal en el abordaje inicial del problema, ya que en esencia si el estudiante logra reconocer el conjunto o conjuntos iniciales, y con éstos construye un arreglo (configuración), en particular está interpretando las condiciones dadas sobre los elementos. Esta acción le permitirá hacer una relación y conexión con sus preconceptos o experiencias en el área, permitiéndole iniciar la construcción de sus primeras formas de entender combinatorias. Una manifestación de éstas son las relaciones de similitud que establece con otro problema que presenta una estructura muy similar, siendo ésta una característica del pensamiento combinatorio.

De esta forma en lo que respecta a lo evidenciado se ve que, en su mayoría, los estudiantes hacen algún tipo de arreglo inicial, situación que refleja la comprensión y distinción de las condiciones iniciales sobre los elementos. Estas condiciones posteriormente les permitirán construir significado del concepto de conteo implícito en la solución del problema, ya que éstas corresponden a los atributos propios del concepto.

En cuanto a los conceptos previos explicitados por los estudiantes ante su primer enfrentamiento a cada una de las actividades, se analizó si el estudiante los manejaba de forma natural (no formal) pero análoga a la noción de conteo implícita en la solución de los problemas que

conformaron cada una de las actividades. Por ejemplo, en la Actividad 2, se iniciaba la construcción del significado del concepto de permutación (inmerso en el principio de la permutación) y los estudiantes, bajo el principio del producto, lograron construir el principio, identificando las características que distinguen este concepto, a saber, arreglos con orden y sin repetición.

En cuanto a **P3** *¿Cuáles estrategias emplean los estudiantes en la solución de problemas de análisis combinatorio y cómo se puede caracterizar el pensamiento involucrado en ellas?*

Se observó la utilización de diversas estrategias, entre ellas tenemos la estrategia de listas, que fue implementada especialmente en las primeras actividades, y además se observó que se dejaba como último recurso después de explorar e intentar hacer la solución mediante razonamientos basados en algún concepto combinatorio (formas de entender combinatorias). El diagrama de árbol fue muy poco implementado por el grupo de estudiantes, dado que en su mayoría encontraron unas estrategias menos dispendiosas, como lo fueron los símbolos o el diagrama de casillas. Los símbolos se entenderán como la asignación de una letra, un número u otro símbolo para representar los elementos involucrados en la solución, simplificando de esta forma su escritura y facilitando un control en la elaboración de las configuraciones. Las casillas por su parte son espacios representados por rectángulos o guiones, que representan las posiciones de cada uno de los elementos dentro de una configuración, esquema que permitió visualizar las relaciones a considerar (análisis de las condiciones sobre los elementos –formas de entender-).

Por otro lado, se analizó que otro grupo de estrategias empleadas por los estudiantes en la solución de los problemas propuestos fueron sus formas de proceder, las cuales estaban directamente asociadas a una estructura conceptual de formación previa o en proceso de construcción.

En primera instancia tenemos el conteo sistemático, basado en alguna de las estrategias de representación expuestas anteriormente, representación sobre la cual el estudiante hace el análisis (identificación de los atributos propios del concepto combinatorio pertinente, basado en el análisis realizado a partir de las condiciones dadas sobre los elementos del conjunto inicial), logrando establecer una relación y conexión conceptual, que le permite identificar un concepto previo apropiado o adaptable, siendo esta acción una forma de entender. Esta, mediante puentes cognitivos propios de la cognición del estudiante, se organiza y orienta en la construcción del nuevo significado al concepto aplicado, acción que estará relacionada a un proceder dado por una forma de pensar la cual está asociada al principio de conteo que concierne dicho concepto. Por otro lado, se puede ver que la construcción de este nuevo significado puede ser la formación de un nuevo concepto, es decir de una nueva forma de entender.

El proceder descrito anteriormente se considera por parte del investigador como la evolución de las estructuras el pensamiento combinatorio, que traen consigo mismas la evolución entre las formas de entender combinatorias y las nuevas formas de entender (formas de entender más robustas), asociadas a una forma de pensar que permite la transferencia o el cambio de la una a la otra. Por ejemplo, una forma de entender asociada al concepto de la permutación, influenciada por el proceder del principio del producto, se transforma en una nueva forma de entender combinatoria, formando el concepto de la variación.

En cuanto a la **P4** *¿Cómo procede la consolidación de un modo de pensar que puede llamarse combinatorio y qué características tiene?*

Antes de continuar, es de aclarar lo que significa para este investigador el “caracterizar el pensamiento combinatorio”. Entre las cosas que se buscaron fue entender y describir como el estudiante

realiza las operaciones fundamentales de la actividad mental, entre ellas la abstracción, provocadas y orientadas a partir de las acciones mentales generadas durante el proceso de interpretación que él realiza cuando se enfrenta o se reta a solucionar un problema significativo, matemático (en este caso del análisis combinatorio) o de contexto. Se aclara que la investigación se enfocó en examinar el pensamiento que utilizaron los estudiantes en la solución de los problemas planteados en las actividades diseñadas para tal fin y en consecuencia se podrán ver los resultados como un avance significativo en la caracterización del pensamiento combinatorio, realizada sobre la base del marco teórico y metodológico construido para tal propósito.

En este sentido los resultados experimentales de la investigación llevaron a concluir y proponer una caracterización del pensamiento combinatorio suscitado por el análisis hecho por los estudiantes de las situaciones y preguntas planteadas. Esta caracterización se presenta de manera general en la Figura 6.

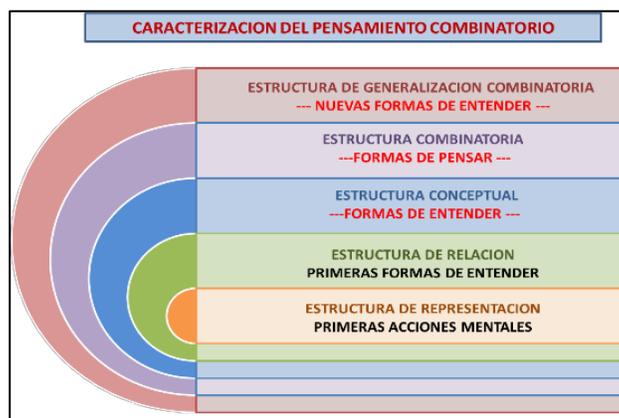


Figura 4. Estructura de la caracterización del pensamiento combinatorio

En la estructura de representación la característica principal del pensamiento combinatorio es el reconocimiento de las configuraciones (análisis de las condiciones dadas sobre los elementos de un conjunto o los conjuntos iniciales), acción que se realiza mediante el uso de las estrategias de representación y la interacción de operaciones mentales como la clasificación y organización.

En la estructura de relación y conexión se da la evocación de las formas de entender combinatorias, asociadas a la aprehensión que se generó sobre la representación y basadas en el análisis (realización de procesos mentales como la observación, comparación, distinción, entre otros) realizado a las condiciones dadas sobre los elementos. De esta forma se permite la identificación de la existencia, o no existencia, de los atributos combinatorios propios de las condiciones como: orden, repetición, distinción y posición de los elementos, las cuales están directamente inmersas en los conceptos combinatorios, acción que permite la construcción de nuevos significados del concepto o conceptos involucrados.

En la estructura conceptual se producen las formas de pensar combinatorias, como consecuencia de la síntesis realizada al proceso de la estructura anterior, síntesis en la que se activan procesos mentales como la integración y la orientación del conocimiento, que se materializa bajo un proceder asociado a alguno principio del análisis combinatorio. Esta es la característica del pensamiento combinatorio en esta etapa, el paso de una forma de entender combinatoria a una forma de pensar combinatoria.

En la estructura combinatoria, el pensamiento combinatorio se caracteriza en su etapa de formal, basada en la abstracción y la conceptualización. Es decir, se considera que el estudiante que alcanza esta estructura, ha construido e interiorizado un concepto

combinatorio, acción que le permite realizar las dos primeras estructuras internamente (forma mental y abstracta), para ser exteriorizadas directamente en formas de pensar estructuradas y formalizadas. Además, como otra característica de esta estructura, está el razonamiento a la inversa que puede realizar el estudiante.

En la estructura de generalización combinatoria el pensamiento combinatorio se caracteriza por alcanzar resultados generales a partir de resultados particulares y producir nuevos modelos combinatorios sobre la base de los modelos ya conocidos, siendo las características principales la transformación y la generalización.

De igual manera se deja claridad que este grupo de características se evidenciaron y convalidaron durante el proceso dado en la solución de problemas del análisis combinatorio, por lo cual se consideran que constituyen un tipo de pensamiento, ya que pone de manifiesto la existencia y el uso de operaciones cognitivas generales del pensamiento, que se lograron caracterizar desde el caso particular de la combinatoria, consolidándose este tipo de pensamiento, que se ha denominado pensamiento combinatorio y alcanzándose así una solución satisfactoria al problema de investigación.

En cuanto a **P5** *¿Cómo ayuda el pensamiento combinatorio a la comprensión y aprendizaje de otras ramas de la matemática?*

De acuerdo a lo manifestado por los estudiantes, se observa que en su mayoría están fuertemente de acuerdo en los aspectos más relevantes de la investigación como la metodología, como el aprendizaje a través de la solución de problemas, como el espacio de trabajo colaborativo y el aporte que el pensamiento combinatorio puede traer a ellos en diferentes aspectos. Además, en el plano personal, se destacan algunas de las opiniones dadas por los mismos estudiantes.

- “Conocer un tema que era desconocido y evaluar me en qué nivel de comprensión estoy en la solución de problemas”,
- “Me dejó un nuevo método de análisis de solución de problemas. Ya no tengo el pensamiento arcaico de enumerar todo, por el contrario, puedo desarrollar el problema y crear formas generales”,
- “Interpretar diferentes situaciones con compromiso y disciplina”,
- “Cambié la manera en la que veía los problemas. Me siento capacitado para implementar este tipo de pensamiento en mi vida laboral, pues en mi empleo las relaciones de materiales se llevan a cabo por conteo, uno a uno. Con los nuevos conocimientos se pueden hacer planteamientos para generar un cambio significativo”.

Por otro lado, está el rol de estudiante y su visión de la naturaleza de la matemática, ante lo cual opinaron:

- “Ya no veo la matemática de manera operativa-repetitiva”,
- “Encontré mejores herramientas para la solución de problemas matemáticos”,
- “Buenas metodologías que nos sacaron del área de confort y lo reta, lo enseña y a la vez amplios métodos, iniciativas y principios de pensamiento”,
- “Nuevas formas de comprender el planteamiento de problemas y sus posibles soluciones. No sólo en las matemáticas sino en la ciencia que se aplique”,
- “Conocimientos nuevos para atender otros cursos”.

Lo anterior es una evidencia, más que natural muy sincera, por parte de los estudiantes quienes sintieron gratificación con los resultados y aportes dados por el curso, tanto en metodologías para solucionar

problemas como en conocimientos y estrategias para implementar en lo personal, lo laboral y lo académico.

CONCLUSIONES

Se pretende poner en perspectiva la anterior discusión de los resultados. En cuanto al objetivo general, se aclara que la investigación no tenía el objetivo de hacer una caracterización exhaustiva, sino hacer avances significativos en la caracterización del pensamiento combinatorio, sobre la base de la solución de problemas significativos, de matemáticas y de contexto, con la correspondiente construcción de significado de conceptos del análisis combinatorio. Se estima que este resultado se alcanzó satisfactoriamente, como se puede evidenciar en la contestación a las preguntas dos, tres y cuatro dada en el Capítulo 5.

Frente al problema de investigación: “¿Cuáles son las características del pensamiento combinatorio implícitas en la solución de problemas matemáticos o de contexto y en su modelación para construir significado de los conceptos propios del análisis combinatorio?”, se puede concluir que los resultados proporcionaron suficiente evidencia que se consolidó de manera sistemática. Es decir, deja ver que en el proceso de construcción y desarrollo del pensamiento matemático durante la solución de problemas del análisis combinatorio, existen unas estructuras que se implementan con el apoyo de operaciones fundamentales de la actividad cognitiva. Estas estructuras reconocidas corresponden a la representación, a la de relación y conexión, a la conceptual, a la combinatoria y a la de generalización combinatoria.

Con este esquema de estructuras se caracterizó el tipo de pensamiento matemático implícito en ellas, sobre la base de describir la formación de las formas de entender y las formas de pensar combinatorias y la interrelación entre ellas, la cual origina las nuevas formas de entender combinatorias.

Este grupo de características se convalidó y fundamentó a partir del análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes en la solución de problemas del análisis combinatorio. De esta forma se logró consolidar en los estudiantes un tipo de pensamiento matemático, que se le ha denominado pensamiento combinatorio. Este proceso que se desarrolló a través de la unidad didáctica diseñada para tal fin; hecho que permitió hacer un aporte satisfactorio a la solución del problema de investigación. La descripción detallada de cada una de las estructuras identificadas se hizo en los resultados de la Pregunta 4 de investigación presentados en el Capítulo 5.

Al evaluar los resultados de la investigación con respecto a los objetivos de la educación matemática «EM», se dio con el cumplimiento de dos de ellos. Uno relativo a la caracterización del pensamiento matemático, propósito que se ratificó con la contribución realizada a la caracterización y consolidación del pensamiento combinatorio, como un tipo de pensamiento propio de las matemáticas. Por otro lado, está el modelo metodológico «I.C.O.R.», construido como herramienta de metodología de investigación, pero que a su vez puede servir como modelo didáctico para la enseñanza y aprendizaje de otras ramas de las matemáticas.

En cuanto a lo teórico, está la fusión que se logró con los fundamentos del pensamiento de Harel y el análisis de Gowers, que permitió estructurar el marco teórico sobre el cual se construyó el modelo metodológico «I.C.O.R.», modelo que se presenta como un esquema aplicable al estudio de los diferentes fenómenos y problemáticas subyacentes en la «EM»; permitiendo su comprensión y análisis. En este sentido, el modelo es un espacio conceptual y metodológico que facilitará y organizará la comprensión de la realidad compleja inmersa en la «EM», ya que permite seleccionar el conjunto de elementos objeto de estudio, y descubre y caracteriza la relación entre ellos; además, profundiza en las implicaciones que emergen con la práctica. De este modo, aporta y deriva nuevos elementos para investigar,

nuevos conocimientos, nuevas metodologías y nuevas experiencias. Éstas deben enriquecer la calidad de la dinámica del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Por otro lado, se tiene la innovación dada con la ampliación del DNR al DDNR, denominado así dentro del modelo metodológico el “DOBLE DNR” (DDNR), siendo ésta la base desarrollada en la segunda etapa del modelo, la etapa de la Réplica. Además, se resalta que en el modelo DNR se enuncia la existencia de las formas de entender y las formas de pensar, sin describir en detalle las características que tienen cada una de ellas dentro del pensamiento matemático ni precisar las formas en que interactúan. Esta particularidad se desarrolló en la caracterización del pensamiento combinatorio llevada a cabo en esta investigación.

En cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la combinatoria la estrategia de trabajo del modelo metodológico «I.C.O.R.» se considera muy significativa; ya que, tanto para el autor como para los estudiantes, la enseñanza a través de la solución de problemas, fue una experiencia novedosa.

En cuanto a su aporte práctico, esta investigación dejó como resultado la construcción y consolidación de la unidad didáctica basada en el modelo, que podrá ser implementada dentro del syllabus de los cursos que desarrollen la unidad temática de los principios fundamentales de conteo. Ésta incluye el diseño metodológico de clases y la elaboración de las actividades implementadas sobre la base teórica de los principios fundamentales de conteo, de la suma, del producto; de la permutación, variación, combinación, el trasfondo del conteo contenido en el teorema de binomio y el principio de inclusión - exclusión.

Finalmente, es claro que la investigación arrojó unos resultados que podrán exponerse en ponencias y publicaciones científicas.

RECOMENDACIONES

A continuación se dejan algunas recomendaciones para futuras investigaciones en educación matemática, y en general para toda la comunidad de educadores matemáticos.

En cuanto al objetivo de la caracterización del pensamiento combinatorio, por un lado, es necesario continuar con ello ya que la presente investigación pretendió lograr unos primeros avances. Esto puede hacerse en especial frente a otros tópicos de la combinatoria, con el objetivo de ratificar, precisar y complementar la caracterización lograda y enriquecer la descripción alcanzada en las diferentes estructuras propuestas, y, por otro lado, de consolidar de manera general la caracterización del pensamiento combinatorio. Esta consolidación permitirá darle la importancia y status al pensamiento combinatorio dentro de los currículos, igual que el status que tienen otros tipos de pensamiento matemático como el algebraico o el geométrico.

En cuanto a los objetivos de la educación matemática, se debe implementar el modelo metodológico «I.C.O.R.» en nuevas investigaciones que impliquen la caracterización de otros tipos de pensamiento matemático. En otras palabras, se debe repetir esta experiencia con otras unidades temáticas, con el fin de refinar el modelo y ponerlo a prueba, de tal forma que se pueda consolidar como un enfoque teórico de carácter universal.

En cuanto a los aportes prácticos se sugiere al Departamento de Matemáticas de la Universidad Antonio Nariño incluir total o parcialmente la unidad didáctica construida para esta investigación, como parte del material didáctico utilizado en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la unidad temática desarrollada –combinatoria básica, en particular los principios fundamentales de conteo-, implementación que se puede hacer en los diferentes cursos que en sus syllabus incluyen esta temática.

En cuanto al curso de Solución de Problemas utilizado como contexto para esta investigación se propone que se elabore en su totalidad con una metodología similar a la implementada en este trabajo, teniendo como objetivos desarrollar el pensamiento aritmético, el pensamiento métrico, el pensamiento geométrico, el pensamiento algebraico y el pensamiento combinatorio. Esta situación deja dos sugerencias. Una primera sugerencia es la ampliación de la intensidad horaria del curso. Esto porque la experiencia vivida durante el curso exigió la utilización de dieciséis clases, por un lado, y, por otro lado, porque se requiere de suficiente tiempo que permita hacer el debate y discusión sobre las formas de entender y de pensar de los estudiantes, las cuales son la base para la consolidación y desarrollo de cada uno de los tipos de pensamiento. La segunda sugerencia es la capacitación al grupo de docentes que dirigen estos cursos con el objetivo que se involucren y actualicen en la transformación de la enseñanza a través de la solución de problemas, y que efectivamente el curso en toda la población procure los mismos resultados.

En cuanto a la población y muestra se recomienda replicar esta experiencia en otros contextos que involucren estudiantes de educación básica primaria, media y media superior (con la salvedad que para la educación básica primaria y media se deben proponer y construir nuevos problemas acordes con el nivel de desarrollo biológico y cognitivo de los estudiantes involucrados), tanto de la educación pública como privada. Por un lado, con el objetivo de ratificar los hallazgos obtenidos en esta investigación, y por otro lado para complementar y robustecer los resultados de tal forma que se pueda seguir consolidando la caracterización del pensamiento combinatorio, y así reunir más evidencias para hacer sugerencias de fondo que ayuden a la transformación del currículo actual de la educación matemática en Colombia.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

- Batanero, C., Godino, J., & Navarro-Pelayo, V. (1997a). *Combinatorial reasoning and its assessment*. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *The Assessment Challenge in Statistics Education* (pp. 239-252): IOS Press. Disponible en URL: <https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/assessbk/chapter18.pdf> [Consulta 20 de Abril de 2015]
- Dubois, J. G. (1984). Une systématique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics*, 15 (1), 37-57.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel
- Fischbein, E. y Grossman, A. (1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 34: 27-47.
- Font, V. (2002). *Una organización de los programas de investigación en didáctica de las matemáticas*. Revista EMA, 7(2), pp. 127-170. Disponible en URL: http://funes.uniandes.edu.co/1151/1/85_Font2002Una_RevEMA.pdf [Consulta 24 de Marzo de 2014]
- Glaser, B. y Strauss, A. (1967). *The discovery of the grounded theory: Strategies for qualitative research*. New York: Aladine de Guyter.
- Godino, J. D., Navarro-Pelayo, V. y Batanero, C. (1992). *Analysis of student's errors and difficulties in solving combinatorial problems*. Proceedings of the XVI P.M.E., (v.1, pp.241-248). University of New Hampshire. Durham.
- Gowers, W. (2000). *Two Cultures of Mathematics*. Disponible en URL: <https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/2cultures.pdf>. [Consulta 24 de septiembre de 2014]
- Grimaldi, Ralph. (1994). *Matemáticas Discreta y combinatoria*. Tercera edición. Editorial Adisson-Wesley

- Guzmán, M. de, (1985) *Enfoque heurístico de la enseñanza de la matemática, Aspectos Didácticos de matemáticas I*. Publicaciones del Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza, 31-46
- Guzmán, M. de (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Iberoamericana de Educación*. No. 043, Enero-Abril, 19-58. Madrid, España.
- Halani A. (2013). Students' Ways of Thinking about Combinatorics Solution Sets. A Dissertation Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree Doctor of Philosophy ARIZONA STATE UNIVERSITY. Disponible en URL: https://repository.asu.edu/attachments/110671/content/Halani_asu_0010E_13085.pdf [Consulta 10 de noviembre de 2016]
- Harel, G. (2008a). DNR *Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction: Focus on Proving, Part I*, *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 40, 487-500. Disponible en URL: <http://www.math.ucsd.edu/~harel/publications/Downloadable/DNRI.pdf> [Consulta 12 de marzo de 2015]
- Harel, G. (2008b). DNR *Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction, Part II*, *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 893-907. Disponible en URL: <http://www.math.ucsd.edu/~harel/publications/Downloadable/DNRII.pdf> [Consulta 30 de marzo de 2015]
- Hernández Sampieri, R.; Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2014) *Metodología de la Investigación*. Sexta Edición .México: McGrawHill / Interamericana Editores S.A. de C.V
- Inhelder y Piaget, J. (1955) *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Buenos Aires: Paidós.
- Kavousian, S. (2005). *The Development of Combinatorial Thinking in Undergraduate Students*. Paper presented at the annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Hosted by Virginia Tech University Hotel Roanoke & Conference Center, Roanoke. Disponible en: URL: http://citation.allacademic.com/meta/p_mla_apa_research_citation/0/2/4/6/8/p24689_index.html?phpsessid=nvg7rcbu5gla2kgoogjp2l05i2 [Consulta 28 de agosto de 2014]
- Lakatos, Imre. (1978a) *La metodología de los programas de investigación científica*. Madrid: Alianza Editorial.
- Lakatos, Imre. (1978c) *Pruebas y refutaciones*. Madrid: Alianza Editorial.
- Lesh, R., & Sriraman, B. (2005). *John Dewey revisited - pragmatism and the models-modeling perspective on mathematical learning*. In A. Beckmann, C. Michelsen, & B. Sriraman (Eds.), *Proceedings of the 1st International Symposium on Mathematics and its Connections to the Arts and Sciences* (pp. 32–51). May 18–21, 2005, University of Schwabach Gmuend. Germany: Franzbecker Verlag.
- Lockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking: The Role of set out comes, *The Journal of Mathematical Behavior*, 32, 251-265. Disponible en URL: <file:///C:/Users/pc/Downloads/Lockwood2013JMBModel.pdf> [Consulta 26 de agosto de 2014]
- Ministerio de Educación Nacional. (1998) *Lineamientos curriculares, 7 de junio de 1998*. Bogotá, Colombia: Autor: Disponible en URL: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-339975_matematicas.pdf [Consulta 27 de septiembre de 2014]
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Mertens, D. M. (2010) *Research and evaluation in education and psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods*, 3rd ed. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Piaget Jean. (1950) *Introducción a la Epistemología Genética*. Buenos Aires: Paidós
- Polya, G. (1965) *Como Plantear y Resolver Problemas*. México: Trillas
- Restrepo M., Pascual. *Un Recorrido por la Combinatoria I*. Bogotá: Olimpiadas Colombianas de Matemáticas, Universidad Antonio Nariño 2010
- Rezaie M, Gooya Z. (2011). *What do I mean by combinatorial thinking?* *Procedia Social and Behavioral Sciences* 11 (2011) 122–126. Disponible en URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042811000486> [Consulta 2 de octubre de 2014]
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.
- Schoenfeld, A. (1992). *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in Mathematics*. Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (D Grouws, Ed.). p. 334-370, [en línea]. Disponible en URL: http://gse.berkeley.edu/faculty/AHSchoenfeld/LearningToThink/Learning_to_think_Math.html [Consulta 20 de marzo de 2015]
- Vilenkin N. *¿De cuantas formas? Combinatoria, Primera y Segunda parte*. Editorial Mir. Moscú 1972
- Wilhelmi, Miguel. (2004). *Combinatoria y Probabilidad*. Publicación departamento de matemáticas Universidad de Granada
- Williams, P. eat, *Fundamentos de diseño técnico pedagógico en el aprendizaje*. Disponible en URL: <http://aulavirtualkamn.wikispaces.com/file/view/2.+MODELOS+DE+DISEÑO+C3%91O+INSTRUCCIONAL.pdf> [Consulta 2 de octubre de 2015].