discreta en el currículo escolar, además de investigaciones que muestren la importancia de esta rama para el desarrollo del pensamiento matemático y la formación de actitudes positivas de los estudiantes hacia la matemática.

- Se requieren investigaciones que muestren resultados acerca de la manera en que se puede enseñar este tópico a nivel primario y secundario.
- Es necesario adelantar investigaciones adicionales que analizan la manera de utilizar la heurística de Lakatos como método para la enseñanza-aprendizaje de otros tópicos de la matemática que suelan considerarse más abstractos y formales, tales como el análisis real o el álgebra abstracta, de manera similar pero más a fondo de lo que reportaron Larsen y Swinyard en los artículos que se revisaron en el Capítulo 1
- Se requieren investigaciones que evalúan o valoran la repercusión de la heurística de Lakatos en la enseñanza de la matemática en la educación primaria, secundaria y media.
- Se requieren estudios que muestren con detalles la relación del método heurístico de Lakatos con el pensamiento matemático divergente y con el convergente.

**ARTÍCULOS DEL AUTOR EN ELABORACIÓN**

La heurística de Lakatos en una clase de Teoría de Grafos.

**BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS**


Alcock, L. (2010). Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof. *Research in collegiate mathematics education VII*, 63-91.

Atkins, S. L.(1997). Lakatos' Proofs and Refutations comes alive in an elementary classroom. *School Science and Mathematics*, Corvallis, v. 97, n. 3, p. 150-154, Mar. 1997.

Balacheff, N. (2000). Procesos de demostración en los alumnos de matemáticas. Bogotá: una empresa docente y Universidad de los Andes.

Bogart, K. (2004). *Combinatorics through Guided Discovery*. National Science Foundation Grant Number DUE-0087466

Debellis, V.A. & Rosenstein, J.G. (2004). Discrete Mathematics in Primary and Secondary Schools in the United States. *ZDM*. 36 (2), 46-55.

De Guzmán Ozámiz, M. (2006). *Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*.

Epp, S. S. (2009). *The use of logic in teaching proof. Resources for Teaching Discrete Mathematics: Classroom Projects, History Modules, and Articles*, (74), 313.

Friedler, L. (1996). *Problem Solving With Discrete Mathematics*. National Council of teachers of mathematics

Goldin, G. A. (2004). Problem solving heuristics, affect, and discrete mathematics. *ZDM*, *36*(2), 56-60

Grenier, D., Payan, C. Discrete matheamtics in relation to learning and teaching proof and modelling. In: Schwank, I. eds. (1999) *Proceedings of the Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-1)*. Universität, Osnabrück, pp. 143-155

Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. For the Learning of Mathematics, 15(3), 42-50.

Karakuş, F., & Bütün, M. (2013). Examining the method of proofs and refutations in pre-service teacher's education. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *27*(45), 215-232.

Komatsu, K. (2012*). Lakatos' heuristic rules as a framework for proofs and refutations in mathematical learning: Local-counterexample and modification of proof*. In Pre-proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education (pp. 2838-2847).

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

Larsen, S., & Zandieh, M. (2007). *Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom*. Educational Studies in Mathematics, 67(3), 205–216..

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. I. Induction and analogy in mathematics. II. Patterns of plausible inference.

Rivera-Marrero, O. (2007). The Place of Discrete Mathematics in the School Curriculum: An Analysis of Preservice Teachers' Perceptions of the Integration of Discrete Mathematics into Secondary Level Courses, tesis de doctorado, Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, Virginia.

Swinyard, C. (2011). *Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike*. *The Journal of Mathematical Behavior*, 30(2), 93-114.

Wong, K. Y., Lee, P. Y., Kaur, B., Foong, P. Y., & Ng, S. F. (2009). *Mathematics education: The Singapore journey* (Vol. 2). Singapore: World Scientific Publishing.

Zaslavsky, O., Nickerson, S., Stylianides, A., Kidron, I., & *Winicki*, G. (in press). *The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives*. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.) Proof and proving in mathematics education. New York, NY: Springer.


# APRENDIZAJE DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DESDE UN ENFOQUE CUALITATIVO


EDISON CAICEDO PARRA
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
edicaicedo@uan.edu.co

GERARDO CHACÓN GUERRERO
Director de Tesis
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
gerardoachg@uan.edu.co



***Resumen***

El propósito de esta investigación es diseñar y valorar un modelo didáctico para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, con un enfoque cualitativo y a través de la resolución de problemas, para establecer una metodología que sea aplicable a los cursos de ecuaciones diferenciales. Se diseñó un curso completo de ecuaciones diferenciales con énfasis en los métodos cualitativos y basados en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, en el que participaron cinco estudiantes de ingeniería de la Universidad Antonio Nariño. Una vez aplicados los planes de clase y las encuestas semi-estructuradas se analizaron desde un enfoque cualitativo.

Los resultados obtenidos evidencian que los estudiantes tienen una gran motivación e interés durante el curso, debido a que la metodología empleada basada en la resolución de problemas, empleando conjeturas desde la construcción del modelo hasta llegar la solución final y el uso de la tecnología para estudiar los métodos cualitativos y numéricos favorecen su comprensión de los contenidos del curso. Por otro lado, el modelo didáctico resultado de la investigación ofrece una ruta y ciertos recursos que promueven la actividad matemática en los cursos de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, se recomienda que tanto el syllabus del curso como los planes de clase sean revisados, adaptados o ajustados de acuerdo a las necesidades de los estudiantes o docentes que deban impartir el curso.

***Abstract***

The purpose of this research is to design and evaluate a didactic model for the learning of differential equations, based on the quasi-empirical conception of mathematics, with a qualitative approach and through the resolution of problems, to establish a methodology that is applicable to the courses of differential equations. A complete course of differential equations was designed with emphasis on qualitative methods and based on the quasi-empirical conception of mathematics, in which five engineering students from the Antonio Nariño University participated. Once the class plans and the semi-structured surveys were applied, they were analyzed from a qualitative approach.

The obtained results show that the students have a great motivation and interest during the course, because the methodology used based on problem solving, using conjectures from the construction of the model until arriving at the final solution and the use of the technology to study The qualitative and numerical methods favor their understanding of the course contents. On the other hand, the didactic model resulting from the research offers a route and certain resources that promote mathematical activity in the courses of differential equations. However, it is recommended that both the syllabus of the course and the class plans be reviewed, adapted or adjusted according to the needs of the students or teachers who must teach the course.

## INTRODUCCIÓN

Este trabajo surge debido a la importancia que tiene la modelación mediante ecuaciones diferenciales tanto en las ciencias básicas como en las humanas y sociales, lo cual es de suma relevancia, ya que desde que Newton logró desarrollar el cálculo, y más importante aún, modelar las leyes de la mecánica clásica valiéndose de las ecuaciones diferenciales, éstas se convirtieron en un importante recurso para la modelación y solución de problemas.

Un obstáculo que presenta el trabajo con las ecuaciones diferenciales tiene que ver con la dificultad o imposibilidad para resolver analíticamente muchas de ellas, situación que ha representado un gran reto para la comunidad matemática. Con el propósito de hacer frente a tal dificultad Henri Poincaré, hacia finales del siglo XIX estableció un nuevo paradigma en la solución de las ecuaciones diferenciales, al tratar el problema de los tres cuerpos (Delshams A. , 2005), que hoy se conoce como la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales.

No obstante, las observaciones anteriores y la gran disponibilidad de recursos tecnológicos con que se cuenta para el aprendizaje de las matemáticas y más específicamente de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos, actualmente se observa que algunos de los cursos que abordan estas disciplinas, lo hacen desde una perspectiva netamente algorítmica.

De este modo, el docente se limita a recitar los distintos tipos de ecuaciones que se presentan en los problemas habituales y la respectiva receta o algoritmo que permite resolverla de manera analítica. Así, el curso se reduce a estudiar un libro con un esquema predefinido que no da lugar a la generación de un pensamiento matemático que faculte al estudiante para hacer frente a problemas retadores que encontrará en su práctica profesional (Moreno & Azcárate, 2003).

Un concepto fundamental en educación matemática es el de sistemas de práctica, que se entienden como la actuación o expresión realizada por una persona o institución para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino, 2009). La práctica es, por tanto, una acción reflexiva, situada, intencional y mediada por recursos lingüísticos y materiales. Bajo esta perspectiva a continuación, se enuncian una serie de factores vistos inicialmente y considerados como insuficiencias en los sistemas de práctica actuales en relación con la enseñanza – aprendizaje de ecuaciones diferenciales:

- Algunos planes de estudio y libros de texto contemplan la enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diferenciales bajo un enfoque cualitativo, no obstante el rol protagónico sigue siendo del docente (Unesco, 1996).
- La modelación y la resolución de problemas relacionados con sistemas dinámicos no constituye el eje articulador en los cursos de ecuaciones diferenciales (Moreno & Azcárate, 2003).
- Aunque en la literatura de investigación en educación matemática existen diversos escritos sobre las ecuaciones diferenciales y sus implicaciones, no se cuenta con registros donde se relaten experiencias sobre un curso completo de ecuaciones diferenciales con énfasis cualitativo y desde el cuasi-empirismo.

La propuesta de un modelo para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales fundamentada en una concepción cuasi empírica de las matemáticas, promueve sistemas de práctica adecuados en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales (Lakatos, 1978), de manera que los egresados de las carreras de ingeniería estén en mejores posibilidades de aportar soluciones creativas e innovadoras a los problemas retadores y propios de esta disciplina, apoyándose además en la tecnología. Debido a la naturaleza del proyecto, se considera que está en consonancia con las siguientes líneas de investigación del Doctorado en Educación Matemática:

- La enseñanza aprendizaje de las matemáticas a través de la solución de problemas
- Cálculo intensivo y uso de la tecnología en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, y
- La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas avanzadas a través de sus aplicaciones.

Por lo cual se plantea como **problema la investigación**: ¿qué implicaciones tiene un modelo didáctico basado en el enfoque cuasi empírico de las matemáticas, para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde un enfoque cualitativo, para potenciar la actividad matemática en la resolución de problemas retadores?

Se precisa como **objeto de la investigación**: sistemas de prácticas empleados para la enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en las carreras de ingeniería.

El **objetivo general** consiste en diseñar y valorar un modelo didáctico para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas con un enfoque cualitativo, a partir del estudio de los sistemas dinámicos, que promueva la actividad matemática orientada hacia la resolución de problemas retadores.

Los **objetivos específicos** son:

1. Determinar los elementos más relevantes que se deben considerar para el diseño de un modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde un enfoque cualitativo.

2. Caracterizar los procesos de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo, evidenciados en los estudiantes durante las diferentes fases de la valoración del modelo didáctico.

3. Establecer y estudiar los principales aportes que deriven de la valoración del modelo didáctico basado en el enfoque cuasi empírico de las matemáticas para la construcción de conocimiento matemático.

El **campo de acción** se enmarca en los sistemas de práctica empleados en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en las carreras de ingeniería de la Universidad Antonio Nariño.

Las **preguntas científicas** son:

1. ¿Cuáles son los elementos más relevantes que se deben tener en cuenta para el diseño y valoración de un modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde un enfoque cualitativo?
2. ¿Cuáles son las principales características de los procesos de aprendizaje de los estudiantes durante las diferentes fases del modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde un enfoque cualitativo?
3. ¿Cuáles son los principales aportes y características de un modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas para la construcción de conocimiento matemático y su incidencia en la solución de problemas retadores?

En aras de dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, así como para guiar el curso de la tesis fueron propuestas las siguientes **tareas de investigación**:

1. Revisar el estado del arte de la investigación dirigida a la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.
2. Determinar los fundamentos teóricos y metodológicos que sustentan un modelo didáctico ajustado al proyecto.
3. Elaborar un modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, para favorecer el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.
4. Análisis de resultados, obtenidos de la validación del modelo.
5. Elaboración de conclusiones y redacción del documento científico.

La tesis se sustenta en investigación cualitativa, a través de métodos teóricos y empíricos, la información recolectada inicialmente es comparada, para luego establecer categorías de significado.

Durante el desarrollo de la investigación se emplearon los siguientes métodos:

**Métodos teóricos**

**Histórico-lógico:** se emplea con el fin de valorar la evolución y desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos, propiciando una concatenación lógica de las tareas realizadas.

**Análisis-síntesis e inducción-deducción.** Esta metodología está presente en todo el proceso de investigación, tanto en los fundamentos teóricos, como en el análisis de los resultados del diagnóstico relacionados con el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos, lo que permite interpretar, sintetizar los resultados y elaborar las conclusiones y generalizaciones.

**Métodos del nivel empírico**

**La observación científica.** Método que permite conocer la realidad mediante la percepción directa en clases, talleres y otras actividades docentes.

**Encuesta.** Se realizó una encuesta a los profesores y los estudiantes.

Los datos recolectados se analizaron mediante Atlas.ti® y se organizaron para efectuar una codificación en un primer plano. Posteriormente la codificación en un segundo plano permitió comparar categorías y agrupar en temas, con el fin de obtener clasificaciones.

El **aporte teórico** radica en el diseño de un modelo didáctico para implementar el proceso de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales con un enfoque cualitativo, basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas y orientado a la solución de problemas retadores en sistemas dinámicos. Además, se elaboró el cuerpo de recomendaciones, derivadas del modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, para su inclusión en los sistemas de práctica empleados para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos, desde un enfoque cualitativo.

Por otro lado, se enuncian algunos elementos teóricos que permitan comprender los procesos de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos, desde un enfoque cualitativo basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, apoyado en un paquete computacional (Maple®) y sustentado en la resolución de problemas retadores.

El **aporte práctico** consistió en el diseño de un curso completo de ecuaciones diferenciales con énfasis en el uso de la teoría cualitativa.

Se considera que los aportes novedosos y originales del trabajo tienen que ver con la reflexión acerca de las implicaciones en torno a:

- El aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde un enfoque cualitativo y
- El aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas.
- La modelación y solución de problemas retadores relacionados con las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos, a partir del razonamiento cuasi empírico y desde un enfoque cualitativo.

La estructura de la tesis es la siguiente:

Introducción, cuatro capítulos, conclusiones, recomendaciones y anexos.

- Introducción, justificación de la investigación.
- Primer capítulo, estado del arte.
- Segundo, fundamentos teóricos sobre la enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos en los

sistemas de práctica empleados para el aprendizaje de las matemáticas.

- Tercero, elaboración del modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de la matemática, para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde un enfoque cualitativo, así como una metodología fundamentada en una revisión de los sistemas de práctica, que considere el uso de un Maple 18® en aplicaciones prácticas.

Cuarto, aplicación y valoración del modelo formulado y su metodología mediante la aplicación del mismo en cursos regulares de ecuaciones diferenciales en la Universidad Antonio Nariño; la información se recolectará empleando métodos cualitativos.

**En el CAPITULO 1. ESTADO DEL ARTE.** En la literatura actual, no son muchas las experiencias de aula documentadas acerca del proceso de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo, sin embargo, luego de una ardua búsqueda se han logrado recabar ciertos documentos que se refieren en algunos aspectos al tema de la presente investigación.

Los documentos que se analizaron como estado del arte en este estudio se caracterizaron y a partir de dicha caracterización se establecieron tres categorías:

1. Enseñanza - Aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales con enfoque cualitativo.
2. Enseñanza-Aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales con uso de la tecnología.
3. Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales.

En estas categorías se destacan investigadores como Rasmussen y otros (2011), Nápoles (2004), Blanchard, Devaney y Hall (1994), West y otros (2012), Kwon y otros (2005), entre otros, los cuales hacen referencia a algunos aspectos relacionados con las ecuaciones diferenciales, tales como una reseña histórica acerca del enfoque cualitativo de las ecuaciones diferenciales, algunas experiencias de clase con las ecuaciones diferenciales y alusiones al tratamiento de ciertos temas de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales y sus implicaciones. Estos trabajos no hacen referencia a la realización de un curso completo de ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo, basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas y teniendo como eje transversal la resolución de problemas.

**En el CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO**. Dentro del marco teórico para la presente investigación, se consideran los elementos que servirán de fundamentos para el modelo didáctico, y sus implicaciones en diversos órdenes. También se aborda la construcción de modelos como el punto de partida para la comprensión y solución de problemas, la modelación de situaciones problema mediante ecuaciones diferenciales, sus propiedades y características, los fundamentos teóricos del modelo epistemológico de *Pruebas y refutaciones* y de resolución de problemas, para finalmente incluir el uso de la tecnología en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.

Este capítulo se refiere a los fundamentos sobre los que se basa el modelo didáctico propuesto en la investigación, algunos de los cuales pueden ser genéricos, sin embargo, dichos fundamentos se enmarcan en el contexto de un curso de ecuaciones diferenciales y a su vez permiten caracterizar delimitar este trabajo**.** El marco teórico trata cinco elementos considerados fundamentales en la investigación.

Primero, se exponen los fundamentos epistemológicos, lo cual tiene que ver con la concepción cuasi empírica de las matemáticas (Lakatos, 1978), la cual afirma que las matemáticas no surgen de manera espontánea ni mucho menos tan elaborada como la presentan los libros de texto. Lakatos sugiere que todo parte de una conjetura que debe ser sometida a prueba y sufrir un proceso de transformación hasta culminar en algún teorema.

En segundo lugar, se estudian los sistemas dinámicos y su génesis que data de la segunda mitad del siglo XVII con el advenimiento del cálculo que posibilito el estudio de ciertos fenómenos que cambian en el tiempo. El hecho que marca el inicio de la teoría cualitativa de las ecuaciones de las ecuaciones diferenciales es cuando Henri Poincaré resuelve el problema de los tres cuerpos, el cual, no podría ser tratado con los métodos analíticos conocidos hasta entonces, con lo cual se inicia un novedoso paradigma en lo relacionado con las ecuaciones diferenciales.

Finalmente, se hace mención de los fundamentos metodológicos que son los elementos que estructuran el proceso de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, dichos elementos son:

1. Situación inicial de aprendizaje.
2. Marco de trabajo y metas.
3. Contenidos y materiales.
4. Proceso y métodos de trabajo y
5. La evaluación.

Cabe aclarar que este proceso no necesariamente debe ser lineal, es decir, el orden de los componentes puede variar de acuerdo a las circunstancias.

**CAPÍTULO 3. MODELO DIDÁCTICO**. Aquí se tratan de manera amplia los fundamentos en que se basa el modelo didáctico iniciando con algunos principios básicos:

1. El proceso de enseñanza aprendizaje entendido como un sistema complejo debido a que en el influyen muchas variables: ¿que se aprende?, ¿dónde se aprende? ¿Cuándo y cómo se aprende? todas ellas de vital importancia por lo que deben ser consideradas para la formulación del modelo didáctico.

2. La resolución de problemas como opción metodológica que enmarca la relación docente – alumno - conocimiento matemático. En cuanto al trabajo en aula y la planeación de los problemas, se deben tener presentes ciertas consideraciones. En primer lugar, el estudiante se debe sentir motivado para asumirlo como propio, en segunda instancia requiere contar con las herramientas matemáticas adecuadas para hacer frente al problema, y por último el problema debe representar un reto para quien lo resuelve. Según Schoenfeld (Schoenfeld, 1992), se debe lograr que el estudiante esté en capacidad de diseñar una estrategia de trabajo, de modo que controle sus acciones, las modifique, las refuerce o las ajuste según sea el caso y además se den las condiciones para replicarlas o rediseñarlas en diversos contextos.

3. La resolución de problemas como generadora de la actividad matemática en el aula: Experimentación - conjetura – prueba – refutación – aplicación. En efecto las ecuaciones diferenciales ofrecen diferentes retos, desde la concepción de una hipótesis para plantear un modelo, pasando por las estrategias de resolución del sistema o la ecuación diferencial que derive del modelo, en el mismo análisis cualitativo, hasta la recopilación de todos los resultados obtenidos del proceso. En este punto, se hace necesario tener una estrategia, a partir de la comprensión de una determinada situación, valerse de las heurísticas para proponer o refinar un modelo, validarlo y confrontar las posibles soluciones con datos reales con el fin de probar la eficiencia del método empleado en la resolución del problema.

4. Recursos: Uso de la tecnología. se apela a la incorporación de la tecnología para promover la conexión entre las distintas partes de la

matemática, resolver problemas con aplicaciones al mundo real, dominar métodos numéricos, e interpretar líneas de fase y campos de pendientes.

5. Metodología: Circunstancia inicial del alumno. Por sus particularidades ellos tienen sus propias necesidades, demandas y objetivos en relación con la enseñanza y cada alumno puede aprender mejor si identifica el enfoque de aprendizaje que le favorece. Lo anterior determina la metodología y estrategias empleadas para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.

6. Marcos: Los marcos tienen que ver con las condiciones que rigen la enseñanza las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas, y surgen en diferentes niveles tales como el salón de clase, la universidad, o la comunidad. Dichos marcos influyen en la planificación, ejecución y evaluación de la enseñanza (Guldbrandt, 2005).

7. Objetivos: Son los propósitos del proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas (Gulbrandt, 2005).

8. Contenidos/materiales: Se refiere al contenido de la enseñanza, tanto el material como al plan de estudios.

Al decidir sobre el curso de ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas se deben encontrar materiales (objetos de aprendizaje) que se supone conducirán al alumno a alcanzar los objetivos (Guldbrandt, 2005).

9. Procesos y métodos de trabajo: Los procesos de trabajo tienen que ver con lo que el profesor y el alumno eligen hacer durante la enseñanza y los métodos son los antecedentes y argumentos para las diferentes elecciones. Incluye tanto consideraciones generales como individuales relacionadas con el carácter didáctico. Este concepto tiene que ver con la relación entre la enseñanza y el aprendizaje (Guldbrandt, 2005).

10. Evaluación

La evaluación de los procedimientos se llevó a cabo en tres diferentes aspectos así:

- Comportamiento cualitativo de las ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Comportamiento cualitativo de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.
- Comportamiento cualitativo de los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden.

Los instrumentos empleados para llevar a cabo la evaluación de los aprendizajes de los tópicos anteriores son:

- Planes de clase o actividades de trabajo de manera individual y grupal.
- Entrevistas semi-estructuradas.

Se elaborarán tres grupos de actividades basadas en los siguientes tópicos:

- Ecuaciones autónomas de primer orden
- Sistemas de ecuaciones lineales
- Sistemas de ecuaciones no lineales

11. Modelo preliminar

En atención a las anteriores consideraciones se elaboró el siguiente esquema, (Figura 1) que recoge de modo simplificado los elementos de un modelo didáctico, que sirve como guía inicial para el diseño del curso de ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y es confrontado posteriormente con la experiencia de la aplicación del syllabus y los planes de clase.


*Figura 1*: **Modelo didáctico preliminar.**

**CAPITULO 4. APLICACIÓN DE LOS PLANES DE CLASE**. Durante el segundo semestre del año 2015 y en el curso inter-semestral de comienzo del año 2016, se aplicaron de manera preliminar los planes de clase para el respectivo ajuste. Todo el estudio se llevó a cabo en la universidad Antonio Nariño sede sur en la ciudad de Bogotá. La aplicación definitiva se llevó a cabo durante el primer semestre de 2016 en un curso regular de ecuaciones diferenciales, con un grupo de cinco estudiantes en jornada diurna y una intensidad de cuatro horas semanales para un total de 64 horas presenciales durante el semestre.

Los estudiantes que participan del estudio están cursando cuarto semestre de sus respectivas carreras, y en los tres semestres previos han tomado los cursos de cálculo diferencial y solución de problemas durante el primer semestre, en segundo semestre cálculo diferencial con geometría analítica y en tercer semestre cálculo multivariado con álgebra lineal.

A continuación un ejemplo de los planes de clase aplicados durante la investigación.

**Ecuación de Verhulst o Logística**

Como se notó el modelo de Malthus no predice adecuadamente la población de los Estados Unidos por lo tanto se debe mejorar si es posible o conjeturar otro que se ajuste a la situación.

Los estudiantes entienden que el crecimiento de una población depende de los recursos y que estos no son ilimitados, pero igual el modelo de Malthus funciona con poblaciones pequeñas; por lo tanto, coinciden en que este modelo debe considerar los recursos y se parte de la siguiente premisa:

$$\frac{dP}{dt} = kPx$$

$x$ debe estar cerca de 1 si la población es pequeña y si la población crece más que los recursos $x$ debe ser negativo. En este punto los estudiantes sufren un bloqueo, de manera que con intervención del profesor se logra concluir que $x$ debe ser:

$$x = 1 - \frac{P}{N}$$

Donde $N$ representa los recursos y $P$ la población, de manera que si $P > N$ $x$ se hace negativo, por tanto la población decrece, pero sí $P < N$ $x$ es positivo de modo que la población crece, así las cosas el modelo quedo así:

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right)$$

Una vez afinado el modelo los estudiantes deben hacer el análisis cualitativo de la ecuación diferencial, es decir, encontrar los puntos o soluciones de equilibrio; Juan rápidamente dice que sí $P = 0$, se tiene una solución de equilibrio, la pregunta que sigue es si hay más soluciones de equilibrio, la respuesta a esta pregunta no surge tan rápidamente como la anterior.

Después de pensarlo algún tiempo Fabio cree que $P = N$ es otra solución de equilibrio, lo cual efectivamente es cierto, ahora cada estudiante debe bosquejar las soluciones junto con las soluciones de equilibrio en el plano $P - t$, a los cinco estudiantes les resulta relativamente fácil bosquejar las soluciones de equilibrio, pero se preguntan ¿cómo bosquejar otras soluciones?

Juan afirma que si la población aumenta haciéndose mayor que N, lo que está en el paréntesis tiene signo negativo, por lo tanto la ecuación diferencial es negativa también, obvio siendo P y K positivos, de manera que la población decrece. Por otro lado si $N > P$, lo que está en paréntesis tiende a 1, lo cual significa que se obtendría nuevamente la ecuación de crecimiento exponencial, que como se vio solo funciona para poblaciones muy pequeñas. David dice que si $0 < P < N$, la población va creciendo hasta acercarse a N. (ver Figuras 2 y 3)

$>$

$$dfieldplot\left(diff\left(p(t), t\right) = p(t) - p(t)^2, p(t), \mathrm{t} = 0\,..5, \mathrm{p} = -2\,..3\right)$$

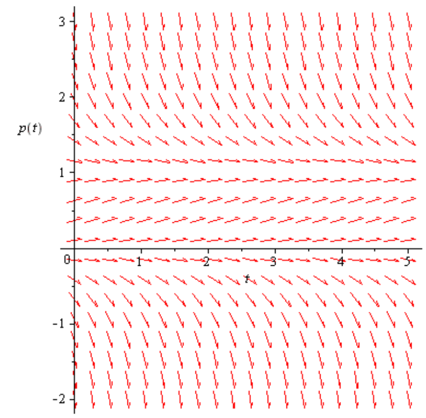
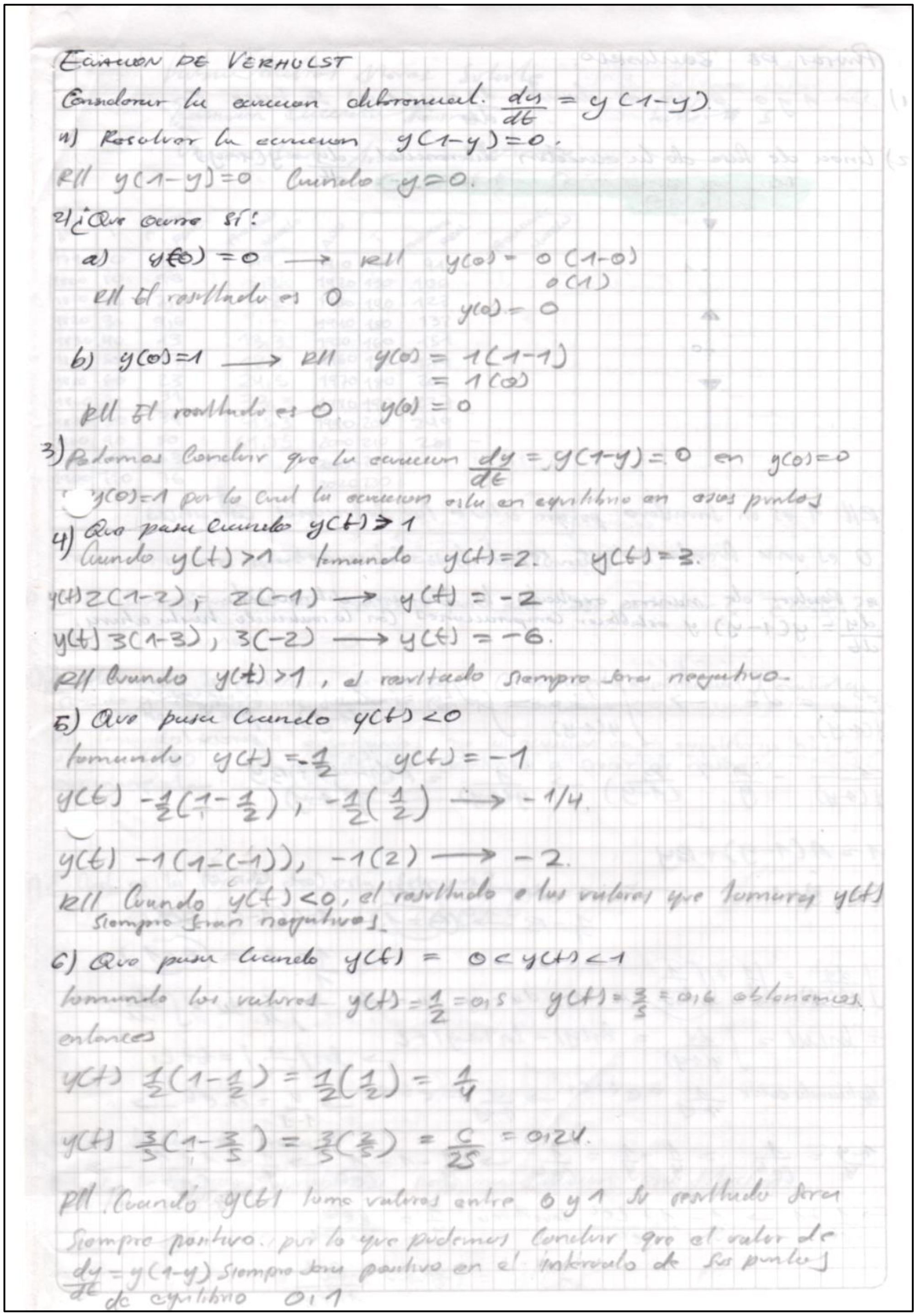



***Figura 2*: Campo de pendientes de la ecuación de Verhulst.**



Ecuacion de Verhulst

Considerar la ecuacion diferencial. $\frac{dy}{dt} = y(1-y)$.

1) Resolver la ecuacion $y(1-y)=0$.

R// $y(1-y)=0$ Cuando $y=0$.

2) ¿Que ocurre si?

a) $y(0)=0 \longrightarrow$ R// $y(0) = 0(1-0)$ $0(1)$ $y(0) = 0$

R// El resultado es 0

b) $y(0)=1 \longrightarrow$ R// $y(0) = 1(1-1)$ $= 1(0)$

R// El resultado es 0 $y(0)=0$

3) Podemos Concluir que la ecuacion $\frac{dy}{dt} = y(1-y) = 0$ en $y(0)=0$ y $y(0)=1$ por lo cual la ecuacion esta en equilibrio en esos puntos

4) Que pasa cuando $y(t) \geq 1$

Cuando $y(t)>1$ tomando $y(t)=2$. $y(t)=3$.

$y(t)\, 2(1-2)$, $2(-1) \longrightarrow y(t) = -2$

$y(t)\, 3(1-3)$, $3(-2) \longrightarrow y(t) = -6$.

R// Cuando $y(t)>1$, el resultado siempre sera negativo.

5) Que pasa cuando $y(t)<0$

tomando $y(t) = -\frac{1}{2}$ $y(t) = -1$

$y(t)\; -\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})$, $-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}) \longrightarrow -1/4$.

$y(t)\; -1(1-(-1))$, $-1(2) \longrightarrow -2$.

R// Cuando $y(t)<0$, el resultado o los valores que tomaran $y(t)$ siempre seran negativos.

6) Que pasa cuando $y(t) = 0<y(t)<1$

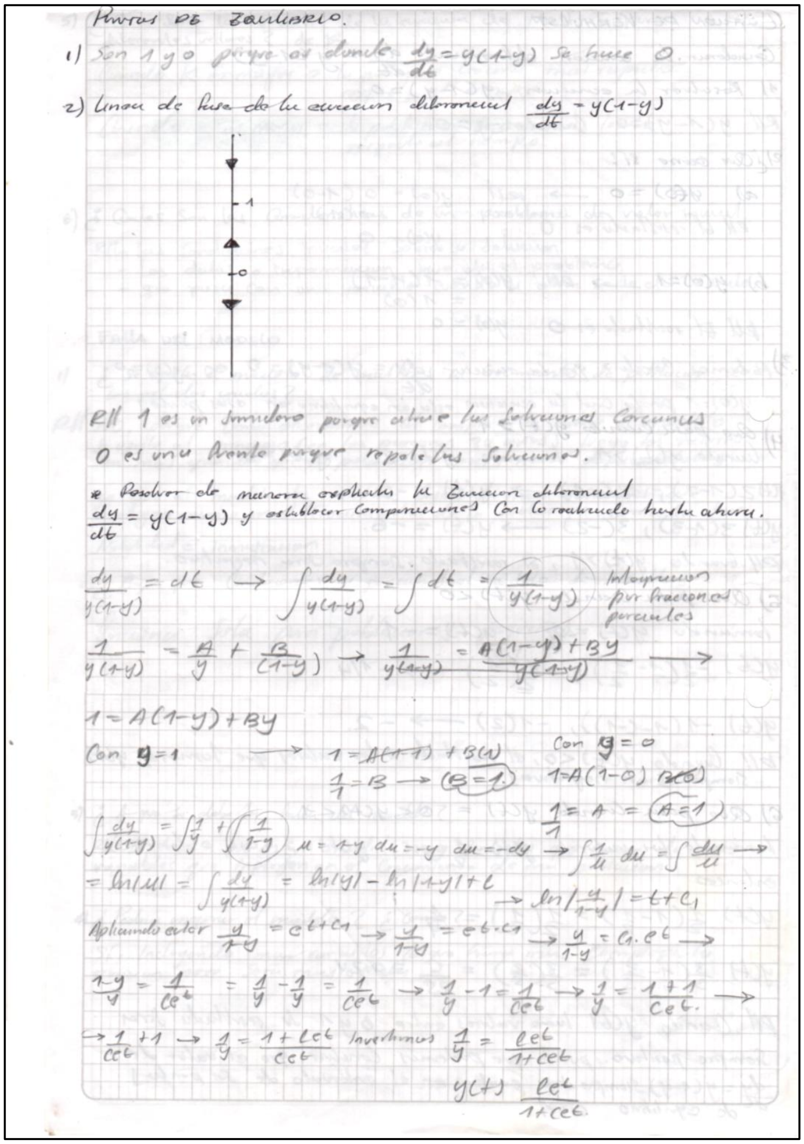
tomando los valores $y(t) = \frac{1}{2} = 0{,}5$ $y(t) = \frac{3}{5} = 0{,}6$ obtenemos entonces

$y(t)\; \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

$y(t)\; \frac{3}{5}(1-\frac{3}{5}) = \frac{3}{5}(\frac{2}{5}) = \frac{6}{25} = 0{,}24$.

R// Cuando $y(t)$ tome valores entre 0 y 1 su resultado sera siempre positivo. por lo que podemos Concluir que el valor de $\frac{dy}{dt} = y(1-y)$ siempre sera positivo en el intervalo de sus puntos de equilibrio 0 y 1

*Figura 3*: **Análisis de la ecuación de Verhulst.**



Puntos de equilibrio.

1) Son 1 y 0 porque es donde $\frac{dy}{dt} = y(1-y)$ se hace 0.

2) Linea de fase de la ecuacion diferencial $\frac{dy}{dt} = y(1-y)$

1

0

R// 1 es un sumidero porque atrae las soluciones cercanas

0 es una fuente porque repele las soluciones.

* Resolver de manera explicita la ecuacion diferencial $\frac{dy}{dt} = y(1-y)$ y establecer comparaciones con lo realizado hasta ahora.

$\frac{dy}{y(1-y)} = dt \rightarrow \int \frac{dy}{y(1-y)} = \int dt = \frac{1}{y(1-y)}$ Integracion por fracciones parciales

$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{(1-y)} \rightarrow \frac{1}{y(1-y)} = \frac{A(1-y)+By}{y(1-y)} \longrightarrow$

$1 = A(1-y) + By$

Con $y=1 \longrightarrow 1 = A(1-1) + B(1)$, $\frac{1}{1} = B \rightarrow B = 1$

Con $y = 0$, $1 = A(1-0)\ B(0)$, $\frac{1}{1} = A = A = 1$

$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int \frac{1}{y} + \int \frac{1}{1-y}$ $u = 1-y$ $du = -y$ $du = -dy \rightarrow \int \frac{1}{u}\,du = \int \frac{du}{u} \rightarrow$

$= \ln|u| = \int \frac{dy}{y(1-y)} = \ln|y| - \ln|1-y| + c \rightarrow \ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = t + C_1$

Aplicando exp $\frac{y}{1-y} = e^{t+C_1} \rightarrow \frac{y}{1-y} = e^{t} \cdot C_1 \rightarrow \frac{y}{1-y} = C_1 \cdot e^{t} \rightarrow$

$\frac{1-y}{y} = \frac{1}{Ce^{t}} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y} = \frac{1}{Ce^{t}} \rightarrow \frac{1}{y} - 1 = \frac{1}{Ce^{t}} \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1+1}{Ce^{t}} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{1}{Ce^{t}} + 1 \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1+Ce^{t}}{Ce^{t}}$ Invertimos $\frac{1}{y} = \frac{Ce^{t}}{1+Ce^{t}}$

$y(t)\ \frac{Ce^{t}}{1+Ce^{t}}$

***Figura 4:*** Solución analítica de la ecuación de Verhulst.

En este capítulo se tratan de manera detallada los resultados de la aplicación de los planes de clase para un curso de ecuaciones diferenciales, diseñado desde el enfoque cualitativo y bajo la concepción cuasi-empírica, de las matemáticas tomando como eje transversal la resolución de problemas.

Los planes de clase se aplicaron de manera definitiva a un curso de cinco estudiantes, con el fin de valorar las principales características del proceso de aprendizaje, así como las reacciones de los estudiantes frente a un curso de ecuaciones diferenciales con las características ya mencionadas.

## CONCLUSIONES

El procesamiento y análisis de la información recolectada durante esta investigación se llevó a cabo con ayuda de ATLAS.ti®, lo cual permitió establecer algunas categorías (códigos) para el análisis de los datos (Ver Figura 5).

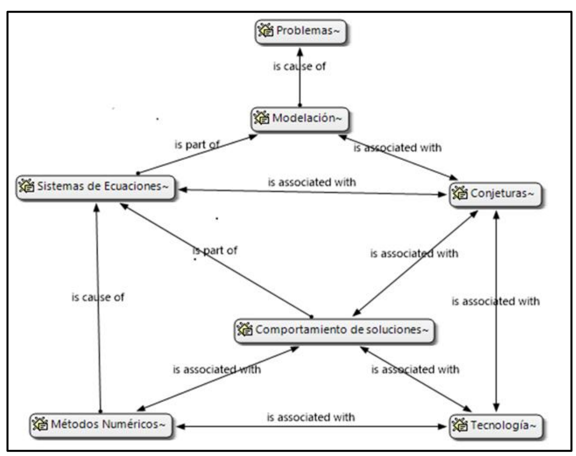



***Figura 5*: Mapa de códigos (categorías).**

A continuación, se explican brevemente las categorías que surgieron como resultado del análisis de los datos.

**Solución de Problemas.** Este código aparece en el primer nivel básicamente por dos razones, una primera tiene que ver con el hecho de que se estableció como elemento transversal para todo el curso por su pertinencia y de otro lado se interrelaciona permanentemente con la postura teórica el cuasi-empirismo.

Cada plan de clases inicia con una situación problema la cual obliga a que los estudiantes propongan conjeturas y las discutan con sus compañeros y el docente a fin de establecer el modelo que mejor responda al problema. El paso a seguir consiste en resolver la ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales, lo cual se hizo desde el enfoque cualitativo y en algunos casos se emplearon los métodos numéricos e incluso los analíticos si es posible, con el fin de obtener un completo panorama del problema en cuestión.

Cabe resaltar que una vez propuesto el problema de cada plan de clase los estudiantes de manera natural se sitúan en las cuatro fases propuestas por Polya. Por ejemplo, para estudiar el crecimiento de una población es necesario comprender plenamente la situación, es decir, clase de población, datos estadísticos o valores iniciales con que se cuentan, que factores inciden en el crecimiento de una población. A continuación, se debe establecer un plan, es decir, la ecuación diferencial que modela el problema. Después se debe resolver la ecuación diferencial, lo cual se hace de manera cualitativa con ayuda de la tecnología (Maple 18®). Contrastar la solución con los datos reales con el fin de verificar la validez del proceso.

**Concepción Cuasi-empírica de las Matemáticas.** Una vez propuesto el problema inicial de cada plan de clases a partir de preguntas generadoras los estudiantes enuncian valiosas conjeturas que discuten entre ellos mismos y con el docente de modo que se pueda establecer un modelo inicial. Después de plantear la o las ecuaciones diferenciales que modelan el problema se debe proceder a resolver, privilegiando los métodos cualitativos, lo cual también da lugar a conjeturas o experimentación, donde los estudiantes conjeturan acerca de las soluciones, sus características y comportamiento en el tiempo.

**Métodos Cualitativos.** El curso de ecuaciones diferenciales es orientado con el enfoque cualitativo, lo cual resultó motivante e interesante para los participantes, básicamente por dos razones.

- No es necesario que memoricen las estructuras de las ecuaciones diferenciales que se pueden resolver analíticamente ni tampoco los algorítmicos de resolución empleados en los cursos habituales.
- Debido a que los métodos cualitativos se basan en el pensamiento geométrico, resulta mucho más sencillo para ellos diagramar un campo de pendientes, una línea de fase o graficar una solución numérica, lo cual además, es más evidente y enriquecedor para ellos que una función que represente la solución de una ecuación diferencial, claro, siempre que esta se pueda encontrar.

**Uso de Tecnología.** Para esta investigación es indispensable el uso de la tecnología, en este caso para el curso de ecuaciones diferenciales se empleó Maple 18®, debido al potencial que posee para el estudio de las ecuaciones diferenciales y su fácil manejo.

El uso de Maple 18® produjo grandes beneficios, no solamente por lo motivados que se perciben los estudiantes, sino que además les permite conocer el comportamiento de la solución a un sistema dinámico de forma muy ilustrativa, comprensible y rápida.

Lo que se observó cómo debilidad en la prueba de entrada realizada por los estudiantes, en relación con la escasa comprensión del concepto de derivada, se resolvió a lo largo del curso gracias a que el análisis cualitativo apoyado el software termino por ser un ejercicio rutinario y muy enriquecedor para ellos, ya que, de allí se desprendía todo el análisis posterior de las soluciones del problema y sus posibles variaciones. Finalmente se concluye que esta investigación culmino con los siguientes logros:

1. La elaboración de un modelo didáctico para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo basado en el pseudo-empirismo.

2. Se logró evidenciar de primera mano el proceso de aprendizaje del grupo de cinco estudiantes que participaron del curso, lo cual resulta novedoso, debido a que si bien en otras latitudes existe alguna referencia acerca de algún curso de ecuaciones diferenciales con enfoque cualitativo, no se tienen registros acerca de su implementación completa y desde el pseudo-empirismo como teoría de la educación matemática.

3. El enfoque de solución de problemas es ideal para el curso de ecuaciones diferenciales basado en el pseudo-empirismo, ya que entre ellos se genera una dialéctica, es decir, ante una situación problema se parte de una conjetura para proponer una vía de solución al problema, dicha conjetura se pone a prueba o se socializa, si no soporta la prueba debe ser revisada con el fin de mejorarla o refutarla. Al proponer una solución al problema también se conjetura, si la solución resulta. De la misma manera se debe conjeturar que ocurre con las soluciones con el paso del tiempo, o si se cambian las condiciones o los parámetros.

4. La potencia del concepto de la derivada como la pendiente de la recta tangente se hace latente en el análisis cualitativo, cuando los estudiantes elaboran el campo de pendientes se aprecia en toda su magnitud el comportamiento de las soluciones y con algo de álgebra se puede tener un panorama completo acerca de todas las soluciones de una ecuación diferencial o de un sistema de ecuaciones diferenciales.

5. El trabajo exhaustivo y sistemático del método cualitativo complementado con los métodos numéricos y analíticos favorece la comprensión de los estudiantes acerca de cada situación problema y sus soluciones. Además brinda alternativas frente a un atascamiento, es decir, que cuando ellos se encuentran con una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales que surge como modelo para cierto problema y no es posible encontrar una solución analítica, lo cual es frecuente, pueden apelar a los métodos cualitativos y/o numéricos para encontrar una vía de resolución de dicho problema.

6. Por otro lado los estudiantes se hacen conscientes de que los métodos de solución de un problema no son infalibles ni absolutos.

7. Un aspecto determinante que además se considera un importante logro del curso de ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y basado en el pseudo-empirismo, consiste en que los cinco estudiantes que terminaron el curso y tenían un promedio en sus cursos previos de matemáticas rondando el tres, es decir la nota mínima para aprobar, en el curso de ecuaciones diferenciales obtuvieron un promedio de 3.9.

8. Si bien es cierto que los logros alcanzados luego de la aplicación y valoración de la propuesta son muy positivos, cabe aclarar que en muchos casos los estudiantes se muestran muy inseguros y les cuesta participar durante la clase.

9. Pese a la orientación del curso y los recursos empleados en el mismo, se continúa presentando un porcentaje importante de deserción por parte de los estudiantes.

10. Para muchos estudiantes no es fácil el acceso a un computador y el software empleado en el curso.

11. El uso del software, así como los comandos pese a que no son muchos ni difíciles de manejar, logran poner en aprietos a los estudiantes especialmente al comienzo del curso.

Finalmente, a partir del modelo didáctico preliminar, toda la información recolectada en los planes de clase y su respectivo análisis se concluye presentando de modo esquemático el modelo didáctico final (Ver Figura 6).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| NECESIDADES | | | | | RESPUESTAS |
| DESACTUALIZACIÓN | DESCONTEXTUALIZACIÓN | | DESMOTIVACIÓN | | |
| | MÉTODOS CUALITATIVOS | | | | |
| PROBLEMA DISCUSIÓN APLICACIÓN Y PRÁCTICA | LÍNEAS DE FASE Y CAMPOS DE PENDIENTES | SISTEMAS LINEALES | SISTEMAS NO LINEALES Y CAOS | USO DE SOFTWARE MAPLE 18 | |
| FUNDAMENTOS EPISTEMOLOGÍCOS CUASI-EMPIRISMO | FUNDAMENTOS DISCIPLINARES MÉTODOS CUALITATIVOS | | FUNDAMENTOS METODOLOGÍCOS RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS | | |

***Figura 6*: Modelo Didáctico Consolidado.**

## RECOMENDACIONES

Se espera que este trabajo motive a otros investigadores interesados en el tema a llevar a cabo, estudios que permitan verificar la eficacia de esta propuesta y otras similares para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde el enfoque cualitativo, y se promuevan las reformas necesarias tendientes a mejorar el desempeño académico y profesional de los futuros ingenieros y licenciados en matemáticas. A continuación, se sugieren algunas recomendaciones para posteriores estudios relacionados con el tema en cuestión.

1. En primer lugar, son necesarios nuevas investigaciones que aborden el proceso de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y basados en el pseudo-empirismo, con el fin de tener otras miradas y así enriquecer, mejorar o proponer modelos didácticos, orientados a suplir las necesidades de aprendizaje de los estudiantes actuales, de manera que estos se sientan motivad y se apropien de los contenidos tratados en los diferentes cursos de ecuaciones diferenciales.

2. Los elementos que sirvieron como medio para la implementación de esta propuesta, es decir el syllabus y los planes de clase, están sujetos a reformas y mejoras, los problemas, las actividades propuestas y las actividades de práctica pueden y deben ser revisadas y mejoradas o adaptadas, de acuerdo con el perfil de los estudiantes que participen en el curso en cuestión. En el mismo sentido, es probable que se trabaje con el mismo syllabus y planes de clase, desde un énfasis diferente al presentado en esta propuesta.

3. Es importante que los estudiantes que participan del curso, dominen al menos de manera básica, algún programa de cómputo que sea útil para el desarrollo del curso. Además, se debe tener acceso a los recursos tecnológicos necesarios para el curso, es decir, que los estudiantes tengan tanto en casa como en la universidad un computador y el software que se emplee en el curso.

4. Como se pudo concluir a través de esta investigación, el enfoque cualitativo permite una mayor comprensión por parte de los estudiantes, acerca de un fenómeno que cambia con el tiempo, para lo cual se utilizó el software Maple® 18, el cual dejo una grata impresión en los estudiantes por su fácil manejo, así como las ayudas y tutoriales de que se dispone, pero sin embargo bien se podría emplear cualquier otro software que cuente con características similares al Maple® 18.

5. El pseudo-empirismo como teoría de la educación matemática, fue fundamental para abordar los problemas estudiados durante el curso, así como las cuatro fases de solución de problemas propuestas por Polya, por lo que se recomienda se mantenga como invariantes del modelo el enfoque cualitativo, la solución de problemas y el Pseudo-empirismo como teoría de la educación matemática.

6. Finalmente se recomienda trabajar esta propuesta de manera interdisciplinaria y colaborativa con otros docentes que impartan el curso de ecuaciones diferenciales. Finalmente es importante que esta propuesta se complemente con el estudio de los sistemas dinámicos.

## OBRA DEL AUTOR

Caicedo, E. An Early introduction to Differential Equations Systems. *PRIMUS* (TAYLOR AND FRANCIS GROUP. (En proceso de aceptación)

## BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS


Abell, M. (2014). *Introductory Differential Equations*. Londres: Elsevier Inc.

Bell, E. (1937). Los grandes matematicos.Buenos Aires: Editorial Losada.(s.f.).

Blanchar, P., Devaney, R., & Hall, G. (1993). *Ecuaciones diferenciales*. Boston: Springer.

Blanchard, P. (2012). *Ecuaciones Diferenciales*. Boston: Cengage Learning.

Braun, M. (1983). *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*. Nueva York: Springer.

Bravo, J. (2005). Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 31-46.

Delshams, A. (2005). POINCARÉ, Creador De Los Métodos Todavía Modernos En Las Ecuaciones Diferenciales y La Mecanica Celeste. *Arbor Ciencia Pensamiento y Cultura*, 43-59.

Falk de Losada, M. (2012). *Corrientes del Pensamiento Matemático del Sigo XX*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Hirsch, M., Smale, S., & Devaney, R. (2004). *Differential Equations, Dynamical System And Introduction To Chaos*. San Diego: Elsevier academic press.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y Refutaciones*. Madrid: Alianza.

Moreno, M., & Azcárate, G. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias*, 265-280.

Murphy, G. (1960). *Ordinary Differential Equations and their solutions*. Princeton: D. Van Nostrand Company.

Napoles, J. (2004). Un siglo de Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. *Lecturas Matemáticas*, 59-111.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*. New York: Jhon Wiley and sons.

Radfor, L. (2008). Connecting theories in mathematics education:. *ZDM Mathematics Education*, 317-327.

Sampieri, R., Fernandez, C., & Baptista, M. (1991). *Metodología De La investigación*. Mexico: McGraw Hill.

Schoenfeld, A. (1992). *Learnin to think mathematically*. New York: MacMillan.

Sriraman, B., & English, L. (2010). *Theories of Mathematics Education*. Nueva York: Springer.

# MODELO DIDÁCTICO PARA EL APRENDIZAJE DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA A TRAVÉS DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS

NÉSTOR ALEXANDER HERNÁNDEZ MORENO
Docente investigador, Universidad Manuela Beltrán
nealhemo@gmail.com

GERARDO CHACÓN GUERRERO
Director de Tesis
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
E-mail: gerardoachg@uan.edu.co

**Abstract**

*This research in Mathematics Education called: "DIDACTIC MODEL FOR THE LEARNING OF MATHEMATICAL MODELING THROUGH EQUATIONS IN DIFFERENCES", includes problem solving, equations in differences and the quasi-empirical approach of mathematics as basic elements of the Framework Theoretical. To design the Didactic Model, the socio-cultural political and scientific-technological contexts were interrelated with the epistemological and ethical approaches.*

*Five groups of activities were applied in students of Systems Engineering of the Pan American University Institution Compensar, who attended the Discrete Mathematics course during the second semester of 2016. In the design and application of each of the didactic activities, the elements of the Theoretical Framework, Didactic Model and Discrete Dynamic Systems were taken into account. Each activity was constituted in three stages: Motivation, Discussion and Practice, which included historical elements, experimentation, data collection, formulation of conjectures and obtaining the mathematical model in discrete variable. The subjects modeled were: Finite Differences, The Game of Life, Towers of Hanoi, Sierpinski Triangle, Newton's Cooling Law, Markov Chains, Tessellated, Discrete Logistic Equation, and Chaotic Processes.*

*From the results of this research highlights the evidence of the development and improvement of mathematical abilities by the students to model mathematically from the equations in differences.*

**Resumen**

*Esta investigación en Educación Matemática denominada: "MODELO DIDÁCTICO PARA EL APRENDIZAJE DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA A TRAVÉS DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS", incluye la resolución de problemas, las ecuaciones en diferencias y el enfoque cuasi empírico de las matemáticas como elementos básicos del Marco Teórico. Para diseñar el Modelo Didáctico se interrelacionaron los contextos sociocultural político y científico tecnológico con los enfoques epistemológicos y éticos. Se aplicaron cinco grupos de actividades en estudiantes de Ingeniería de Sistemas de la Institución Universitaria Panamericana Compensar, que cursaron la asignatura Matemáticas Discretas durante el segundo semestre de 2016. En el diseño y aplicación de cada una de las actividades didácticas se tuvieron en cuenta los elementos del Marco Teórico, del Modelo Didáctico y los Sistemas Dinámicos Discretos. Cada actividad se constituyó en tres etapas: Motivación, Discusión y Práctica, en la cual se incluyeron elementos históricos, experimentación, toma de datos, formulación de conjeturas y obtención del modelo matemático en variable discreta. Los temas modelados fueron: Diferencias Finitas, El Juego de la Vida, Torres de Hanói, Triángulo de Sierpinski, Ley de Enfriamiento de Newton, Cadenas de Markov, Teselados, la Ecuación Logística Discreta y los Procesos Caóticos. De los resultados de esta investigación se destaca la evidencia del desarrollo y mejoramiento de habilidades matemáticas por parte de los estudiantes para modelar matemáticamente a partir de las ecuaciones en diferencias.*

## INTRODUCCIÓN

En nuestro país se cuestiona la calidad de la educación a todo nivel, así como la competencia de los egresados en diferentes profesiones. El Sistema Nacional de Información de la Educación Superior (SNIES), reporta 348 instituciones de Educación Superior activas en Colombia, de las cuales 115 se encuentran en Bogotá, y de éstas se reconocen como universidades 29; es importante resaltar que sólo 9 se encuentran acreditadas con alta calidad. Las Instituciones que ofrecen carreras de Ingeniería son 51, de carácter oficial son 5 y las demás son privadas. Para los egresados de carreras de ingeniería, se reconoce la exigencia de desarrollar el pensamiento científico, es decir la capacidad para relacionar variables, formular conjeturas, preguntas o hipótesis, además de proponer explicaciones y modelos que les permita interpretar diferentes situaciones en su desempeño profesional utilizando la tecnología.

En las pruebas **"SABER PRO"**[40] se evalúa esta competencia transversal a los estudiantes de los diferentes programas de Ingeniería, sólo que en un contexto específico relacionado con la formación dada en cada pregrado. Un indicador del nivel de

[40] www.icfes.gov.co/examenes/saber-pro/informacion-general/que-se-evalua