

ANÁLISIS DE DATOS E  
INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA  
DE LA MATEMÁTICA. UNA  
APROXIMACIÓN DESDE LA  
TEORÍA DE SITUACIONES

---

PILAR ORÚS BÁGUENA

*Universidad Jaume-I, Castellón*

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE  
INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA  
Almería, Septiembre 2001



# ANÁLISIS DE DATOS E INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA. UNA APROXIMACIÓN DESDE LA TEORÍA DE SITUACIONES



PILAR ORÚS BÁGUENA

*Universidad Jaume-I, Castellón*

## RESUMEN

Esta ponencia contiene dos partes diferenciadas. La primera parte presenta algunos aspectos característicos de la utilización del análisis de datos en la teoría de situaciones. La segunda parte, analiza un ejemplo de funcionamiento del análisis de datos en situación escolar - la problemática y posibles soluciones propuestas desde la ingeniería didáctica y la Teoría de Situaciones -, mostrando a su vez utilizaciones diversas del análisis de datos en un mismo trabajo de investigación en didáctica de las matemáticas (Orús, 1986-2001).

## ABSTRACT

This report contains two differentiated parts. The first part presents some characteristic aspects of the use of the analysis of data in the theory of situations. The second part, analyzes an example of operation of the analysis of data in school situation -the problem and possible solutions proposals from the didactic engineering and the Theory of Situations -, showing diverse uses of the analysis of data in turn in oneself investigation work in didactics of the mathematics (Orús, 1986-2001).

## I -UTILIZACIÓN DEL ANÁLISIS DE DATOS EN LA TEORÍA DE SITUACIONES

### *I-1. La teoría de situaciones: historia de un proceso empírico de investigación*

Ya en los prolegómenos de la *Teoría de situaciones*<sup>1</sup> se puede observar, hasta que punto la teorización propuesta es el resultado de un proceso empírico, en el cual el análisis de datos ha sido siempre un factor básico de la metodología de elaboración y validación de la teoría.

Desde la primera publicación de Brousseau (1969) sobre las matemáticas del último curso de la escuela maternal y primer año de la escuela infantil, éste muestra su preocupación constante por la progresión en las adquisiciones de los conocimientos matemáticos de los alumnos y la problemática que suscita la observación de dicho proceso.

<sup>1</sup> Este apartado es un breve resumen extraído y traducido por la autora, de la tesis de Brousseau (1986) (pp. 4-10).

Deramecourt y Houziau<sup>2</sup> (1969), proceden a recoger las lecciones propuestas Brousseau, junto a la elaboración y utilización de las primeras fichas de observación de lecciones, 80 fichas que fueron utilizadas en 15 clases de la Dordogne francesa, con sus matrices de datos correspondientes (30x30), que permitían tener en cuenta diversas condiciones de dependencia que Brousseau proponía, tanto entre los diferentes conceptos ligados en lecciones sucesivas, como entre las formas de conocimiento bajo las cuales se presentaban estos conceptos. Para cada tipo de dependencia que se esperaba probar, una matriz indicaba todas las parejas de lecciones que se encontraban ligadas a priori y estas matrices a priori debían poder superponerse con la matriz de correlaciones observadas, para ver si los valores de los coeficientes de correlación para las parejas identificadas diferían de los otros valores a priori.

El DEA de Franchi-Zanetecchi<sup>3</sup> (1978) continua este trabajo sobre la construcción de secuencias de actividades para la enseñanza de las matemáticas, pero Brousseau abandona, este método de análisis global estadístico, demasiado costoso y que no le aporta los resultados esperados, sintiendo la necesidad de conocer mejor los procesos de enseñanza, para poder intentar responder a su pregunta inicial sobre el orden seguido en el proceso de adquisición de los conocimientos. Por todo ello, el siguiente trabajo que se planteó Brousseau fue la reforma de las propias lecciones observadas, y esto a su vez le condujo a replantearse los objetivos de la enseñanza de las matemáticas: es el origen de los *estudios sobre las motivaciones y el sentido*.

En 1972, en su artículo *Processus de mathématisation*, Brousseau propone por primera vez un marco teórico para analizar y observar las situaciones de enseñanza. Dicho marco debe permitir la búsqueda sistemática de las condiciones motivadoras para utilizar cada noción matemática, su ordenación y examen progresivo. Se trataba pues de concebir situaciones que cumplieren un máximo de exigencias sobre las motivaciones y a continuación mostrar que éstas son realizables en las clases y que provocan los aprendizajes esperados.

Muy pronto se pone en evidencia una nueva dificultad, en esta nueva línea de investigación: el proceso de elaboración de las lecciones es muy largo y complejo y se necesita un tiempo y un lugar adecuados para poder abordar este trabajo en condiciones. Surge el proyecto de *l'Ecole J. Michelet (Talence)*, como una escuela para la observación.

## *I-2. Una escuela para la observación de las actividades didácticas*

### *I-2.1. La escuela J. Michelet, un dispositivo experimental para la observación*

El COREM y la escuela J. Michelet constituyen el dispositivo experimental, propuesto y creado por Brousseau y colaboradores en 1972, que permite la elaboración y observación sistemática y sistemática de secuencias didácticas, y el análisis de los datos recogidos a partir de dichas observaciones. El objetivo básico de este complejo dispositivo creado en torno a la escuela Michelet, era permitir la preparación de los protocolos de experimentación de forma satisfactoria desde una doble aproximación pedagógica (de enseñanza) y científica (de investigación).

Brousseau identifica la metodología que permite realizar la escuela Michelet, como un “método espiral” en la investigación en DM. Según sus propias palabras<sup>4</sup> “cada realización y cada observación de lección son la ocasión de poner a prueba las concepciones teóricas y la tecnología didáctica que las acompañan, los métodos de estudio y de análisis, los resultados experimentales ya obtenidos y la formulación realizada por los

<sup>2</sup> Referencia bibliográfica completa en Brousseau (1986) (pp. 32).

<sup>3</sup> Referencia bibliográfica completa en Brousseau (1986) (pp. 32).

<sup>4</sup> *Ibid.* (pp. 18).

*maestros de las proposiciones de enseñanza*". La escuela Michelet marcará e identificará metodológicamente los trabajos de investigación, realizados en el marco de la Teoría de situaciones. El control del currículum de la escuela Michelet se realiza mediante diversos mecanismos complejos y complementarios, *la observación de las lecciones y la evaluación de la enseñanza* y ambos a diferentes niveles, y *los medios informáticos y estadísticos de tratamiento de datos*. Estos mecanismos han proporcionado la obtención y almacenamiento sistemáticos de datos que han sido y continúan siendo un material experimental sin precedentes para la investigación en DM.

· *La observación de las lecciones* se realiza por los enseñantes del nivel (3 profesores comparten dos grupos de alumnos del mismo nivel escolar) y de otros niveles, o por los investigadores.

La elaboración de los protocolos de experimentación y observación se realiza mediante las *fichas didácticas*<sup>5</sup>. Existen dos tipos diferentes de fichas: las de las lecciones llamadas "corrientes", elaborados en equipo entre los maestros y los PEN (Profesores de Escuela Normal) que garantizan la progresión matemática del nivel y las fichas elaboradas por los investigadores, propuestas y debatidas con el equipo docente del nivel. Pero todas las fichas de observación comprenden la misma información: las crónicas de la lección - desarrollo cronológico en relación con el tiempo de expresión verbal del profesor -, consigna exacta, tiempos de trabajo real de los alumnos, etc., relación de los comportamientos de los alumnos: diferentes intentos para resolver una pregunta, diferentes estrategias elaboradas, comentarios entre los alumnos al realizar las actividades, etc. El análisis de estas observaciones y los debates que se derivan de ellos permiten a los enseñantes tomar decisiones de orden pedagógico o didáctico y a los investigadores cimentar su investigación experimental y plantear los problemas de investigación teórica.

La observación en la escuela Michelet es el resultado del trabajo en equipo, siempre con un doble compromiso, el derivado de los problemas que plantea la enseñanza y los objetivos de la investigación fundamental. Contribuyen distintos grupos: *el didáctico, el de registro, el grupo crónica, el de evaluación y observación*. Al final de la lección, los trabajos de los alumnos son recogidos, así como las crónicas y las tablas de observación; todo ello se analiza conjuntamente en una mesa redonda posterior a la observación, en la que también participa el profesor observado. Es donde se determina si los objetivos planteados han sido alcanzados.

· *La evaluación de la enseñanza* se realiza mediante el análisis de los resultados de los alumnos respecto de conocimientos, en momentos diferentes de su proceso de adquisición: durante el proceso de aprendizaje y también al final de las secuencias de aprendizaje (controles periódicos, los CAS<sup>6</sup> y los TAS<sup>7</sup>) y el balance escolar de fin de curso donde se reúnen, durante 3 días, todos los miembros que intervienen en la escuela J. Michelet. Para analizar el balance del curso escolar.

Las *evaluaciones de los resultados en proceso de aprendizaje*<sup>8</sup> permiten, por una parte, tomar decisiones inmediatas y rápidas respecto a dicho proceso y por otra parte proporcionar material para los investigadores y estudiantes de DM. La evaluación aporta, por una parte, información sobre variables pedagógicas determinadas a priori y ya conocidas por el maestro y por otro lado, variables nuevas que hay que saber identificar. Para ello se trata de saber, por parte del profesor: qué resultados observa, qué informaciones obtiene y respecto a qué tipo de decisiones plantea la evaluación.

<sup>5</sup> Información extraída del curso impartido en Namur (1988) por G. Brousseau y D. Greslard (Directora y maestra de la escuela J. Michelet), y que contiene una información muy detallada y concreta de diversos aspectos relacionados con la regulación del currículum de la escuela Michelet. Particularmente interesante, el detalle y la concreción sobre las fichas didácticas y el tratamiento de los datos de evaluación de los alumnos.

<sup>6</sup> CAS: Controles de Adquisiciones Escolares, elaborados por los equipos de nivel y didáctico, de final de trimestre y de año.

<sup>7</sup> TAS: Tests de Adquisiciones Escolares, elaborados a nivel nacional en Francia y que permiten un contraste de los datos de la escuela J. Michelet con el resto de escuelas públicas francesas.

<sup>8</sup> Un ejemplo de este tipo de análisis y decisiones se encuentra en Brousseau, G. y Greslard, G. (Namur, 1988).

En *las jornadas de balance de fin de curso*, se utilizan todos los controles de evaluación así como las informaciones aportadas por los diferentes equipos que participan: los equipos pedagógicos de nivel, el equipo didáctico, los grupos de investigación que han intervenido ese curso, etc. Las informaciones aportadas por el tratamiento estadístico-informático de los datos recogidos deben servir para justificar las decisiones tomadas por los diferentes grupos –tanto las decisiones pedagógicas, como las relativas a la investigación- y también para poder identificar conjuntamente los aspectos que hayan podido escapar al control de cada grupo, así como para plantear nuevas cuestiones pedagógicas, didácticas, organizativas, curriculares, etc. Es el momento, tras estos debates, en el que los enseñantes formulan a menudo las peticiones de formación continua sobre los temas abordados (por ejemplo respecto a la geometría, o a la numeración, respecto a la teoría de situaciones, etc.).

· *Los medios informáticos y estadísticos de tratamiento de datos* que se utilizan y producen en la escuela J. Michelet, están en función de las necesidades de investigación en didáctica y las reflexiones sobre la enseñanza que los diversos equipos que conforman el COREM. Este sistema informático comprende los programas y las modificaciones específicas de éstos, que permitan adecuarlos a sus necesidades: la elaboración, recogida y el tratamiento estadístico de los datos.

La elaboración y almacenamiento sistemático de datos ha exigido, en primer lugar definir los datos, y posteriormente codificarlos (conjugando la confidencialidad y la posibilidad de identificación necesaria de los datos, junto a las necesidades técnicas informáticas y la facilidad de los enseñantes para poderlos informatizar). La definición de los datos ha exigido caracterizar así mismo, cada actividad matemática (en el tiempo, en la progresión, forma de la actividad, etc.) identificando para cada alumno los resultados, los comportamientos y las estrategias utilizadas.

Se realizan tratamientos estadísticos básicos sobre cada matriz de datos: por cada actividad (efectivos y porcentajes de aciertos, fracasos respecto a los efectivos de comportamientos satisfactorios, no satisfactorios, inesperados ...), por cada alumno (número de aciertos, de fracasos, en la medida en que los comportamientos son “comparables”, o “integrables”, elaboración de comportamientos nuevos, sus efectivos, etc.).

## I-2.2. La observación y la investigación

La observación y el estudio de las actividades didácticas realizadas en la escuela J. Michelet, ha exigido gran variedad tanto en el tipo de datos observados como en los métodos de análisis utilizados: siempre en función del tipo de datos y éstos a su vez, en función de la problemática planteada y de la investigación fundamental en cuyo marco se lleva a cabo la investigación.

· En “*L’observation des activités didactiques*”, uno de los primeros textos que trata esta problemática, Brousseau (1978) realiza un recorrido por los métodos importados de otras disciplinas próximas para describir los “hechos de observación” y plantea las bases de un método de modelización propio de investigación en DM, de la llamada teoría de situaciones didácticas, que posteriormente presentará en la tesis “*Théorisation des phénomènes d’enseignement des mathématiques*” (Brousseau, 1986).

En el primer artículo, se plantean tres preguntas iniciales -¿qué es un hecho didáctico?, ¿Por qué observar esos hechos?, ¿Cómo posibilitarlos?- cuyas respuestas pueden ser consideradas como pasos previos para poder abordar la observación: una primera delimitación del objeto de estudio, la aproximación al “rôle” de la observación en las investigaciones en didáctica y el estudio de las condiciones fundamentales de las relaciones entre los observadores y los hechos didácticos observados. Las respuestas a estas cuestiones constituyen “*las condiciones de la observación de los hechos didácticos*”. Brousseau distingue tres tipos de observación diferentes (tanto en sus fines como en sus métodos) sobre todo en función del

tema abordado: la *recogida sistemática de informaciones codificadas*, identificadas previamente en el marco de una posición teórica coherente y explícita; el *control didáctico y científico de las observaciones* cuyo objetivo fundamental es percibir lo esencial de los hechos observados, restaurando su significación y sentido; la *formación del investigador* y el *mantenimiento del paradigma investigador*, del sistema de referencia en el que se enmarcan las observaciones.

Los problemas de la observación en didáctica de las matemáticas, son planteados en una segunda parte, como problemas de adecuación de los medios a los objetivos y que por lo tanto resulta prácticamente imposible hablar de los medios independientemente de las investigaciones planteadas. Con esta misma dificultad nos encontramos en esta ponencia, y por ello no podemos detallar los diferentes tipos de observación que Brousseau plantea en función del método de recogida de datos, ni tampoco los *problemas de semiología* relativos a la determinación de los objetos de estudio. Solamente señalamos algunos de ellos: la interpretación de fenómenos a partir de procesos didácticos y el establecimiento de la pertinencia de determinados hechos a partir de las dependencias observadas; la obtención por procedimientos objetivos de los resultados de la observación; y la búsqueda de las condiciones óptimas para la observación, que Brousseau identifica con la búsqueda de la modelización teórica de los sistemas observados: los modelos de los alumnos, del maestro, del proyecto didáctico, del conocimiento matemático, de los procesos de aprendizaje. Todo ello determinará el carácter sistémico de las observaciones, permitiendo explicar los hechos producidos y los factores sobre los cuales se puede incidir para hacer surgir los cambios e incluso la optimización.

### *I-3. Variedad y especificidad de métodos de análisis de datos en la teoría de situaciones*

Presentado el momento inicial de “importación” de métodos desde otras disciplinas (Brousseau, 1978) y la adecuación y la adaptación para la DM propuestas por Brousseau (1986), citaremos algunos otros momentos significativos de este proceso.

· El estudio de la dependencia entre las actividades didácticas –como la mayor parte de los objetos de estudio de DM- exigió la construcción de una metodología estadística apropiada, que en este caso se basaba en la naturaleza disimétrica de los fenómenos de dependencia. El papel determinante que la disimetría juega en los procesos de la enseñanza y en la adquisición de los conocimientos, fue establecido por R. Gras (1979) en su tesis y los trabajos<sup>9</sup> de Vinrich (1977), D. Coquin (1982) y H. Londeix (1985) contribuyen en esta línea de investigación. La disimetría de las variables observadas, mostró la insuficiencia de los análisis multivariantes al uso, basados en el carácter simétrico de los índices de distancias y/o proximidades (ANAFAC, ACP, análisis jerárquico de similaridad, etc.) y la necesidad de un índice estadístico de “quasi-implicación”, que marcará el método implicativo.

La *clasificación jerárquica*, construida partir del índice de similaridad entre atributos o variables de Lerman (1981), muestra relaciones simétricas (de proximidad o distancia) entre estas variables o entre los sujetos que las verifican; mientras que la *clasificación implicativa*, se basa en un índice estadístico que expresa la noción de “casi-implicación” entre variables [Lerman, Gras, Rostam (1981)] y que mide esa intensidad de implicación, plasmándola en un grafo implicativo - y por tanto disimétrico -, imagen de la relación de preorden parcial que se establece entre las variables (o los sujetos). Las propiedades de esta intensidad de implicación comenzaron a ser estudiadas por Larher (1991) en su tesis; trabajos posteriores profundizaron en diversos aspectos de este método de análisis dando lugar a los trabajos de Gras y

<sup>9</sup> Referencia bibliográfica completa en Brousseau (1986) (pp. 34).

Larher (1992) y a las tesis de Larher (1992), Totahasina (1992), Bailleul (1994). A destacar la elaboración y utilización del *programa informático CHIC* (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) de tratamiento numérico y gráfico relativos a los métodos estadísticos clasificatorios e implicativos descritos anteriormente, recogidos en las tesis de Almouloud (1992), Ratsimba-Rajohn (1992) y posteriormente reformulado por Couturier (2000).

La originalidad de todos estos trabajos no reside solamente en la creación y el estudio de los índices estadísticos nuevos de tratamiento de datos, sino en su aplicación en el campo de la DM: por Ej. Larher en su tesis pudo poner en evidencia una tipología de errores que los alumnos cometían en situaciones de aprendizaje de la demostración matemática y mostrar una epistemología artificial de la inferencia, a partir del examen de las clasificaciones jerárquicas de las similitudes y de las implicaciones.

Estos métodos de análisis estadísticos, de *clasificación jerárquica* y *clasificación implicativa*, marcan los trabajos realizados fundamentalmente en el IREM e IRMAR de Rennes bajo la dirección y colaboración del profesor R. Gras. En la actualidad siguen siendo muy utilizados, tal y como se puede apreciar en las Actas de los dos coloquios celebrados en Caen (1995 y 2000).

Una de las más recientes reflexiones sobre la utilización del análisis de datos en la teoría de situaciones, se puede encontrar en las actas del Coloquio de Caen (1995) "*Méthodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en Didactique des Mathématiques*", en la comunicación "*L'analyse statistique des situations didactiques*" de Brousseau y Lacasta. A través de un ejemplo ilustran *la utilización de los métodos clásicos del análisis de datos* (conjetura, experiencia, resultados, estudio de factores, plan de experiencia, análisis multivariante, y test de contraste de hipótesis, etc.); se muestra así mismo *la necesidad del análisis de modelos explicativos* e ilustra la confrontación de diversos modelos con los comportamientos observados; por último *resitua algunas de las investigaciones precedentes* más significativas de la Teoría de Situaciones en este terreno, en un marco más amplio del análisis estadístico de las crónicas didácticas.

El *estudio experimental de una conjetura*<sup>10</sup> simple ("primitiva") formulada por el investigador, toma forma de confrontación entre observaciones de datos contingentes, obtenidos mediante un cuestionario sobre las concepciones de los alumnos, y el modelo teórico más o menos preciso y formalizado de la conjetura. El ejemplo analizado exige previamente a su experimentación, la determinación de los saberes matemáticos a observar, identificar los conocimientos correspondientes a esos saberes e imaginar dos clases de situaciones (las secuencias de observación) donde estos conocimientos puedan manifestarse mediante comportamientos observables. Una vez identificados éstos, se convierten en los caracteres que deben identificar a las cuestiones y debe guiar la elaboración del cuestionario y el plan de la experiencia: las cuestiones seleccionadas, los caracteres explicativos controlados ligados a las situaciones, y a los alumnos. Constituyen la matriz explicativa de control del cuestionario (incidiremos en este concepto en el siguiente párrafo). La estructura empírica de las observaciones, se pone de manifiesto en este artículo, mediante el análisis en componentes principales y el análisis factorial de correspondencias de la contingencia y para la presentación de resultados se utilizan los porcentajes de éxito de cada pregunta, el número de éxitos por ocasión de respuesta (según un criterio del cuestionario), la aplicación del test de homogeneidad (Test de Student) para analizar las diferencias entre los éxitos de las respuestas, en función de dicho criterio.

Respecto a la utilización del *método de análisis factorial de correspondencias*<sup>11</sup>, Brousseau había señalado ya en 1985 y 1986, que se pueden encontrar relaciones bien establecidas entre los resultados y comportamientos de los alumnos –mediante experimentaciones convincentes y con resultados interesantes a nivel local– pero que presentan a veces dificultades interpretativas ya que puede resultar difícil dis-

<sup>10</sup> Brousseau y Lacasta (1995) (pp. 53-78)

<sup>11</sup> Bastante utilizado en la didáctica francesa; en esta línea se pueden situar los trabajos de F. Pluvinage (1977) y del IREM de Estrasburgo, entre otros.

tinguir las relaciones ya introducidas a priori por los caracteres del cuestionario y las relativas al comportamiento de los alumnos. Brousseau<sup>12</sup> proponiendo un método de control de esos fenómenos que consiste en el establecimiento de las matrices a priori de los cuestionarios con caracteres explicativos de las cuestiones y realizar los análisis de dicha matriz explicativa: el análisis factorial de correspondencias, y el análisis en componentes principales. Esta propuesta ha marcado gran parte de los análisis de datos realizados en el marco de la teoría de situaciones. En las actas del citado Coloquio de Caen (1995) podemos encontrar también el trabajo de Batanero, Estepa y Godino, relacionado con este tema.

Un ejemplo de esta *confrontación entre las variables explicativas y la contingencia*, se puede encontrar en otra de las partes de la comunicación de Brousseau y Lacasta (1995): muestra cual es el valor de las variables explicativas en un espacio contingente: permite identificar variables explicativas de los datos observados (habiendo estado determinadas a priori como tales), permite construir una variable explicativa contingente, analiza el valor explicativo de las variables suplementarias y de las observaciones suplementarias, así como las precauciones para determinar ese valor explicativo sea de una variable activa o suplementaria y cuando se obtienen de la contingencia otras variables no activas a priori. También muestra cómo el análisis de los datos de las matrices suplementarias (variables y observaciones) permiten verificar la calidad de la experiencia a realizar con relación a las explicaciones esperadas, ayudando a mejorarla y a preparar su interpretación posterior.<sup>13</sup>

## II- EL ANÁLISIS DE DATOS EN SITUACIÓN ESCOLAR: PROBLEMAS Y SOLUCIONES DESDE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA Y LA TEORÍA DE SITUACIONES

La mayor parte de las investigaciones elaboradas en el marco de la teoría de situaciones presentan ejemplos de la utilización de esta diversidad de métodos de análisis de datos expuesta anteriormente, en esta segunda parte vamos a presentar, una de estas investigaciones que por el contenido de la familia de situaciones didácticas propuestas –la clasificación y el análisis de datos en la enseñanza obligatoria –, nos permite abordar el tema de la ponencia, desde diversos aspectos.

### *II-1. El análisis de datos: de un problema pedagógico a un problema didáctico*

Nuestro trabajo tiene su origen en las dificultades de un maestra de CM2 (10-11 años), tras un salida escolar al bosque. Los alumnos habían recogido hojas y plantas y comparándolas querían “clasificarlas”. Se trataba solamente, para ellos, de conjugar caracteres simples.

El enseñante esperaba poder definir algunos criterios usuales en las plantas (“nervios paralelos”, “nervios ramificados”, dic.), proponer un esbozo de clasificación de las plantas según el sistema de reproducción (plantas con flor, etc.) e introducir algunos términos propios a las clasificaciones (clases, subclases, especies, etc.).

Los desacuerdos, las incertidumbres y las preguntas de los alumnos sobre la elección de los criterios, del objetivo de la clasificación y de los métodos para obtenerla, han producido las dificultades del enseñante y han justificado el inicio de nuestro trabajo sobre la clasificación (Orús, 1986).

<sup>12</sup> Brousseau [(1986), pp. 391-398, (1995), pp. 62-78].

<sup>13</sup> Una primera aproximación a la utilización del espacio explicativo en el análisis de datos en DM, aparece en la tesis de Brousseau (1986) (pp. 391-398): “*Méthode de contrôle de l'analyse factorielle des correspondances par l'analyse de l'espace explicative*”.

La aproximación al problema, desde el marco de la Teoría de Situaciones (Brousseau, 1986) plantea, como método de investigación, la necesidad de buscar en la naturaleza matemática de los contenidos la dificultad de este proceso así como sus posibles soluciones. En consecuencia, la búsqueda de una situación fundamental que dé un sentido a la clasificación en la escuela elemental (CM-2), ha conducido, a profundizar en el estudio de los objetivos y métodos de la clasificación (análisis clasificatorio), y todo este proceso ha permitido ampliar nuestra problemática pedagógica inicial, y sumergirla en una problemática didáctica mucho más amplia: la gestión del razonamiento personal de los alumnos en la relación didáctica.

La dificultad abordada en profundidad en la tesis (Orús 1992) es la gestión del razonamiento natural de los alumnos en la relación didáctica, que caracterizaremos como una situación paradójica en la cual el enseñante carece de medios para poderla abordar, siendo intrínseca a la enseñanza misma de las matemáticas y no identificable a un único concepto matemático. Una vez establecido que este RN de los alumnos es solicitado por los enseñantes de diferentes maneras, en la relación didáctica, pero que el contrato didáctico impide habitualmente que éste RN sea un objeto de enseñanza, se ha procedido a realizar el estudio de la posibilidad de mejorar el razonamiento natural (RN) de los alumnos por una iniciación al análisis clasificatorio.

## *II-2. El análisis de datos: instrumento de negociación didáctica para el profesor y objeto transaccional para el razonamiento de los alumnos*

Si se trata de un problema de contrato didáctico, es necesario actuar sobre él, modificarlo. Nuestra propuesta consiste en actuar sobre la práctica de los profesores mediante la “ingeniería didáctica” (en el sentido de Brousseau: mediante la búsqueda de las condiciones / variables que permiten modelizar y desarrollar los conocimientos de los alumnos): propone una familia de lecciones y situaciones que permitan actuar sobre el sentido de las adquisiciones de los alumnos y que estas situaciones conduzcan a una negociación del estatus de los conocimientos espontáneos de los alumnos.

Hemos continuado la investigación de un acceso diferente de los niños a la lógica, trabajo ya comenzado por Digneau (1980), Maudet (1982) y los diversos trabajos de J. Peres<sup>14</sup> (1979-1985-1989) en el COREM de l'Université de Bordeaux-I. Ellos han estudiado el funcionamiento a-didáctico de la adquisición de diferentes conceptos de la lógica; nuestro trabajo continua estudiando la gestión didáctica de esta adquisición y los posibles obstáculos que el pensamiento natural del niño puede presentar en este proceso.

Para desarrollar esta ingeniería, hemos tenido necesidad de hacer “aparecer” este P.N. ofreciéndole un espacio en situación escolar, permitiendo su modo de funcionamiento: vamos a modelizar ese P.N. de los alumnos mediante el funcionamiento de la agregación de datos (el análisis clasificatorio o tipológico). Además las tablas de datos que utiliza el análisis tipológico, permiten representar de la misma manera, con un mismo instrumento, este P.N. utilizado por los alumnos y los profesores, y la lógica formal utilizada en las matemáticas, ofreciendo a su vez un campo común sobre el que se pueden distinguir, según su funcionamiento. Es decir las tablas de datos, van a ser el medio común de representar diferentes tipos de razonamiento (el P.N. la clasificación, la lógica, los juicios y argumentaciones, etc.), con reglas de manipulación diversas, pero actuando sobre las mismas tablas. (Ver Tabla-I, en Anexo-1).

Con las tablas, el alumno va a poder reconocer formalmente ciertas operaciones, ciertos juicios y argumentaciones que él realiza espontáneamente. Va a poder dar un estatus a los enunciados propuestos y discutirlos con los demás. También va a poder percibir la diferencia entre su

<sup>14</sup> Referencias bibliográficas completas en Brousseau (1986) (pp. 32-34).

P.N. y lo que se le pide aplicar como razonamiento lógico, en este sentido, la tabla funciona como un objeto transaccional<sup>15</sup> (Winnicott, 1971). Va a poder clasificar y comparar sus clasificaciones con otras clasificaciones ya existentes.

En definitiva, el análisis tipológico ha sido utilizado como una metáfora general en la ingeniería didáctica: es un instrumento que para el alumno tiene un carácter metafórico de referencia y para el enseñante es un medio de negociación didáctica con los alumnos, sobre su razonamiento espontáneo creándole así un espacio en la enseñanza.

Las situaciones de estudio que hemos propuesto ilustran el uso extremadamente difundido de la agregación de datos: *la clasificación de plantas*, es ciertamente una de las más utilizada y la toma de decisión en función de los gustos y de las elecciones personales, nos ha parecido también muy interesante y lo hemos abordado en dos aspectos, el aspecto semántico con el *Juego del viaje* y el aspecto formal con el *Juego de coalición*, que simula los modos de toma de decisión en una sociedad democrática.

En este artículo no abordaremos ni el carácter global de la solución didáctica planteada, ni el papel que juega el instrumento matemático elegido en esta solución, el análisis tipológico; estos temas ya han sido realizados y presentados en trabajos anteriores que pueden ser consultados (Orús, 1986, 1992, 1993, 2001).

### II-3. *El análisis de datos, un instrumento de decisión en la investigación en DM*

El *Juego del viaje* constituye la situación fundamental del conjunto de situaciones propuestas: es la construcción guiada de una jerarquía (sobre un conjunto de alumnos según sus gustos sobre las vacaciones), seguida de debates y reflexiones, generalmente de naturaleza lógica (implicaciones, clasificaciones, etc.). Pero fundamentalmente el Juego del viaje, supone evidenciar las reglas del juego de la clasificación que funcionarán en las diversas situaciones didácticas propuestas.

La situación elegida simula el funcionamiento de una agencia de viajes, que busca diferentes propuestas que realizar a sus clientes; es decir viajes con características diferentes – lugares y actividades que puedan realizarse- que les permitirán satisfacer los gustos diversos de sus clientes. Los alumnos juegan un doble juego: clientes potenciales y agentes de viaje. Como clientes, será necesario conocer sus gustos y por lo tanto elegir características de los lugares y actividades. Las cuestiones elegidas por los alumnos articulan un cuestionario que también debe ser contestado por cada alumno, con respuestas si-no. Como agentes de viaje, los alumnos deben organizar viajes teniendo en cuenta estos datos y las consignas propuestas.

#### II-3.1. *La clasificación jerárquica en el estudio a priori de las situaciones didácticas*

El conjunto de las situaciones didácticas propone hacer funcionar, a nivel de la acción<sup>16</sup> las tres primeras etapas del análisis tipológico, es decir: la recogida de datos que describen los sujetos u objetos mediante varias características o criterios, y que se representan en una tabla de doble entrada (o matriz); el cálculo de proximidades (o distancias) entre los pares de sujetos (u objetos), teniendo en cuenta los criterios de cada par comparado; y la construcción de grupos, si bien en cada una de las situaciones se dan ligeras variaciones, en las etapas a franquear

<sup>15</sup>. Objeto transicional: “Objeto intermediario entre la realidad interna propia del individuo y el medio exterior, un objeto que permite el paso a la objetividad”.

<sup>16</sup> Para la noción de *situación fundamental* y para la distinción entre los tipos de *situaciones a-didácticas* propuestas por BROUSSEAU: acción, formulación, y validación, ver (Brousseau, 1986).

En el Juego del viaje,<sup>17</sup> también está prevista una variante de la situación que incluye las etapas 4ª y 5ª - las etapas de representación interpretación y validación de las clasificaciones obtenidas - proponiendo a los alumnos, para su reconocimiento: e interpretación, la clasificación jerárquica realizada por el ordenador (utilizando el programa estadístico CHIC) a partir de los mismos datos con que los alumnos habían manipulado en las etapas anteriores del juego. El programa informático es utilizado, como un medio de ayuda en la decisión que deben tomar en el juego; un medio del que solo conocen el efecto que produce y esa producción –el árbol de la clasificación de los datos- puede ayudarles a tomar una decisión, con la información aportada, si ésta solución propuesta se adecua a las necesidades del problema planteado inicialmente, y en caso contrario, simplemente se rechaza este medio. En ambos casos es una ayuda en la interpretación de los datos, y permite una buena aproximación de la 5ª y última etapa del análisis tipológico: la validación de los resultados de la clasificación, en función del problema propuesto.

En Orús (2000)<sup>18</sup> se muestra más detalladamente la utilización a priori del método de análisis de las similitudes (mediante el índice de Lerman y el programa CHIC) y de los árboles de clasificación propuestos - tanto de los criterios del viaje como de los alumnos -, que ofrecen al profesor (y/o al investigador) informaciones y medios para tratar los datos objeto de la lección, proporcionándole una ayuda en la toma de decisiones –también al propio profesor -, en este caso decisiones didácticas respecto a las variables de las situaciones a proponer a los alumnos.

En la “Clasificación de plantas” las etapas 4ª y 5ª, son propuestas a los alumnos para su reconocimiento: a partir de la comparación de varios tipos de clasificaciones - las que los niños han hecho y dos clasificaciones botánicas ya existentes - se propone el análisis de las diferentes representaciones y su interpretación, y un inicio de validación pueda ser realizado.

### II-3.2. *El análisis implicativo y la ingeniería didáctica*

El árbol de la clasificación jerárquica (de similitudes) de los criterios del Juego del viaje, mostraba dos ramas diferenciadas que podían caracterizarse como los Viajes A y B respectivamente, caracterizados cada uno de ellos con los criterios agregados en cada una de las clases (ramas). Esta clasificación, permite analizar varias soluciones posibles para el Juego del viaje (“*Buscar el viaje más satisfactorio para el mayor número de alumnos posible*”) (Anexos 2 y 3).

El análisis implicativo permite profundizar un poco más en estas soluciones: analizando tanto el árbol jerárquico implicativo como los grafos implicativos entre los criterios del viaje<sup>19</sup> se obtienen informaciones que pueden contribuir de forma decisiva en la preparación de la ingeniería didáctica de las situaciones.

El análisis del árbol jerárquico implicativo muestra los diferentes niveles de agregación de las clases implicativas, que a su vez muestran las parejas de criterios que presentan una cohesión implicativa maximal (Anexo-4). Cruzando esta información con otras informaciones sobre estas parejas (Qi, Qj) de cuestiones, como su implicación semántica, y la frecuencia del producto booleano o conjunción lógica de “Qi” y “noQj”, se obtiene una caracterización de los criterios del viaje, en función de su implicación semántica, lógica y estadística. Tras estos análisis, el Viaje B aparece más rico para las situaciones planteadas, desde el punto de vista didáctico, pues ofrece clases (o paquetes) de criterios (o cuestiones) que se implican estadísticamente entre ellas – es decir, se implican por la contingencia, por los efectivos es-

<sup>17</sup> “El Juego de la agencia de viajes” es la *situación fundamental* que modeliza el conjunto de las situaciones didácticas propuestas.

<sup>18</sup> (Orús, 2000) pp. 89-91.

<sup>19</sup> Ibid. Pp. 92-97

tudiados, que en este caso son los alumnos y sus respuestas al cuestionario- y cuya implicación lógica y semántica no están siempre garantizadas (siempre según los datos) (Anexo-5).

## CONCLUSIÓN

A modo de conclusión, querríamos terminar, resaltando y resumiendo algunas cuestiones metodológicas expuestas en esta ponencia, sobre la utilización del análisis de datos, planteadas desde la Teoría de Situaciones.

- El carácter espiral de esta metodología de investigación: La elaboración de los datos y el posterior tratamiento de la información, obtenidos de la observación de hechos didácticos en situación escolar, define una metodología propia de investigación en DM que juega frecuentemente un “rôle” fenomenotécnico, de continuo cuestionamiento de las conjeturas iniciales y de los elementos teóricos de la modelización de la propia teoría de situaciones.

- La necesidad de realizar sólidos análisis a priori de los protocolos destinados a la obtención de datos (cuestionarios, fichas de observación, etc.) que se confrontarán con los resultados, para evitar la fuerte tendencia general de lectura empirista de los datos.

- La utilización generalizada de métodos de análisis estadísticos multidimensionales de datos - análisis factorial de correspondencias, análisis en componentes principales, clasificación y análisis jerárquico, y análisis implicativo- que permiten análisis cualitativos y no solo cuantitativos de los datos.

- Y por último resaltar la necesidad de concentrarse en las situaciones: el estudio y modelización de los conocimientos matemáticos en juego a través de la elaboración de las situaciones didácticas adecuadas, mediante la identificación y control de las variables que definen la situación, y la observación de estas situaciones elaboradas en un marco de ingeniería didáctica, o de secuencias didácticas más tradicionales, pero de las que se haya realizado a priori, la búsqueda de las variables didácticas, que permitan realizar una observación sistemática. Sólo en ese contexto cobra sentido y puede ser comprendido el análisis de datos que se realiza en el marco de la Teoría de Situaciones.

## REFERENCIAS

- Brousseau, G. (1969). *Mathématiques du cours préparatoire et école maternelle grande section*. Paris : Dunod.
- Brousseau, G. (1978). L'observation des activités didactiques. *La Revue Française de Pédagogie*, nº 45.
- Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. Thèse d'Etat, Université de Bordeaux-I . Talence : IREM de Bordeaux.
- Brousseau, G.; y Greslard, D. (1988). *La régulation d'un curriculum : problèmes pratiques et théoriques*. Curso impartido en Namur. Talence: IREM de Bordeaux.
- Brousseau, G.; y Lacasta, E. (1995). L'Analyse statistique des situations didactiques. *Actes du Colloque Méthodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en didactique des mathématiques*. (pp. 53-88), Caen. Rennes: Université de Rennes-I.
- Chandon, J.L., y Pinson, S. (1981). *Analyse typologique. Théories et applications*. Paris: Masson.
- Gras, R. (1979). *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et des certaines objectives didactiques en mathématiques*. Thèse d'état. Rennes : Université de Rennes.
- Gras, R. (1980) “*Deux méthodes d'analyse des données didactiques: Classification implicative et classification hiérarchique – application à une situation réelle*”. Rennes : IREM de Rennes.

- Gras, R. (1992). L'analyse des données : une méthodologie de traitement des questions de didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12( 1), (pp. 59-72)
- Gras, R. y cols. (1994). La méthode de l'analyse implicitive en didactique. Applications. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 349-364). Grenoble : La pensée Sauvage éditions.
- Gras, R. y cols. (1996). *L'Implication Statistique*. Collection Associée à « Recherches en Didactique des Mathématiques ». Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Gras, R. (2000). Les fondements de l'analyse statistique implicitive *Actes des La fouille dans les données par la méthode d'analyse statistique implicitive*. Caen 2000, (pp. 11-32). Rennes: Université de Rennes-I.
- Groupe de Recherche sur l'Enseignement Elementaire (1975). *Les Observations et les Tables Rondes*. Talence : Coll. L'analyse de la didactique des mathématiques. IREM de Bordeaux
- Lerman, I.C. (1970). *Les Bases de la Classification Automatique*. Paris: Gauthiers Villars.
- Lerman, I.C. (1981). *Classification et analyse ordinale des données*. Paris : Dunod.
- Lerman, I.C. (1995). Rôle de l'Inférence Statistique dans une Approche de l'Analyse classificatoire des données. *Actes du Colloque Méthodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en didactique des mathématiques*. (pp. 109-117) Caen. Rennes: Université de Rennes-I.
- Lerman, I.C.; Gras, R.; y Rostam, H. (1981). Élaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires (I et II). *Mathématiques et Sciences Humaines* n° 74, pp. 5-33 et n° 75, pp. 5-47.
- Orús, P. (1986a). *Informe sobre la escuela J. Michelet*. Memoria de la estancia en el COREM de l'Universitat de Bordeaux-I, financiada por la Conselleria d'Educació i Ciència de la Generalitat Valenciana.
- Orús, P. (1986b). *L'enseignement des méthodes de classification. Proposition d'une ingénierie pour le cours moyen*. Coll. Études en Didactiques des Mathématiques. Bordeaux : IREM de l' Université de Bordeaux-I.
- Orús, P. (1992). *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique; effets d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire*. Thèse présentée à l'Université de Bordeaux-I. Bordeaux : IREM de Bordeaux.
- Orús, P. (1993) La utilización de un concepto matemático - el análisis tipológico- como útil didáctico en la escolaridad obligatoria. *Revista Internacional de Enseñanza de las Ciencias*. Bellaterra.
- Orús, P. (2000). Utilisation didactique des tableaux des données y du logiciel "CHIC" à l'école élémentaire. *Actes des Journées sur La fouille dans les données par la méthode d'analyse statistique implicitive*. Caen, Junio 2000 (pp. 85- 98). Nantes: Ecole Polytechnique de l'Université de Nantes..
- Orús, P. (2001) Classification et didactique, *Bulletin de la Société Francophone de Classification*, n° 14, Paris: Société Francophone de Classification.
- Orús, P.; y Greslard, D. (1994). L'interaction sociale et la situation a-didactique dans la gestion du raisonnement naturel dans la relation didactique. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 268-275) . Grenoble : La pensée Sauvage éditions.
- Wermus, H. (1976). Essai de représentation de certaines activités cognitives à l'aide des prédicats avec composantes contextuelles. *Archives de Psychologie*, Genève, 44, n°171, pp. 205-221.

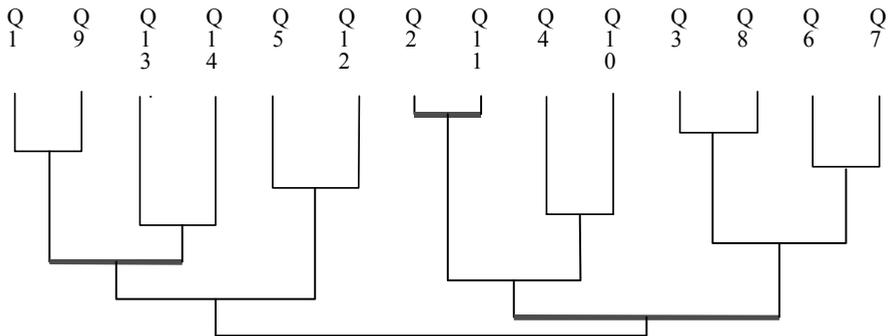
ANEXOS

Anexo-1

Aimes-tu ...	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1. aller dans un musée?	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
2. aller à des compétiens sport.?	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
3. faire du tennis?	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
4. te baigner?	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
5. les croisières dans le Pacifique?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
6. aller en Espagne ap. l'espagnol?	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
7. les montagnes?	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8. les marches en montagne	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
9. avoir des visites guidées?	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1
10.goûter les spécialités d'un pays?	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
11. faire du foot-ball?	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
12. faire du vélo?	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
13. aller en Italie visiter des musés?	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14. séjourner château Renaissance?	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabla-1. Tabla del Juego del Viaje, de CM2A de l'école J. Michelet (Talence)

Anexo-2



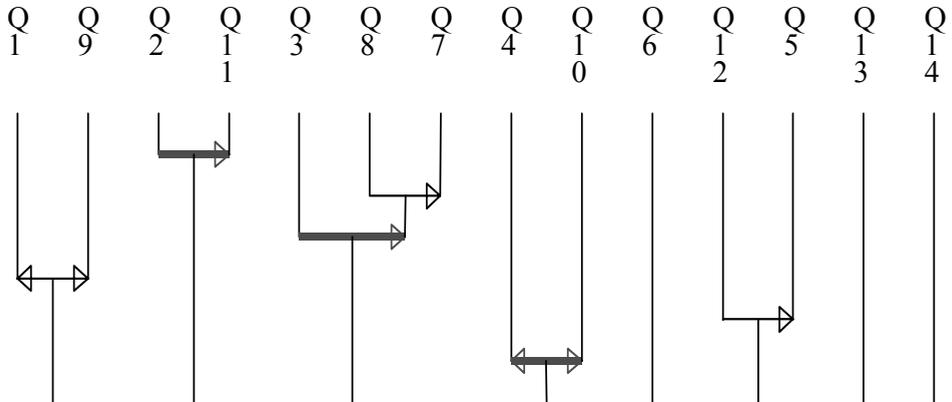
Arbol-IQ. Análisis de similitud de las cuestiones, sobre la matriz de datos de la Tabla-I

Anexo-3

	VOYAGE A						VOYAGE B							
	mus	visit	Italie	châte	Crois	velo	sport	foot-	baige	speci	tennis	march	espag	mont
	Q1	Q9	Q13	Q14	Q5	Q12	Q2	Q11	Q4	Q10	Q3	Q8	Q6	Q7
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
3	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
4	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1
5	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
6	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
7	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
10	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
11	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
13	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
14	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
17	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
20	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
22	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
23	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
24	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
ocurr	16	16	21	20	22	20	16	18	21	21	15	17	18	19

Tabla-2 : Reorganizacion de la Tabla-1, a partir del Arbol-1Q de similaridad

Anexo- 4



Arbre-2Q: Arbre hiérarchique (selon la théorie classique)

Anexo-5

NIVELES DE AGRÉGACION DE CLASES IMPLICATIVAS	CLASES DE COHESION MAXIMAL (PAREJAS DE CUESTIONES)	$N(Q_i \bullet \bar{Q}_j)$
1*	Q2 $\Rightarrow$ Q11 spor $\rightarrow$ foot	CERO
2	Q8 $\rightarrow$ Q7 marc $\rightarrow$ mont	UNO
3	Q3 $\rightarrow$ Q8 ten $\rightarrow$ marc	UNO
4*	Q3 $\rightarrow$ Q7 ten $\rightarrow$ mont	UNO
5	Q1 $\leftrightarrow$ Q9 mus $\leftrightarrow$ visi	TRES
6	Q12 $\Rightarrow$ Q5 velo $\rightarrow$ croi	CERO
7*	Q4 $\leftrightarrow$ Q10 bai $\leftrightarrow$ spéc	UNO

Tabla-3: Cuestiones con cohesión implicativa maximal, segun el árbol jerárquico 2Q

\* : Indica un nivel significativo

$Q_i \Rightarrow Q_j$ : Indica cohesión implicativa e implicación lógica [ $N(Q_i \bullet \bar{Q}_j) = 0$ ], entre les questions  $Q_i, Q_j$ .

$Q_i \rightarrow Q_j$ : Indica cohesión implicativa entre las cuestiones  $Q_i, Q_j$ .