http://www.ub.edu/geocrit/b3w-204.htm. Union, S.G.(2005). Getting Started with ODL.

Poincare, H. (1885). Sur les equations lineaires aux differentielles ordinaires et aux differences finites, *Amer. J. Math*. 7. 203–258.

Salinelli E., Tomarelli F. (2014). *Discrete Dynamical Models*. Unitext. Volume 76. Tercera Edición. Springer. Department of Mathematics Trinity University San Antonio, Texas. Editorial Board. Springer Science Business Media, Inc.

Slavit, David; Cooper, Kevin; LoFaro, Tom (2002). *Understandings of solutions to differential equations through contexts*, Web-based simulations, and student discussion. Publicación: School Science and Mathematics. Editorial Blackwell Publishing Ltda. Hoboken, United Kingdom.

Simiode Group (2014). https://www.simiode.org/about

Simiode Group. M&M – Death and Inmigration (Student Version).

Srini D., Lehman E. (2005). Mathematics for Computers Science. *Recurrences*. *Lecture Notes*. The Towers of Hanói.

Strogatz, S. (2001). *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, Perseus Books Group.

Trejo Trejo, E.; Camarena Gallardo, P; Trejo Trejo, N. (2013). Las matemáticas en la formación de un ingeniero: una propuesta metodológica. *Revista de Docencia Universitaria*. *REDU*. Vol. 11, Número especial dedicado a Engineering Education, pp. 397-424. Recuperado el 25 de abril de 2015 en http://red-u.net

Todorova, Tamara Peneva (2013). An Easy Way to Teach First-order Linear Differential and Difference Equations with a Constant Term and a Constant Coefficient. Available at SSRN: http//ssm.com/abstract=2217820 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2217820

Valdez, L. et al (2005). *Implementación de Software para la Enseñanza de las Ecuaciones en Diferencias con valores iniciales*. Instituto Superior Andalgalá-Catamarca.

Villa, J.A. y Ruíz, H.M. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista Virtual Universidad del Norte*. No 27 (mayo – agosto de 2009, Colombia).

Wanmei Soon, Luis Tirtasanjaya Lioe & Brett McInnes (2011). *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Understanding the difficulties faced by engineering undergraduates in learning mathematical modeling.

Winkel, B. (2011). *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Cross coursing in mathematics: physical modelling in differential equations crossing to discrete dynamical systems.

Mathematical Sciences, United States Military Academy, 646 Swift Road, West Point, NY 10996-1501, USA.

Winkel, B. J. (2013). Browsing Your Way to Better Teaching. PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies. 23(3): 274-290. www.icfes.gov.co/examenes/saber-pro/informacion-general/que-se-evalua

Wikipedia, la enciclopedia libre. Juego de la vida. Recuperado el 23 de mayo de 2016 en el URL: http://es.wikipedia.org/wiki/Juego_de_la_vida.

Wikipedia, la enciclopedia libre. Juego de la vida. Recuperado el 23 de mayo de 2016 en el URL: http://es.wikipedia.org/wiki/Teselado.

Wikipedia, la enciclopedia libre. Las torres de Hanói. Recuperado el 21 de mayo de 2016 en el URL: http://es.wikipedia.org/wiki/Torres_de_Hanói.

Wikipedia, la enciclopedia libre. Cadenas de Márkov. Recuperado el 21 de mayo de 2016 en el URL: http://es.wikipedia.org/wiki/Cadena_de_Márkov.

Wikipedia, la enciclopedia libre. Ecuación Logística. Recuperado el 31 de julio de 2016 en el URL: http://es.wikipedia.org/wiki/Pierre-François_Verhulst.

Wikipedia, la enciclopedia libre. Teoría del Caos. Recuperado el 31 de julio de 2016 en el URL: http://es.wikipedia.org/wiki/Edward_Lorenz.

Yasuyuki Nakamura, Koichi Yasutake and Osamu Yamakawa (2012). IADIS *International Conference on Cognition and Exploratory Learning in Digital Age* (CELDA). Some Aspects of mathematical model of colaborative learning.

UNA CARACTERIZACIÓN DE LOS TIPOS DE INSIGHT EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS PLANTEADOS EN EL SALON DE CLASES

CARLOS ALBERTO CAÑÓN RINCÓN
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
carloscanon@uan.edu.co

MAURO M. GARCÍA PUPO
Director de Tesis
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
mauro@uan.edu.co

Abstract

This research had as an objective the design of a methodology that would allow appreciating and characterizing the occurrence of <u>Insight</u> in convergent and divergent types of mathematical thinking that are present in the problem solving achieved by students of a course of the bachelor's degree in mathematics teaching in the Antonio Nariño University.

A qualitative approach was used in a case study composed of two experiences, the first experience corresponding to the second academic semester of 2015, and the second, to the first academic semester of 2016. An elective course entitled "Development of mathematical thought through problem solving", was the setting in which this observation was made. This elective course had also the aim of contributing to the formation of the future mathematics professor, in a way that he or she can deepen the mathematical thought used in the process of problem solving.

As part of the analysis and discussion of the results obtained in the two experiments, it was possible to identify and characterize three types of <u>insight</u> in relation to the types of convergent and divergent *mathematical thinking present in the solution of mathematical problems proposed in the classroom, that when they occur allow us to find a successful solution.*

Resumen

Esta investigación tuvo como objetivo diseñar una metodología que permitiera apreciar y caracterizar la ocurrencia del insight en los tipos de pensamiento matemático convergente y divergente presentes en la resolución de problemas por los estudiantes, propuestos en las clases de un curso de la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Antonio Nariño.

Se utilizó una metodología con un enfoque cualitativo, a través de un estudio de casos en dos experiencias; la primera correspondiente al segundo semestre de 2015 y la segunda al primer semestre de 2016, por medio de un curso electivo el cual se denominó "Desarrollo del pensamiento matemático a través de la solución de problemas", con la finalidad de contribuir a la formación del futuro profesor de matemáticas de tal forma que pueda profundizar en el conocimiento matemático ya adquirido como resultado del pensamiento matemático empleado en el proceso de la solución de problemas.

Como parte del análisis y discusión de los resultados obtenidos en las dos experiencias fue posible identificar y caracterizar tres tipos de insight en relación con los tipos de pensamiento matemático convergente y divergente presentes en la solución de problemas matemáticos propuestos en el salón de clases, que cuando ocurren permiten encontrar una solución de forma exitosa.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo forma parte del proyecto de investigación *"Contribuciones epistemológicas a la educación matemática"* cuya finalidad es la búsqueda de respuestas aproximadas a tres preguntas estrechamente relacionadas a la solución de problemas matemáticos. Sierpinska y Lerman (1996) proponen éstas:

- ¿Cuáles son los orígenes de los conocimientos científicos?
- ¿Cuáles son los criterios de validez de los conocimientos científicos?
- ¿Cuál es el carácter del proceso de desarrollo del conocimiento científico?

Sin embargo, este trabajo también está en relación directa con otra de las líneas de investigación contemplada en los programas de Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño, la referida a e*strategias del desarrollo, enriquecimiento y consolidación del pensamiento matemático (incluye la enseñanza y aprendizaje de la matemática para estudiantes talentosos)*[56].

Sin embargo, se considera que muchos de los aspectos que se manifiestan en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas presentan elementos que son de sumo interés lo cual sugiere la realización de un estudio sistemático.

Las relativas al pensamiento matemático encierran una riqueza que al estudiarlas pueden revelar propiedades que permitan enriquecer una parte del estado del arte, en relación a los fenómenos cognitivos que puedan caracterizar el pensamiento matemático.

Existen diferentes clasificaciones para el pensamiento matemático. Se va a tener presente una de ellas, en la que algunos autores clasifican en dos categorías el pensamiento matemático:

1. Pensamiento convergente
2. Pensamiento divergente[57]

Para Guilford (1950) el pensamiento convergente se fundamenta en la búsqueda de una respuesta determinada o convencional cuyo resultado lo identifica con una única solución a un problema. Por otro lado, el pensamiento divergente se identifica con una situación en la cual se encuentran diferentes caminos que permiten encontrar una mejor y/o novedosa solución al problema. Además, incluye la creatividad al considerar que todos los individuos poseen ambos tipos de pensamiento, pero no todos tienen la misma capacidad para utilizarlas.

El autor de esta investigación considera que en la construcción de una parte de las contribuciones en las ciencias matemáticas ha prevalecido un pensamiento convergente. Sin embargo, se considera que los grandes aportes, aquellos que marcan nuevos horizontes y que transcienden, han estado soportados por un pensamiento divergente.

Por otra parte, se ha podido constatar directamente que en la construcción de soluciones a problemas matemáticos relevantes o en la solución de problemas de competiciones matemáticas se han presentado experiencias singulares en las cuales, después de transcurrido un cierto tiempo de búsqueda infructuosa de una solución a un problema, ésta ha emergido abruptamente, incluso después de haberse abandonado la búsqueda. Esto puede ocurrir en circunstancias muy ajenas al ambiente académico de la labor matemática; por ejemplo, se puede hacer referencia a Gauss, quien escribía así refiriéndose en una carta a cierto teorema de teoría de números que había tratado de demostrar, sin éxito, durante varios años.

"Finalmente, hace dos días, lo logré, no por mis penosos esfuerzos, sino por la gracia de Dios. Como tras un repentino resplandor de relámpago, el enigma apareció resuelto. Yo mismo no puedo decir cuál fue el hilo conductor que conectó lo que yo sabía previamente con lo que hizo mi éxito posible... (De una carta comentada en Revue des questions scientifiques, octubre 1886, p. 575. Citado por Hadamard, The Psychology of Invention in the Mathematical Field, cap.1)"[58].

En un artículo Miguel de Guzmán (2001) relata un suceso ocurrido en 1858, donde Hamilton describe su hallazgo de la teoría de los cuaternios, tras quince años de infructuosos esfuerzos.

"Mañana será el aniversario quince de los cuaternios. Vinieron a la vida, o a la luz, completamente maduros, el 16 de octubre de 1843, cuando paseaba con la señora Hamilton hacia Dublín, al llegar al puente de Brougham. Allí, y en aquel momento, sentí que el circuito galvánico del pensamiento se cerraba, y las chispas que saltaron de él fueron las ecuaciones fundamentales que ligan i, j, k [los nuevos números que hacen el papel de i de los complejos], exactamente tal como los he usado siempre desde entonces.... Sentí que en aquel momento se había resuelto un problema, que se había satisfecho una necesidad intelectual que me había perseguido por lo menos quince años" ...[4]

Por otra parte, a finales del siglo XIX, Poincaré quiso caracterizar el cómo se puede desarrollar el pensamiento matemático. En este sentido se puede encontrar descripciones en la literatura de educación matemática vinculada con la solución de problemas, el cual se relaciona a veces con el talento o con la capacidad y con la creatividad de cada individuo, como parte sustancial de sus competencias.

Ahora bien, la definición de problema ofrecida por Campistrous y Rizo (1996):

[56] Documento del programa de Doctorado en Educación Matemática, 2011.

[57] Términos introducidos por Guilford en 1950.

[58] Guzmán, M. (2001). *La actividad subconsciente en la resolución de problemas.* Recuperado el 2 de abril de 2014 del URL: http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/old/04vida/parapensarmejor/27capitulo.html

"Un problema es toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer hacer la transformación"[59], permite relacionar la definición de problema y el proceso de solución de manera directa con el proceso del pensamiento matemático que se puede activar para transformar las situaciones iniciales a que estos autores se refieren.

Podría preguntarse: ¿Son o no los procesos de los dos tipos de pensamiento matemático, ya mencionados, consecuentes con el problema mismo? La respuesta es no. Se tienen ejemplos de sujetos que ante un mismo problema de la matemática elemental presentan diferentes tipos de pensamiento, ya que algunos podrán mostrar sólo una solución correcta, mientras que otros podrán ofrecer varias soluciones, y para otros ninguna solución inmediata. Aquí se puede preguntar ¿en estos últimos existe una ausencia total de pensamiento matemático de cualquiera de los dos tipos?

Planteamiento del problema

En la actualidad se pueden encontrar numerosos trabajos en el campo de la educación matemática dedicados al desarrollo del pensamiento matemático convergente o divergente relacionado con la resolución de problemas desde la escuela hasta la universidad.

Por otra parte, se considera que, durante el proceso de solución de un problema, pueden darse pequeños saltos en el pensamiento, correspondientes a la superación del bloqueo que provoca el mismo problema cuando no se encuentra una solución inmediata. Por lo general, esto ocurre porque es característico del cerebro humano que, después de estudiar cierto problema por un buen tiempo, sin encontrar dicha solución, el subconsciente continúa trabajando a pesar de que se esté realizando otras actividades muy diferentes y que, luego de un tiempo, que puede durar poco o hasta años; aparece de repente la solución del mismo. Esto es lo que se describe como el *insight* (Lisa Aziz-Zadek, (2013), Poincaré (1908)), o la experiencia de **iluminación** que de alguna forma le da una solución a lo que parecía imposible.

Algunos autores, entre ellos Lisa Aziz-Zadek[60], (2013) suponen que este tipo de *fenómeno cognitivo* está asociado al pensamiento divergente que produce una activación alta e inesperada al asociar ideas remotas y que además activa las áreas de placer del cerebro.

El insight se produce cuando se da el desbloqueo interno, dando paso a la aclaración de lo que tan insistentemente se buscaba y de acuerdo a lo que manifestaba Hadamard seguidor de las ideas de Poincaré[61] forma parte de cuatro fases en el proceso creador: i) preparación, ii) incubación; iii) iluminación y iv) verificación.

Davis y Hersh (1980), lo describen como *"destellos de insight"*, algo que ha dado paso a la luz, una nueva comprensión de la persona.

Lo anterior sugiere la necesidad de responder:

- ¿Qué tipos de *insight* podrían propiciarse dentro y fuera del aula en el transcurso de los esfuerzos de los estudiantes por resolver problemas no rutinarios?
- ¿Si el pensamiento divergente debe asociarse únicamente a situaciones donde se encuentran diferentes caminos que permiten encontrar una mejor o novedosa solución?
- ¿Se podría asociar el pensamiento divergente sólo con una solución novedosa o excepcional?

Justificación del problema

Actualmente se encuentran diferentes investigaciones sobre el pensamiento divergente y convergente, y que involucran la resolución de problemas en diferentes niveles.

En este trabajo se pretende comprender si en los dos tipos de pensamiento matemático, tanto el convergente como el divergente, pueden describirse diferentes tipos de *insight* los que regularmente, cuando suceden, culminan la solución de problemas matemáticos de forma exitosa.

Durante este proceso, se busca establecer si el *insight* puede ser propiciado en los estudiantes cuando adquieren un nuevo conocimiento a través de la resolución de problemas no rutinarios cuidadosamente construidos.

Por otra parte, en el trabajo de Fauconnier & Turner (1998 y 2002) *"Conceptual Integration Networks"* se sostiene que la integración conceptual en general es una operación cognitiva a la par con la analogía, la recursividad, los modelos mentales, y la categorización conceptual. Los autores presentan operaciones cognitivas dinámicas, flexibles y activas que entran en juego en el momento de pensar, que se denominan *cognitive blending*, la que se considera relacionada con el fenómeno del *insight*. Estos autores describen una estructura de entrada de los espacios mentales y un salto o proyección a nuevos espacios mentales independientes de los primeros realizado por medio de una combinación inesperada de operaciones. En el Gráfico 1 se ilustra lo explicado por estos autores en sus obras, gráfico en el cual el autor de esta investigación inserta dicho *insight* como mediador de los espacios mentales.

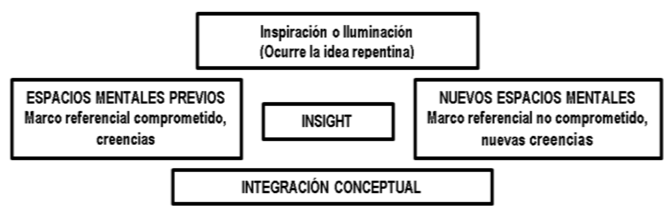


Gráfico 1[62]. Esquema de la ocurrencia de un *insight*.

Es uno de los intereses centrales del presente estudio dar una caracterización a este tipo de *fenómeno cognitivo*[63] en relación con los dos tipos de pensamiento matemático que se pueden presentar en el proceso de solución, a partir de la observación de dos grupos de estudiantes que trabajan en la solución de problemas dentro y fuera del salón de clases, en dos semestres consecutivos.

Lo anterior induce a formular el siguiente **problema de investigación**:

¿Qué características tienen las ideas que emergen y que se conocen como *insight* cuando ocurren en los tipos de pensamiento convergente o divergente y que se evidencian en los estudiantes en el proceso de solución de problemas matemáticos propuestos en clases?

Objeto de estudio: el pensamiento matemático convergente y divergente en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

Se pretende establecer que en estos dos tipos de pensamiento matemático pueden describirse varios tipos de *insight* los que regularmente, cuando suceden, culminan la solución de problemas

[59] Campistrous l. y Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos.* Editorial Pueblo y Educación, C. Habana.
[60] Aziz-Zadek, Lisa, et.al.(2013). Exploring the Neural Correlates of Visual Creativity. *Soc. Cogn. Affect. Neurosci.*,8 (4): pp. 475-480.
[61] Poincaré, H. (1908). *L'Enseignement Mathématique.*
[62] García, M. (2014). A metacognitive reflection of the thinking types through mathematical research. Convergence vs. Divergence. *International Congress of Mathematicians, Seoul, Korea*
[63] Por denominarlo de esta manera.

matemáticos de forma exitosa, cuestión que se explicitará más adelante en la hipótesis de esta investigación. Ahora se propone el siguiente

Objetivo general

Describir las ocurrencias del *insight* en los tipos de pensamiento matemático convergente y divergente presentes en la resolución por parte de los estudiantes de problemas propuestos en las clases de un curso de la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Antonio Nariño.

Objetivo específico

Determinar las diferentes dimensiones que deben permitir apreciar el *insight*, así como caracterizar su ocurrencia dentro de los tipos de pensamiento matemático (convergente y divergente) que puedan ocurrir durante el proceso de solución de problemas planteados en clase.

Todo lo anterior direcciona el **campo de acción** como:

El *insight* dentro de los dos tipos de pensamiento matemático, el convergente y el divergente, que se manifiestan en el proceso de enseñanza aprendizaje en los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Antonio Nariño cuando asisten a cursos relacionados con la resolución de problemas matemáticos.

En adición posibilita formular la siguiente:

Hipótesis de investigación

Se pueden describir diferentes tipos de *insight* los que regularmente, cuando suceden, culminan la solución de problemas matemáticos de forma exitosa y novedosa. (Ver Gráfico 2.)

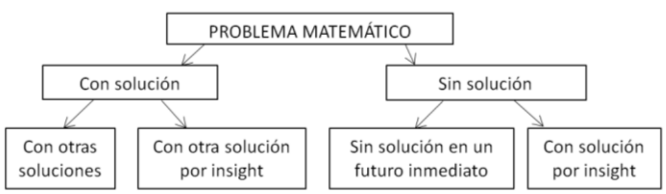


Gráfico 2. Sobre los posibles tipos de insight en la solución de problemas matemáticos.

Tareas

1. Determinar el estado del arte y el marco teórico.
2. Diseñar una metodología de trabajo basada en la observación y seguimiento del comportamiento de aquellos estudiantes a quienes se les pueda presentar el *insight* en el proceso de solución de los problemas matemáticos propuestos.
3. Describir cada situación singular, dentro o fuera del salón de clases como "estudio de casos".
4. Analizar los resultados y descripción de características encontradas en los *insight* en el marco de los tipos de pensamiento matemático convergente y divergente (o en ninguno).
5. Construir argumentos alrededor de la hipótesis o conjetura planteada.
6. Elaborar y presentar el texto científico de esta investigación.

Aporte teórico y práctico

El diseño y fundamentación de un esquema de resolución de problemas que permita apreciar y caracterizar los diferentes tipos de *insight* que puedan ocurrir en los dos tipos de pensamiento matemático estudiados y que pueden estar presentes en el proceso de resolución de problemas no rutinarios en el salón de clases.

Novedad científica

La relación de los tipos de pensamiento matemático convergente y divergente con el proceso o fenómeno denominado *insight*.

Estructura de la tesis

La tesis está estructurada con una introducción, cuatro capítulos: un capítulo 1 Estado del arte, un capítulo 2. Marco teórico; un capítulo 3. Diseño metodológico de la investigación y un capítulo 4. Resultados, discusión y análisis. Además, Conclusiones, Recomendaciones, Bibliografía y referencias y Anexos.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE. Para fundamentar esta investigación se analizaron trabajos relacionados con la ocurrencia del *insight* y de factores asociados a él en tres direcciones: I. El *insight* según las ciencias psicológicas. II. Pensamientos convergente y divergente. III. Resolución de problemas y pensamiento matemático.

En el primero, se hace referencia a las siguientes investigaciones: *Creatividad e insight de* Martín, C. (1999), Psicología de la ciencia y creatividad de Romo, M. (2007), *Studying insight problem solving with neuroscientific methods* de Luo, J. Knoblich, G. (2007), *Intuition, incubation, and insight: Implicit cognition in problem solving* de Dorfman, J. Shames, V. Kihlstrom, J. (1996), *AHA!: The effect and affect of mathematical discovery on undergraduate mathematics students* de *Liljedahl, P. (2004)*. Los anteriores trabajos deben ayudar a una descripción de los posibles *insight* que pueden emerger en transcurso de solución de problemas planteados en el aula.

En el segundo, se destacan: *Convergent/divergent cognitive styles and mathematical problem solving* de Alamolhodaei, H. (1997), *Divergence and convergence of mental forces of children in open and closed mathematical problems* de Sak, U. Maker, C. (2005). *Cultivating Divergent Thinking in Mathematics through an Open-Ended Approach* de Oh, N. K, Jung S. P., y Jee H. P. (2006). Estos autores relacionan los dos tipos de pensamiento, tanto el convergente, como el divergente, con la fluidez, la originalidad y la flexibilidad.

En el tercero, se destaca la investigación: *La enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas* de Cruz, M. (2006), *La resolución de problemas*. *Una revisión teórica* de Blanco, J. (1996), que incursiona sobre aspectos importantes de la enseñanza de las matemáticas a través de la solución de problemas desde el punto de vista de la psicología de la Educación Matemática. Estos trabajos constituyen un buen punto de partida para este estudio de casos.

Al analizar el alcance de los resultados de los trabajos anteriores, se puede concluir que ellos constituyen una buena base para alcanzar, con esta investigación, los objetivos para la caracterización de los posibles *insight* que se puedan apreciar y que surgen en la actividad escolar con estudiantes que son retados a solucionar problemas matemáticos planteados en clases.

La mayoría de las metodologías implementadas en las anteriores investigaciones son cualitativas, lo que sugiere que la implementación de un estudio de casos para la detección de características, de este tipo de fenómeno cognitivo (*insight*), que presumiblemente puedan observarse en los procesos de solución de problemas planteados en el aula de clases es una decisión acertada.

Los resultados de estos trabajos permiten ajustar un marco teórico. Además, debe sugerir un diagrama del flujo que conecte la resolución de problemas con las ocurrencias de *insight*, así como, clarificar la relación de éstos con los pensamientos convergente y divergente.

En el CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO. Se hacen consideraciones psicológicas que, Según Fauconnier & Turner (1998 y 2002) *“Conceptual Integration Networks”* sostienen que la integración conceptual es en general es una operación cognitiva a la par con la analogía, la recursividad, los modelos mentales. Ellos presentan operaciones cognitivas dinámicas, flexibles y activas que entran en juego en el momento de pensar y que denominan *cognitive blending*, las que se consideran relacionadas con el fenómeno del *insight*. Describen una estructura de entrada de espacios mentales y un salto o proyección a nuevos espacios mentales independientes de los primeros y realizado por medio de una combinación inesperada de operaciones.

Métodos de los cuatro pasos. Polya propone en su primer libro el *“Método de los Cuatro Pasos”*, para resolver cualquier tipo de problema se debe: 1) comprender el problema, 2) concebir un plan, 3) ejecutar el plan y 4) examinar la solución” (Polya, 1965:7-12). Para cada una de estas etapas Polya propone una serie de preguntas y sugerencias; se retomarán las más importantes para esta investigación, ya que potencialmente deben permitir, de alguna forma la ocurrencia de algún tipo de *insight*, en el proceso de solución de problemas en el salón de clases.

Otras consideraciones sobre la resolución de problemas. Polya en su obra *Matemáticas y razonamiento plausible* sostiene que el conocimiento matemático esta soportado por el razonamiento demostrativo y apoya las conjeturas por medio del razonamiento plausible, *ya que una prueba matemática es un razonamiento demostrativo, pero la evidencia inductiva del físico, la evidencia circunstancial del abogado, la evidencia documental del historiador y la evidencia estadística del economista pertenecen al razonamiento plausible* (Polya, 1954: 13).

Se entiende como un razonamiento conjetural aquel que permite elaborar hipótesis, conjeturas, y así examinar su validez en cualquier momento; además, de contrastarlas y reformularlas según sea el caso y así obtener nuevas hipótesis susceptibles de ser demostradas.

Polya hace la distinción de estos dos tipos de razonamiento, ya que el demostrativo, es seguro y definitivo, mientras que el plausible es azaroso, discutible y provisional.

Por otro lado, Mason, J, Burton, L. y K. Stacey (1988) en su obra *Pensar Matemáticamente*, describen los procesos que rigen el pensamiento matemático en general, el objetivo es mostrar cómo acometer cualquier problema; es decir, cómo atacarlo de un modo eficaz y cómo ir aprendiendo de la experiencia. Ellos sugieren tres fases:

1) *El abordaje*. En esta fase se basa en las respuestas a tres preguntas: ¿Qué es lo que sé? ¿Qué es lo que quiero? ¿Qué es lo que puedo utilizar?

2) *El ataque*. En esta fase el estudiante siente que se ha apropiado el problema, los estados de ánimo que se asocian se describen en ¡Atascado! y ¡Ajá!, y el proceso que debe tener lugar es el de hacer conjeturas y justificarlas convincentemente.

3) *La revisión*. Es el momento de mirar hacia atrás, revisar el trabajo hecho, para mejorar y ampliar su capacidad de razonamiento; así como, para lograr de cierta forma situar la resolución en un contexto más amplio. Esta fase se caracteriza en tres momentos: I) *Comprobar la solución*. II) *Reflexionar en las ideas y momentos claves*. III) *Generalizar a un contexto más amplio*.

De lo anterior se propone una integración de una relación de las dimensiones: la psicológica y la didáctica como soporte teórico de esta investigación en el siguiente diagrama de flujos:

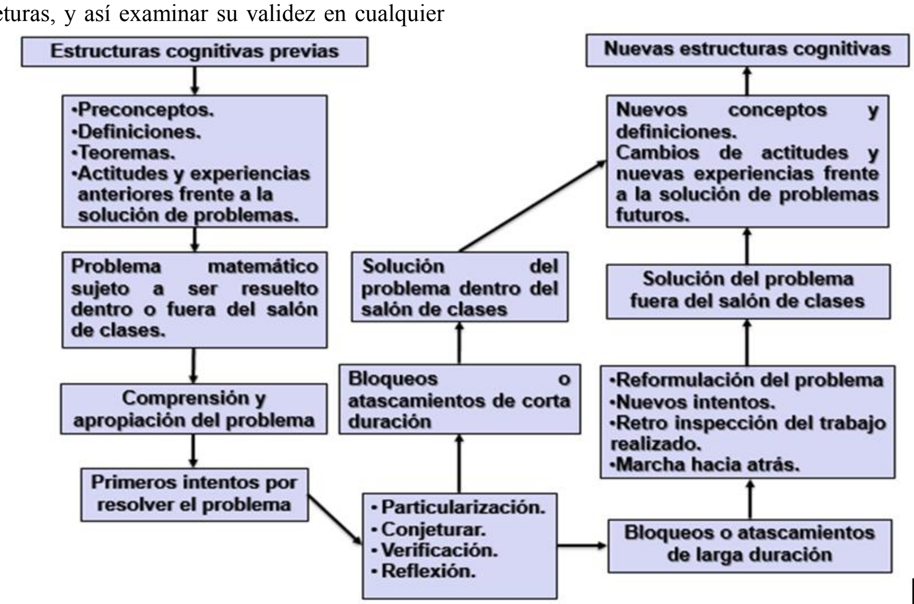


Gráfico 3: Diagrama teórico de la investigación.

CAPITULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.

Dada la naturaleza del fenómeno cognitivo que se pretende estudiar, es necesario una metodología de investigación fundamentada en el paradigma cualitativo que, según Fraenkel, J., Wallen, N. (1996); las características básicas para este tipo de estudio son:

1. El ambiente natural y el contexto en que se da el problema, es la fuente directa y primaria y la labor del investigador son los instrumentos claves en la investigación.

2. La recolección de los datos es más verbal que cuantitativa.

3. Los investigadores enfatizan tanto en los procesos como en los resultados.

4. El análisis de los datos se da modo inductivo.

5. Interesa saber cómo piensan los sujetos en una investigación y qué significado poseen sus perspectivas en el asunto que se investiga.

El estudio se implementó en un curso de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Antonio Nariño correspondientes a dos semestres el 2-2015 y el 1-2016. Se hizo un seguimiento sistemático a cinco estudiantes, dos (**E1 y E2**) y tres (**E3, E4 y E5**) respectivamente, en ambos semestres se relató, entrevistó, grabó y filmó las sesiones de clase para su posterior análisis.

La sistematicidad de estas acciones facilitó una descripción de los hábitos, actitudes, habilidades y capacidades en la solución de los problemas matemáticos diseñados. En particular, se hizo una observación de cada uno de los estudiantes, para poder captar las posibles ocurrencias y singularidades que posibilitaran una caracterización de los diferentes tipos de *insight* que pudieran presentarse y su relación con ambos tipos de pensamiento. Para cada clase, se propusieron actividades con dos problemas relacionados con las temáticas de geometría, algebra, desigualdades y cálculo. Cada estudiante trabajó en forma individual, se dieron algunas generalidades al inicio de cada uno de estos temas. Se presenta un esquema de la metodología diseñada para este estudio:

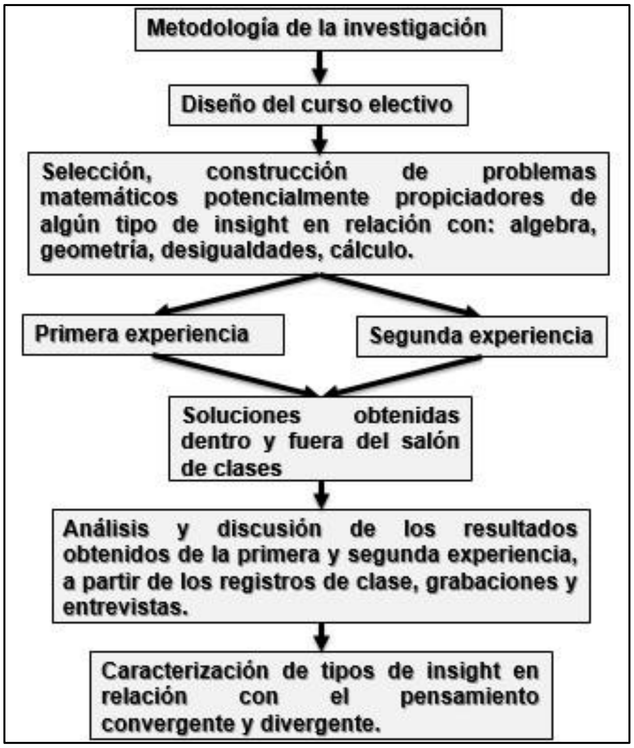


Gráfico 4: Esquema para una metodología de la investigación.

Se considera que la metodología implementada y un adecuado diseño de las actividades deban permitir la ocurrencia de diferentes tipos de <u>*insight*</u> y, por tanto, la posibilidad de poder apreciar y caracterizar diferentes estadios de los mismos. **CAPITULO 4. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN.** A partir de la observación del comportamiento de los estudiantes, el análisis de cada una de las clases y el seguimiento que se le dio a cada uno de los que experimentaron este fenómeno cognitivo, se apreciaron ciertas regularidades en las soluciones dadas. Se muestran dos problemas con soluciones asociadas y representativas de dos de los insight caracterizados. Para ello, se presentan dos problemas y las soluciones asociadas. Un primer problema permite caracterizar esta experiencia como un *insight inmediato*.

Problema 1: Para medir la altura de las nubes en un campo, un trabajador enciende un reflector hacia arriba, a un ángulo α por encima de la horizontal. Un observador a una distancia d mide el ángulo de elevación del reflector y ve que es β. Determine una ecuación que permita calcular la altura h de las nubes.

El estudiante **E2** resuelve el problema. Una rápida interpretación del mismo fue determinante para su solución. El planteamiento del problema no ofreció ilustración grafica alguna. **E2** en sus primeros intentos logra mostrar adecuadamente la solución.

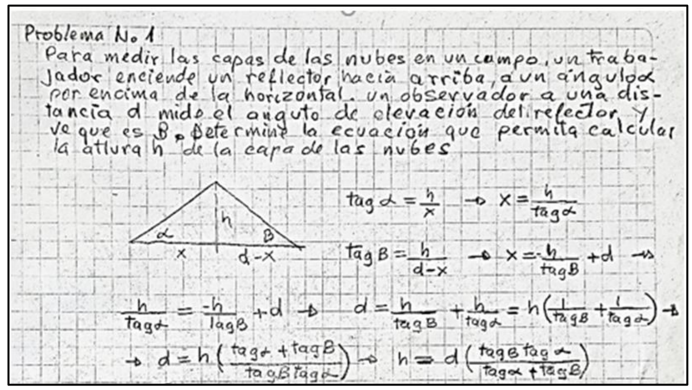


***Figura* 1. Solución del estudiante E2 del problema 1 de la actividad 1 de 2015.**

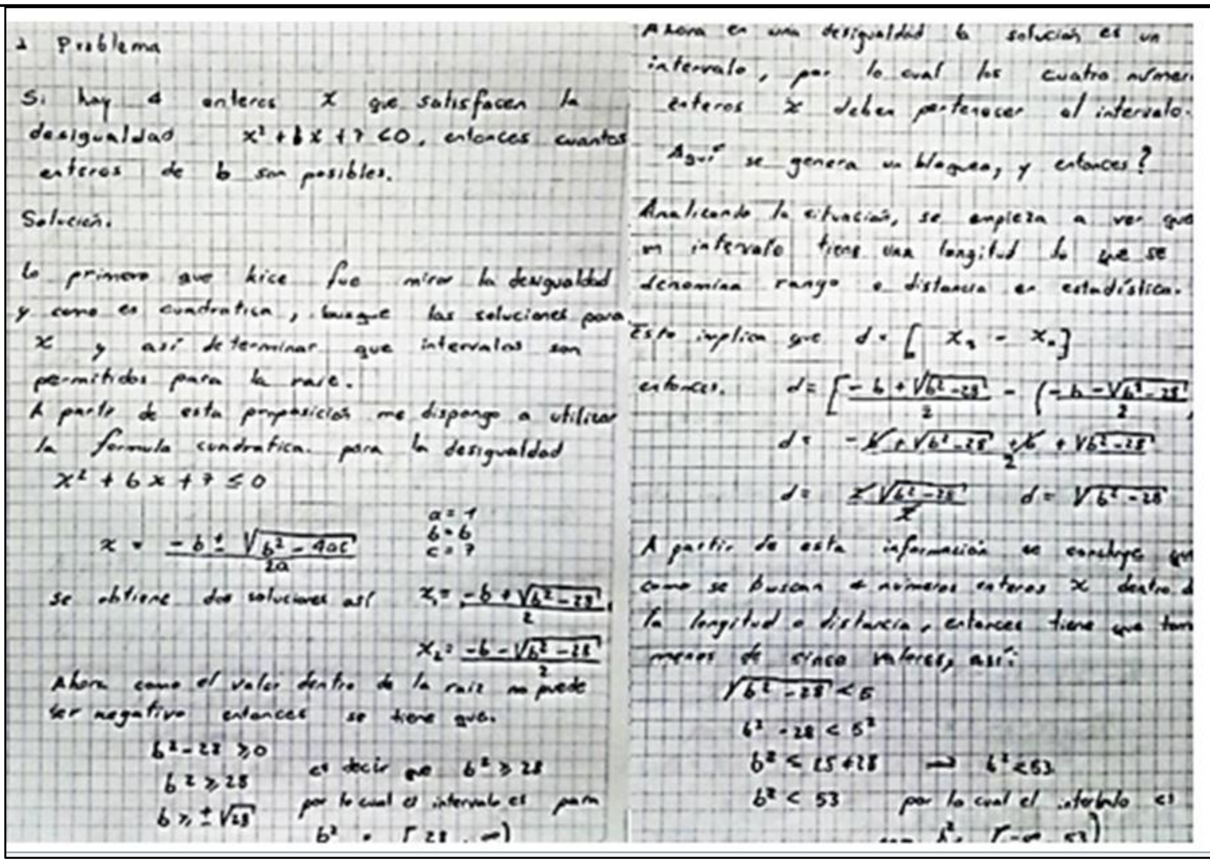
Sin embargo, los problemas cuyas soluciones fueron obtenidas posteriormente fuera del salón de clases requirieron una apropiación e interés del estudiante por resolverlos, propició la descripción de lo que se denominó un *insight a posteriori*.

Tal es el caso que proporciona el segundo problema:

Problema 2: Si hay exactamente 4 enteros x, que satisfacen la desigualdad $x^2 + bx + 7 \leq 0$ ¿Cuántos valores enteros de b son posibles?

A partir de la solución de la ecuación cuadrática, el estudiante se percata del intervalo donde están todas las soluciones de la desigualdad en términos de la variable desconocida b, al calcular la longitud del intervalo encuentra la expresión $d = \sqrt{b^2 - 28}$, con la cual pudo inferir y demostrar que $b^2 \in (28{,}53)$, de esta forma los únicos enteros que satisfacían esa condición son $-7, -6, 6\ y\ 7$.

Se presenta un problema resuelto posterior a esa actividad por el estudiante **E2**, que le requirió varias horas de trabajo.



2 Problema

Si hay 4 enteros x que satisfacen la desigualdad $x^2+bx+7<0$, entonces cuantos enteros de b son posibles.

Solución.

Lo primero que hice fue mirar la desigualdad y como es cuadratica, busque las soluciones para x y así determinar que intervalos son permitidos para la raíz.

A partir de esta proposición me dispongo a utilizar la formula cuadratica para la desigualdad

$x^2+6x+7\le 0$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $a=1$ $b=6$ $c=7$

se obtiene dos soluciones así $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-28}}{2}$

$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-28}}{2}$

Ahora como el valor dentro de la raiz no puede ser negativo entonces se tiene que:

$b^2-28\ge 0$ es decir que $b^2\ge 28$

$b^2\ge 28$ por lo cual el intervalo es para

$b\ge\pm\sqrt{28}$ $b^2\in[28,\infty)$

Ahora en una desigualdad la solución es un intervalo, por lo cual los cuatro números enteros x deben pertenecer al intervalo.

Aquí se genera un bloqueo, y entonces?

Analizando la situación, se empieza a ver que un intervalo tiene una longitud lo que se denomina rango o distancia en estadística.

Esto implica que $d=[x_1-x_2]$

entonces, $d=\left[\frac{-b+\sqrt{b^2-28}}{2}-\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-28}}{2}\right)\right]$

$d=\frac{-b+\sqrt{b^2-28}+b+\sqrt{b^2-28}}{2}$

$d=\frac{2\sqrt{b^2-28}}{2}$ $d=\sqrt{b^2-28}$

A partir de esta información se concluye que como se buscan 4 números enteros x dentro de la longitud o distancia, entonces tiene que tomar menos de cinco valores, así:

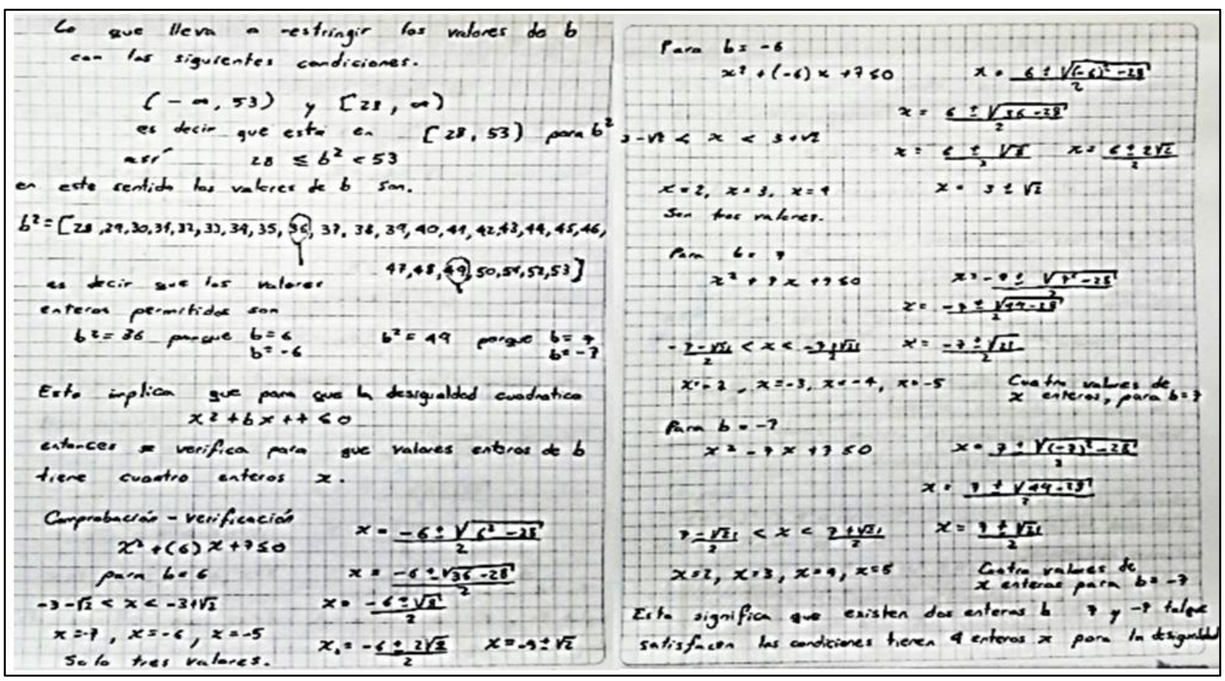
$\sqrt{b^2-28}<5$

$b^2-28<5^2$

$b^2<25+28 \rightarrow b^2<53$

$b^2<53$ por lo cual el intervalo es para $b^2\in(-\infty,53)$

Figura **2 (hoja 1): Solución del estudiante E2 al problema 2 de la actividad 8 de 2015.**



Lo que lleva a restringir los valores de b con las siguientes condiciones.

$(-\infty,53)$ y $[28,\infty)$

es decir que está en $[28,53)$ para b^2

así $28\le b^2<53$

en este sentido los valores de b son.

$b^2=[28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,53]$

es decir que los valores enteros permitidos son

$b^2=36$ porque $b=6$, $b=-6$ $b^2=49$ porque $b=7$, $b=-7$

Esto implica que para que la desigualdad cuadratica $x^2+bx+7<0$ entonces se verifica para que valores enteros de b tiene cuatro enteros x.

Comprobación - verificación

$x^2+(6)x+7\le 0$ $x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-28}}{2}$

para $b=6$ $x=\frac{-6\pm\sqrt{36-28}}{2}$

$-3-\sqrt2<x<-3+\sqrt2$ $x=\frac{-6\pm\sqrt8}{2}$

$x=-7$, $x=-6$, $x=-5$ $x_1=-\frac{6\pm2\sqrt2}{2}$ $x=-3\pm\sqrt2$

Solo tres valores.

Para $b=-6$

$x^2+(-6)x+7\le 0$ $x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-28}}{2}$

$x=\frac{6\pm\sqrt{36-28}}{2}$

$3-\sqrt2<x<3+\sqrt2$ $x=\frac{6\pm\sqrt8}{2}$ $x=\frac{6\pm2\sqrt2}{2}$

$x=2$, $x=3$, $x=4$ $x=3\pm\sqrt2$

Son tres valores.

Para $b=7$

$x^2+7x+7\le 0$ $x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-28}}{2}$

$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-28}}{2}$

$\frac{-7-\sqrt{21}}{2}<x<\frac{-7+\sqrt{21}}{2}$ $x=\frac{-7\pm\sqrt{21}}{2}$

$x=-2$, $x=-3$, $x=-4$, $x=-5$ Cuatro valores de x enteros, para $b=7$

Para $b=-7$

$x^2-7x+7\le 0$ $x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-28}}{2}$

$x=\frac{7\pm\sqrt{49-28}}{2}$

$\frac{7-\sqrt{21}}{2}<x<\frac{7+\sqrt{21}}{2}$ $x=\frac{7\pm\sqrt{21}}{2}$

$x=2$, $x=3$, $x=4$, $x=5$ Cuatro valores de x enteros para $b=-7$

Esto significa que existen dos enteros b 7 y -7 tal que satisfacen las condiciones tienen 4 enteros x para la desigualdad

Figura **3 (hoja 2): Solución del estudiante E2 al problema 1 de la actividad 10 de 2015**.

En resumen, dentro del proceso de solución de problemas dentro y fuera del salón de clases, y la observación a los estudiantes, se pueden identificar, caracterizar y asociar estos tres tipos de *insight* y su relación con los pensamientos matemático convergente o divergente, que cuando suceden permiten solucionar un problema matemático de forma exitosa. Para cada uno de ellos se identificaron con características propias.

Una aproximación descriptiva del insight inmediato. El estudiante en sus primeros intentos madura algunas ideas que le permiten lograr la solución del problema matemático en el salón de clases, los atascamientos o bloqueos que presenta el estudiante son de corta duración:

1. Por lo general comprende y se apropia del problema, en estos intentos por llegar a una solución, con instancias que permiten apreciar regularidades, invariantes que puedan conducir a una solución.

2. El estudiante evoca experiencias similares con otros problemas que le permiten relacionarlos con el problema actual.

3. Un factor indispensable en la solución de la mayoría de los problemas son los preconceptos que tiene el estudiante con las diferentes temáticas abordadas, además de la identificación de lo que se quiere determinar con el problema.

4. Este *insight* está en relación al tipo de pensamiento convergente en el estudiante ya que éste llega a la solución del problema de forma casi inmediata, sus soluciones son convencionales y no requieren grandes esfuerzos en su construcción.

Es de resaltar que, en algunos de los problemas, el estudiante evoca experiencias similares con otros problemas que le permiten relacionarlos con el problema actual.

Hay un esfuerzo considerable de presentar sus soluciones de una manera clara y convincente.

Una aproximación descriptiva del *insight a posteriori*.

El estudiante en sus primeros intentos por resolver el problema no tiene avance alguno, los momentos de atascamiento o bloqueo son prolongados y en la mayoría de los casos pueden tomar bastante tiempo. Por lo general el estudiante se siente motivado a buscarle solución, además de asumir el problema con seriedad; se maduran nuevas ideas que pueden tardar un buen tiempo en desarrollarse. Precisamente, esto es lo que se le ha denominado *incubación*. A veces, emerge una solución cuando menos la espera. Pero es frecuente que la obtengan al hacer una retro inspección de su trabajo, que les permitió comprender mejor la situación.

Un factor identificado en los estudiantes es las diferentes percepciones del problema mismo, que de alguna manera maduran nuevas ideas, que se encadenan repentinamente; en fin, para llegar a una solución del mismo.

Se manifiesta una sensación de descanso, alegría, felicidad al romper la frustración que causaba el no poder darle solución al mismo.

Una aproximación descriptiva del *insight por comprensión*.

Se identifica cuando el estudiante encuentra otra solución posteriormente al problema; el estudiante genera ideas que le permiten encontrar una nueva vía de solución que puede ser más novedosa que la primera, lo cual puede darse dentro o fuera de salón de clases. Por lo general presenta las siguientes características:

1. Los bloqueos o atascamientos pueden ser de corta o larga duración.
2. Las soluciones presentadas por los estudiantes son distintas a las esperadas.
3. Hay un buen entendimiento y apropiación del problema.
4. Hay novedad en la segunda solución.

Consideraciones sobre la relación del *insight* y los tipos de pensamientos convergente y divergente

De los resultados correspondientes a la primera y segunda experiencia, los tres tipos de *insight* identificados se relacionan con los tipos de pensamiento convergente y divergente de la siguiente forma:

El pensamiento convergente es un proceso mental fundamentado en la búsqueda de una solución convencional o determinada a un problema que no requiere un gran esfuerzo, solución que se puede alcanzar con la información disponible que descansa en espacios mentales previos, constituido por conceptos, definiciones, resultados, y experiencias anteriores. Es por ello que el *insight inmediato* se relaciona con este pensamiento. Se puede resumir que:

- Por lo general ocurre dentro del salón de clases.
- Hay un buen entendimiento y comprensión del problema.

Es de resaltar que en la gran mayoría de los problemas resueltos dentro del salón de clases los bloqueos son de corta duración y en los primeros intentos por resolverlos emergen y se desarrollan las ideas que se constituyen en la solución de los mismos. Sin embargo, se conocen situaciones de estudiantes que han experimentado este tipo de insight, con una solución muy novedosa y una explicación fuera de lo común que, muy bien puede asociarse a un pensamiento divergente.

El *insight a posteriori* y el *insight por comprensión* se relacionan con el pensamiento divergente de la siguiente forma:

El pensamiento divergente es un proceso mental que no necesariamente debe estar ligado a múltiples vías de solución de un problema; las soluciones requieren de un gran esfuerzo y tiempo en desarrollarse, además debe incluir perspicacia, fluidez, y novedad por parte del estudiante.

Se puede resumir que:

- Los bloqueos o atascamientos son de larga duración.
- Hay un buen entendimiento y comprensión del problema.
- El estudiante requiere hacer cortas pausas para reanudar el problema.
- El estudiante intenta verificar sus conjeturas de una forma rigurosa.
- El problema es asumido con compromiso y seriedad.
- Las soluciones de los problemas son presentadas de una forma clara, fluida, en algunas ocasiones hay novedad.

El bloqueo del problema es superado por el estudiante cuando hace una retro inspección de su trabajo y hace una marcha hacia atrás, dando paso a nuevas ideas que, al desarrollarlas, permiten alcanzar la solución del problema.

Los diferentes insight en el proceso de la resolución de problemas. Basados en las contribuciones de Fauconnier y Turner, así como, las de Polya, Mason, Burton y Stacey en relación con la resolución de problemas y el lugar que ocupa una posible ocurrencia del *insight*, Se integran en el siguiente esquema los tres tipos de *insight* que se acaban de caracterizar:

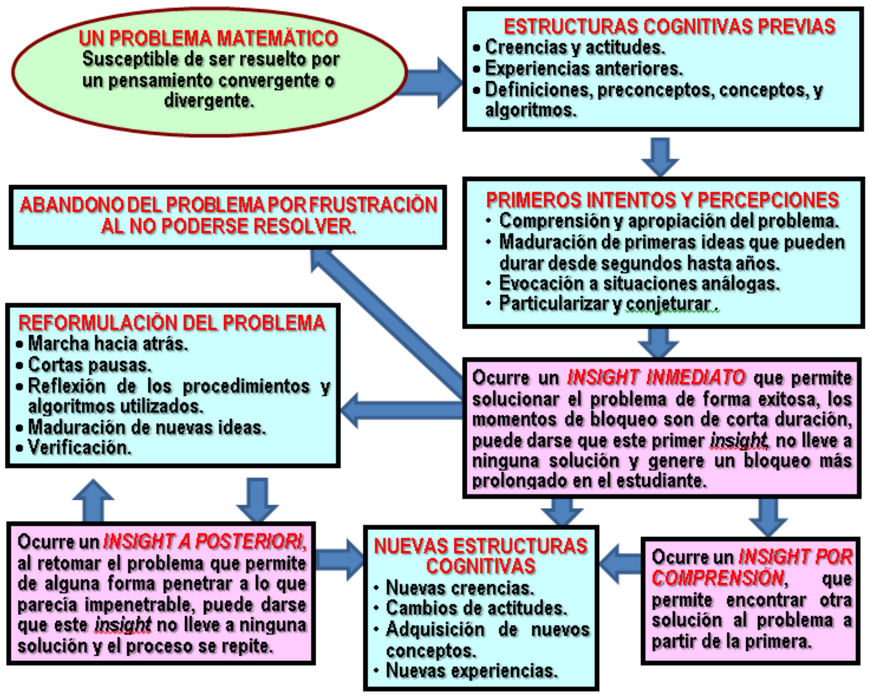


Gráfico 5: Un esquema que describe el lugar que ocupa una solución por insight en el proceso del desarrollo de la resolución de problemas.

CONCLUSIONES

Se describieron las características que permitieron diferenciar a cada uno de los tres tipos de *insight*. Esto fue posible al apreciar la ocurrencia de éstos bajo una estricta observación a los cinco estudiantes en los dos semestres.

Está muy claro que, en los procesos de solución de problemas, además de los tres tipos de insight, existen dos diferentes niveles de *insight*. No es lo mismo aquellos que están muy bien documentados en la literatura y que permitieron y están permitiendo aportes a las matemáticas y por tanto de una cierta o gran magnitud y además de trascendencia científica por lo que han significado y significan. Muchos de ellos marcan un antes y un después en las Ciencias Matemáticas cada vez que ocurrieron. Es conveniente diferenciar los mismos atendiendo a dicha trascendencia.

Se deben diferenciar estas dos categorías o niveles de *insight*. La primera se identifica como la **científica** y la segunda la **escolar**. Claro está, la **científica** es aquella cuyo resultado se ha heredado y construido en ese edificio que llamamos Ciencias Matemáticas. La **escolar** es aquella que, sin grandes pretensiones, los estudiantes la experimentan en sus clases de matemáticas y que pueden conducirlos a enriquecer no sólo su pensamiento matemático sino a profundizar en esta importante rama de las ciencias y empoderarlos para que puedan experimentar, en el futuro, *insight* científicos. Los tres tipos de *insight* caracterizados en este estudio deben agruparse en la categoría **escolar**. Algunos *insight* **científicos** fueron relatados en la introducción.

Es seguro que la **escolar** precede a la **científica**, no se puede descartar que los grandes matemáticos no la hayan experimentado en el proceso de desarrollo de la construcción de sus conocimientos desde una etapa escolar temprana. Son muchos los ejemplos al respecto. Se considera que la mayoría de los matemáticos creadores de teorías también los hayan experimentado, así como, aquellas personas que se han destacado en competiciones matemáticas.

Se diseñó una metodología netamente cualitativa a manera de estudio de casos en la cual se le hizo un seguimiento continuo a cinco estudiantes, que permitió identificar las ocurrencias de estos tipos de *insight* en el proceso de resolución de problemas dentro y fuera del salón de clases.

Los esquemas de resolución de problemas propuestos en el marco teórico fueron acertados en el sentido que les propició a los estudiantes nuevos horizontes para la resolución de problemas futuros, además de incentivar el desarrollo del pensamiento matemático que puede ser utilizado en su ejercicio profesional, ya que los mismos se están formando como docentes en la carrera de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Antonio Nariño.

En cuanto a la hipótesis de la investigación planteada se puede asegurar que significó una buena ruta de trabajo para toda la investigación ya que se pudo describir tres diferentes tipos de *insight*.

Se relacionan dimensiones didácticas y psicológicas que derivaron en un esquema de resolución de problemas donde se pudiera apreciar la ocurrencia de los *insight*. Además, se logró establecer una relación de éstos con el pensamiento convergente, divergente.

El éxito o no en la solución de problemas matemáticos presentados en el salón de clases depende en gran medida del nivel de conocimiento y desarrollo del pensamiento que tenga cada estudiante, ya que para algún estudiante el problema le puede generar un *insight inmediato*, y para otro un *insight a posteriori*.

Los problemas escogidos para implementar las actividades, se diseñaron y adaptaron cuidadosamente para que potencialmente elevaran el interés en la obtención de su solución. Era deseable que los estudiantes se apropiaran del problema y lo asumieran con seriedad. Sin embargo, esto no fue suficiente, ya que muchos de los problemas no fueron solucionados.

Una dificultad presentada en desarrollo de las actividades fue la comunicación de los resultados obtenidos, ya que en algunas ocasiones los estudiantes no hacen un buen uso de un vocabulario matemático adecuado, haciéndoles perder las ideas que pretendían expresar. Sin embargo, la claridad de las soluciones fue mejorando en el transcurso del desarrollo de las actividades.

Por todo lo anterior se tiene la certeza del cumplimiento de los objetivos propuestos para este estudio.

RECOMENDACIONES

1. Se recomienda que se utilicen los resultados de esta tesis en la investigación de temas relacionados con el pensamiento convergente o divergente.
2. Se recomienda los enfoques de resolución de problemas propuesto por Mason, Burton y Stacey, en su obra "Pensar matemáticamente", ya que a los estudiantes les permite ver nuevos horizontes.
3. Los problemas para implementar actividades de esta naturaleza se deben diseñar y/o adaptar bajo una concepción extremadamente cuidadosa, para que potencialmente logren el interés en la obtención de su solución por parte de los estudiantes y que además puedan causar bloqueos de corta o larga duración con consiguientes momentos de ***insight*** dentro o fuera de salón de clases.

OBRA DEL AUTOR

Cañón, C., García, M. (2015). Una caracterización preliminar de los tipos de insight presentes en la solución de problemas matemáticos en el aula. *COMPUMAT 2015*. Universidad de las Ciencias Informáticas. Noviembre 23 al 27 de 2015. La Habana.

Cañón, C., García, M. (2017).Tipos de insight presentes en la solución de problemas matemáticos en el salón de clases. *Revista Ciencias Holguín*. (Artículo presentado para su publicación)

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

Alamolhodaei, H. (1997). Convergent/divergent cognitive styles and mathematical problem solving. *Journal of science and mathematics education* in s.e. Asia vol. xxiv, no. 2.

Aziz-Zadek, L. et.al. (2013). Exploring the Neural Correlates of Visual Creativity. *Soc. Cogn. Affect. Neurosci*.,8 (4):475-480.

Blanco, J. (1996). La resolución de problemas. Una revisión teórica. *Revista SUMA* N° 21. P11-20. Disponible en URL: http://revistasuma.es/IMG/pdf/21/011-020.pdf.

Campistrous, L. y Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. Editorial Pueblo y Educación, C. Habana.

Cruz, M. (2006). *La enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas*. Órgano editor Educación Cubana.

Davis, P., & Hersh, R. (1980). *The mathematical experience*. Boston, MA: Birkhauser.

Dorfman, J. Shames, V. Kihlstrom, J. (1996). Intuition, incubation, and insight: Implicit cognition in problem solving. Underwood, Geoffrey D. M. (Ed), (1996). *Implicit cognition*. , (pp. 257-296). New York, NY, US: Oxford University Press.

Fauconnier, G. & Turner, M. (1998). Conceptual Integration Networks. *Cognitive Science*, 22(2), 133-187.

Fauconnier, G. & Turner, M. (2002). *The way we think: conceptual blending and the mind's hidden complexity*. Basic Books. NY.

Fraenkel Jr, Wallen Ne. 1996. How to design and evaluate research in education (3rd ed.). New York: McGraw-Hill.

García, M. (2014). A metacognitive reflection of the thinking types through mathematical research. Convergence vs. Divergence. *International Congress of Mathematicians*, Seoul, Korea.

Guilford, J. P. (1950). Creativity. *The American Psychologist*, 5: 444-454.

Guzmán, M. (2001). La actividad subconsciente en la resolución de problemas. Recuperado el 10 de febrero de 2014 del URL: http://www.redcientifica.com/doc/doc200112010001.html.

Hadamard (1949). *The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Liljedahl, P. (2004). AHA!: The effect and affect of mathematical discovery on undergraduate mathematics students. A paper presented in TSG3 at ICME-10. Available online at http://www.icme-organisers.dk/tsg03/TSG3_Liljedahl.pdf.

Luo, J., Knoblich, G. (2007). Studying insight problem solving with neuroscientific methods. ScienceDirect. Pp. 77-86. Available online at www.sciencedirect.com.

Martín, C (1999). Creatividad e Insight. ISSN 1136-8136, Nº. 7, 1999, págs. 63-84 https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2476241

Mason, J, Burton, L. y K. Stacey (1988). *Pensar Matemáticamente*, MEC-Labor, Barcelona.

Poincaré, H (1914). *Science and method*. Translated from French. Tomas Nelson and sons. New York.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Vol. I (Induction and analogy in mathematics). Princeton : Princeton University Press. New Jersey.

Romo, M. (2007). Psicología de la ciencia y creatividad. *Revista creatividad y sociedad*. Nº 10, pp 7-31, marzo de 2007, disponible en http://www.creatividadysociedad.com/articulos/14/Creatividad%20y%20Sociedad.% 20Psicologia%20de%20la%20ciencia%20y%20la%20creatividad.pdf.

Sak, U. Maker, C. (2005). Divergence and convergence of mental forces of children in open and closed mathematical problems. *International Education Journal*, 2005, 6(2), 252-260. http://iej.cjb.net.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). *Epistemología de las Matemáticas y de la Educación Matemática*, CINVESTAV, IPN, México.