Pardo, T. y Gómez, B. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos: un estudio en el nivel universitario. *PNA*, *2*(1).

Pochulu, M. y Rodríguez M. (2012). *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Buenos Aires, Argentina: Eduvim.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ciudad México: Editorial Trillas.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. España. Editorial Comares.

Rubinstein, J. (1967). Principios de Psicología General. Edición Revolucionaria. Cuba.

Schlarmann, K. (2013), Conceptual Understanding In Linear Algebra - Reconstruction Of Mathematics Students' Mental Structures Of The Concept 'Basis'. En *Proceedings of the VIII CERME*. Antalya, Turquía.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problems Solving*. Academic Press.

Schoenfeld, A. (1987). A brief and biased history of problem solving. In: F. R. Curcio (Ed.) *Teaching and Learning: A problem Solving Focus*. Reston, VA: NCTM.

Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1).

Sigarreta, J. y Palacio, J. (2000). La contextualización de los problemas matemáticos. *En Revista Matemática y Educación*. Editorial Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.

Sigarreta, J., Rodríguez, J. y Ruesga, P. (2006). La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *13*(1).

Sriraman, B. y Engish, L. (2010). *Theories of Mathematics Education*. New York: Springer.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2).

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2).

Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1980, August). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In *Proceedings of the fourth international conference for the psychology of mathematics education*.

Vygotsky, L. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. México: Grijalbo.

Vygotsky, L. S. (1995). *Pensamiento y lenguaje*.. A. Kozulin (Ed.). Buenos Aires: Paidós.

Yan, Y., Jin, D., Li, Y., Zhao, H. y Li, X. (2011). Application of Simple Examples in Experiment Teaching about Complex Function and Integral Transform. In *International Conference on Information Computing and Applications*. Springer Berlin Heidelberg.

EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMATICO A TRAVES DE LA HEURISTICA DE LAKATOS EN LA CONSTRUCCION DE DEMOSTRACIONES Y EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE LA MATEMÁTICA DISCRETA

JADER WILSON CORTES AMAYA
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.
shalom7_43@hotmail.com

MARY FALK DE LOSADA
Directora de tesis
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
rectoria.uan@gmail.com

Resumen

El presente estudio tuvo como objetivo analizar el impacto que genera el método heurístico de Lakatos en la educación matemática. Concretamente, se obtuvieron resultados importantes al considerar dicha heurística junto con la resolución de problemas retadores como metodología en un curso de matemáticas discretas para estudiantes de ingeniería de sistemas y licenciatura en matemáticas. Se lograron resultados en cuanto a la implicación de la heurística en el desarrollo del pensamiento matemático, en la actitud del estudiante, en la construcción de demostraciones matemáticas y como herramienta eficaz para la resolución de problemas.

Por otra parte, la investigación permitió aportar, en el contexto de la educación matemática, al importante debate acerca de si las matemáticas es resolver problemas o demostrar teoremas que considera tanto la postura filosófica de Celucci acerca de la naturaleza de la matemática y la postura científica de Gowers acerca de las dos culturas inmersas en matemáticas, la que prioriza la resolución de problemas y la que privilegia la construcción de teoría, y con ello aclarar el papel que desempeñan y cómo se interrelacionan el entendimiento de teoría, la construcción de demostraciones matemáticas y la resolución de problemas singulares en el ámbito de la educación matemática.

Abstract

This study had as objective analyzing the impact that causes the Lakatos heuristic method in the math education. Specifically, it offered important results when considering this heuristic with the resolution of challenging problems as the methodology used in discrete math for system engineering students and math degree.

Results were achieved about the implication of the heuristic on the development of mathematical thoughts, on the student's attitude, on the construction of mathematical demonstrations and as an effective tool to solve problems.

On the other hand, the study provided, in the mathematical education context, to the important debate about if math is solving problems or demonstrating theorems that consider the philosophical posture of Cellucci about the math nature and the scientific posture of Gowers about the two engaged cultures in math, the one that prioritizes the resolution of problems and the one that favors the theoretical construction, and with that clarify the role that they play and how they relate to the understanding of the theory, the construction of mathematical demonstrations and the resolution of singular problems in the field of mathematical education.

INTRODUCCIÓN

En la presente investigación se consideran centrales las teorías e investigaciones que colocan la resolución de problemas como factor importante dentro del quehacer del matemático, asignando un papel subordinado a aspectos más memorísticos o mecánicos que tradicionalmente han dominado en el salón de clase, considerando que éstos se deben abordar y aprender en el contexto de la resolución de problemas y no como fines en sí mismos. Por ejemplo, el algoritmo de la adición por sí solo puede ser efectuado por una calculadora o computador sin mayor esfuerzo del usuario, pero en el proceso de solución de problemas retadores e interesantes puede suceder que no sólo se ejercita el algoritmo, sino que se buscan y obtienen otros beneficios como analizar, generar estrategias, motivar a pensar, y por ende desarrollar el pensamiento matemático.

Por otra parte, se considera el papel de la demostración en el aprendizaje de la matemática. Se ha evidenciado la gran dificultad que acarrea llevar un proceso de demostración en los estudiantes que aprenden matemáticas; esta dificultad se debe no sólo a la complejidad implícita del proceso sino también a la manera como está constituido el currículo y como el docente aborda la situación de enseñanza. Balacheff afirma al respecto: "¿Cómo se enseña la demostración? Generalmente se hacen demostraciones delante de los estudiantes y luego se les pide hacer lo mismo."[19]

La presente investigación relaciona estos dos aspectos, la resolución de problemas y la demostración, relación que se logra a través de la teoría propuesta por Lakatos, el método heurístico descrito en su obra *Pruebas y refutaciones*. Se resalta la manera en que Lakatos hace notar la forma cómo se construye, se justifica y evoluciona la matemática. Es evidente que su obra tiene implicaciones didácticas; son estas implicaciones las que motivan al autor de esta tesis hacia una investigación que tiene como objetivo analizar la influencia que tiene el método de pruebas y refutaciones sobre el desarrollo del pensamiento matemático, la resolución de problemas y la construcción de demostraciones formales. La investigación se llevará a cabo con estudiantes de licenciatura en matemáticas que se encuentran entre el sexto y octavo semestre y otros estudiantes inscritos en un curso de matemáticas discretas, y para ello se desarrollará un curso completo con un diseño preciso.

Dos aspectos importantes a tener en cuenta en la investigación son el análisis de la relación entre resolución de problemas, el método de pruebas y refutaciones, y el desarrollo del pensamiento matemático, por una parte, y el análisis de la influencia del método de Lakatos en la construcción de una demostración.

La tesis está estructurada de la siguiente manera: una introducción, un capítulo 1. Estado del arte, un capítulo 2. Marco teórico, un capítulo 3. Modelación y diseño de actividades, un capítulo 4. Análisis y valoración de los resultados, Conclusiones, Recomendaciones, Bibliografía y referencias y Anexos

Justificación

"Existe evidencia en la literatura de educación matemática que el método de pruebas y refutaciones de Lakatos puede ser útil para examinar la producción de conjeturas de los estudiantes y los procesos de construcción de la demostración"[20]. Atkins (1997) por otra parte afirma que el método de pruebas y refutaciones proporciona una estrategia motivadora para involucrar a los estudiantes en la solución de problemas creando un ambiente en el cual los estudiantes razonan matemáticamente, comunican matemáticamente, y hacen conexiones matemáticas[21].

Godino (1997) afirma que "el interés por la enseñanza de la demostración parece justificado por el papel esencial de los procesos de validación en la propia matemática, y el bajo nivel que muestran los estudiantes en la comprensión y elaboración de demostraciones". Desde la experiencia del autor de la presente tesis, tanto en la etapa de estudiante como la de docente de matemáticas, se considera que la construcción de una demostración es una de las tareas más difíciles de llevar a cabo y que esto se debe en buena parte a los procesos cognitivos involucrados, como es el de generalizar y el de abstraer, los cuales considera Tall (1991) pertenecen al pensamiento matemático avanzado.

Varios autores declaran la importancia de vincular la demostración matemática en el currículo, (Balacheff, 1987; Hanna, 2000; Godino, 1997), y el tema sigue siendo de actual importancia en la comunidad de educación matemática. Por ejemplo, se ha abordado en importantes eventos y congresos, tal como en el reciente Estudio ICMI (2009) cuya conferencia tuvo lugar en la ciudad de Taipen (Taiwán) y cuyo título es "*Proof and Proving in Mathematics Education*". La apreciación del propósito o función de la demostración en el aula de clase difiere entre distintos autores. Gila Hanna es enfática en el rol que desempeña la demostración como un vehículo que promueve la comprensión matemática en los estudiantes. Nicolás Balacheff por otra parte se centra en la demostración como un tema esencial y especifico de la matemática y asegura que la mayoría de estudiantes fracasa en la construcción de una demostración. Por otro lado, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) en su publicación *Principles and Standards for School Mathematics* reconoce el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas, allí se afirma que desde muy temprana edad los estudiantes deben entender la importancia de justificar cualquier afirmación matemática además de discernir qué argumentos son adecuados y aceptados desde un punto de vista científico.

Es importante resaltar algunos aspectos claves sobre la enseñanza de la demostración. El primero es que existe una preocupación de la comunidad científica en investigar más profundamente el tema. Hanna (2007) argumenta que el rol de la demostración a nivel secundario está perdiendo su importancia y por consiguiente es necesario encontrar diferentes maneras de ayudar a los estudiantes a mejorar sus habilidades y la comprensión que ellos necesitan. En vía contraria a Hanna, hay un acuerdo entre algunos educadores matemáticos en asegurar que la demostración en la escuela aparece únicamente en el

[19] Balacheff, N. (2000). Procesos de demostración en los alumnos de matemáticas. Bogotá: una empresa docente y Universidad de los Andes.

[20] Karakuş, F., & Bütün, M. (2013). Examining the method of proofs and refutations in pre-service teacher's education. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *27*(45), 215-232.

[21] Atkins, S. L.(1997). Lakatos' Proofs and Refutations comes alive in an elementary classroom. School Science and Mathematics, Corvallis, v. 97, n. 3, p. 150-154, Mar. 1997.

estudio de la geometría euclidiana. Y, por otra parte, en ocasiones las metodologías de enseñanza obstaculizan el avance hacia un adecuado y correcto aprendizaje de la demostración. Por ejemplo, como lo anota Balacheff, son muchos los docentes que se han limitado a presentar una demostración formal en el tablero con el propósito de que sus estudiantes imiten el procedimiento. Esto no permite que el estudiante explore, conjeture y descubra, sino es un modelo que se torna difícil de comprender, que pretende tratar la demostración como si fuera un proceso sistemático, y que se aleja del objetivo de desarrollar el pensamiento matemático del estudiante.

La presente investigación tiene como uno de sus propósitos analizar el proceso de demostrar del estudiante, y una de las hipótesis es que este proceso se mejora ostensiblemente a través de la heurística de Lakatos expuesta en *Pruebas y refutaciones*, la cual contribuye a establecer modelos para la enseñanza de la demostración, el cual a su vez es, como anteriormente se afirmó, un aspecto fundamental de interés para la comunidad de educadores matemáticos.

Ahora bien, otra hipótesis referente a la función de la heurística de *Pruebas y refutaciones* es que se puede ampliarla al campo de la resolución de problemas. La resolución de problemas es una, sino es la más, importante actividad para el desarrollo del pensamiento matemático. El NCTM (2000) afirma que "la resolución de problemas es una parte integral del aprendizaje de las matemáticas", y agrega que la solución de problemas tiene dos funciones en la educación, el primero es ser un vehículo para el aprendizaje y la construcción de conceptos más robustos y el segundo funciona como una herramienta para motivar y comprometer a los estudiantes en el estudio de la matemática. Halmos (1980) escribió que la solución de problemas es el corazón de las matemáticas.

Wong Khonn Yoong (2009) muestra cómo está organizada y pensada el aprendizaje de la matemática en Singapur, un país con altos estándares de calidad en educación y particularmente con resultados entre los más altos en pruebas internacionales reconocidas como es el Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA). La estructura general se muestra a través de un pentágono que organiza y relaciona los aspectos considerados los más importantes en el aprendizaje de las matemáticas como se muestra en la Figura 1. El pentágono tiene en su centro la solución de problemas matemáticos rodeada por cinco factores interrelacionados que contribuyen al éxito en la solución de problemas.

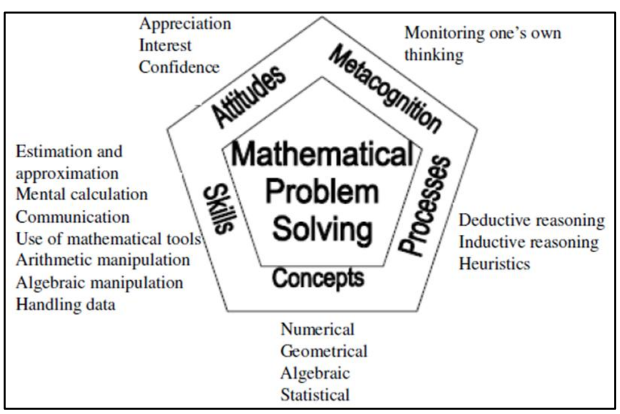

Figura 3. Pentágono actividad matemática Singapur[22]

Polya (1973) asevera que la resolución de problemas es una herramienta para llamar la atención de los estudiantes hacia el estudio de la matemática, y afirma que frente a "cualquier problema por modesto que parezca, si desafía tu intelecto e ingenio y lo logras solucionar, experimentarás la tensión y disfrutarás la victoria del descubrimiento". Schoenfeld (1985) atraído por el libro de Polya *How to solve it*, emprende una investigación que pretende responder a dos cuestiones principales: "¿qué significa pensar matemáticamente? y ¿cómo podemos ayudar a los estudiantes a hacerlo? La investigación fue publicada en el libro *Mathematical problem solving* en el que analiza y describe el comportamiento intelectual en la solución de problemas. Se resalta el hecho de la importancia dada por Schoenfeld a la resolución de problemas, la cual lo dirigió a investigar sobre la actividad intelectual implicada en la resolución de problemas complementando las ideas de Polya.

La presente investigación tiene como uno de sus propósitos analizar la incidencia de la heurística de Lakatos en la resolución de problemas para responder a la pregunta ¿cuáles son el aporte, las fortalezas y las debilidades de dicha heurística?

El último punto a tener en cuenta en este aparte es el rol que desempeña la matemática discreta en la presente investigación. En primera instancia, el contenido de la asignatura como tal es de aplicación en diferentes ramas del conocimiento como la biología, química, economía, ingeniería de transporte, sistemas e informática, entre otras muchas. Además diferentes autores indican la importancia de investigar acerca de la enseñanza-aprendizaje de la matemática discreta (Hart, 2008; Ian Anderson (2004); Debellis Valerie, Rosentein, (2004); Rivera Marrero, (2007)), la cual cubre una temática que proporciona problemas con dos principales características: por una parte, son retadores, interesantes y motivan al estudiante a comprometerse intelectualmente con la matemática; y por otra parte muchos de estos problemas, aunque conserven la característica retadora, no necesitan conocimientos sofisticados para abordarlos. Ahora bien, los problemas de la matemática discreta son apropiados para que el estudiante explore, analice, conjeture y demuestre, tal como lo muestran Denise Grenier y Charles Payan (1999) a través del planteamiento de cuatro problemas de la matemática discreta. En el Capítulo 2 del presente escrito se muestra el desarrollo de dos de los problemas con el fin de visualizar mejor la cualidad anteriormente nombrada.

Problema de investigación

La mayoría de las veces en las matemáticas el producto final de una construcción social e histórica se resume en una demostración. Lakatos muestra y analiza el proceso que está detrás de una demostración formal, a saber, una construcción que implica en ocasiones décadas o siglos para llegar al producto final, hecho que el estudiante ignora ya que la misma presentación de los textos pretende centrarse en un resultado decantado.

Este proceso heurístico que Lakatos llama "pruebas y refutaciones" en el aula se desconoce casi totalmente, y quizás sea por medio de éste que se propicie situaciones que pueden aportar al pensamiento matemático del estudiante y conducirlo a experimentar procesos de construcción de conocimiento análogos a los de los investigadores matemáticos.

Es importante resaltar que en las demostraciones no se sigue sistemáticamente un camino; al contrario, se trata de una total exploración del estudiante de una determinada conjetura. Con ello es posible, dentro de las hipótesis de la presente investigación, que se conduzca al estudiante al desarrollo del pensamiento matemático y le permita una mejor comprensión de los conceptos inmersos en la conjetura.

No se desea presentar un cuadro formal de demostraciones pues lo que se desea es dejar de lado la enseñanza tradicional. El propósito es crear un ambiente de debate social entre estudiantes con una prudente participación del docente, debate cuyo desenlace será la

[22] Wong, K. Y., Lee, P. Y., Kaur, B., Foong, P. Y., & Ng, S. F. (2009). *Mathematics education*: The Singapore journey (Vol. 2). Singapore: World Scientific Publishing

responsabilidad de los estudiantes: la conjetura, el contraejemplo, la demostración, así como el idear lo que Lakatos denomina contraejemplos globales. Estos son algunos de los ingredientes necesarios en dicho debate.

Por otra parte, las apreciaciones de autores reconocidos acerca de la demostración justifican el porqué del rumbo de la presente investigación. Balacheff (1987) considera que la demostración debe ocupar un lugar importante en los currículos de Francia. Análogamente Juan Godino (1997) asevera que este interés por la enseñanza de la demostración parece justificado por el papel esencial de las situaciones y procesos de validación en la propia matemática y el bajo nivel que muestran los estudiantes en la comprensión y elaboración de ella. Por otra parte, Gila Hanna (1995) afirma que la demostración merece un lugar importante en el currículo de matemáticas. Todo lo anterior lleva a la formulación del siguiente **problema de investigación**:

¿Cómo aporta el método heurístico de "pruebas y refutaciones" de Lakatos al desarrollo del pensamiento matemático, a la solución de problemas y a la construcción de demostraciones por parte de los estudiantes en la disciplina matemática discreta?

Preguntas de investigación

- ¿Cómo aporta el método heurístico de "Pruebas y refutaciones" de Lakatos al desarrollo del pensamiento matemático y a la construcción de demostraciones por parte de los estudiantes?
- ¿Cuál es la percepción emocional y actitudinal de los estudiantes con respecto a la clase desarrollada a través de los planteamientos de Lakatos?
- ¿Cuál es el aporte del método heurístico de Lakatos en la resolución de problemas?

Objeto de investigación

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática discreta.

Objetivo general

Explorar, a través de un curso completo de matemática discreta a nivel superior, la repercusión del método heurístico descrito por Lakatos en *Pruebas y refutaciones* en el desarrollo del pensamiento matemático, en la solución de problemas y en la construcción de demostraciones por parte de los estudiantes, lo cual se condensa en la construcción de un modelo didáctico para la enseñanza de la matemática discreta.

Este objetivo direcciona la atención al siguiente:

Campo de acción

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática discreta en la universidad en relación con el desarrollo del pensamiento matemático, la solución de problemas y la construcción de demostraciones.

Objetivos específicos

- Analizar el impacto que genera el método heurístico de Lakatos cuando se utiliza para abordar la demostración de una conjetura o la justificación de una solución a un problema significativo.
- Explorar la actitud del estudiante cuando las clases se desarrollan bajo esta perspectiva.
- Analizar profundamente cómo la heurística de Lakatos funciona como una herramienta práctica para la resolución de problemas de matemática discreta.
- Examinar cómo la heurística de Lakatos se convierte en un vehículo eficaz para el entendimiento significativo de una demostración en la matemática discreta.
- Observar de qué manera la heurística de Lakatos fomenta el trabajo autónomo y el compromiso de los estudiantes hacia la actividad matemática

Aporte práctico de la investigación

Diseño de un curso completo de matemática discreta para estudiantes universitarios.

Aporte teórico de la investigación

Análisis de las posiciones de Timothy Gowers y Carlo Cellucci, que enfrentan dos vertientes de la actividad matemática y de la naturaleza de la misma, la de resolver problemas y la de construir teoría (demostrar teoremas) desde la perspectiva de la educación matemática.

Tareas de investigación

Para cumplir los objetivos de la tesis se identificaron y cumplieron las siguientes tareas.

1. Se profundizaron y complementaron los fundamentos teóricos que forman la base de la presente investigación.
2. Se efectuó la búsqueda y análisis de diversas publicaciones e investigaciones que aborden algún aspecto de la presente investigación.
3. Se diseñó e implementó un modelo didáctico; así como, un primer curso de matemáticas discreta dirigido a estudiantes universitarios.
4. Se realizó el diseño de una primera encuesta dirigida a estudiantes de la licenciatura en matemáticas y de ingeniería.
5. Se recogieron datos a través de la grabación en video y un diario de campo del curso de matemática discreta.
6. Se diseñó y realizó una segunda encuesta a estudiantes con el propósito de recolectar datos para analizar la metodología empleada en el curso.
7. Se diseñó, aplicó y analizó los resultados de una segunda entrevista a los estudiantes con el propósito de recolectar datos para analizar la metodología empleada en el curso.
8. Se replanteó, rediseñó e implementó el curso de matemática discreta de acuerdo al modelo didáctico planteado.
9. Se analizó los resultados obtenidos durante toda la investigación.

Resultados esperados

Como en varias ocasiones se ha comentado existen problemáticas con respecto al aprendizaje y enseñanza de la demostración, a la motivación de los estudiantes y al desconocimiento de las características particulares de los contenidos y los problemas de la matemática discreta. Por lo anterior se espera:

- Obtener información de cómo la heurística de Lakatos mejora el proceso de la construcción de demostraciones matemáticas.
- Contribuir un modelo didáctico que mejore el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática discreta en la educación superior.
- Mejorar el aspecto actitudinal de los estudiantes hacia la matemática por medio de la resolución de problemas retadores.
- Aportar al desarrollo del pensamiento matemático del estudiante específicamente como un mejor resolutor de problemas.
- Obtener información de la heurística de Lakatos como herramienta eficaz en la resolución de problemas.

En el **CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE** se describen investigaciones realizadas en tres diferentes áreas de la educación matemática: La enseñanza de la demostración, enseñanza y aprendizaje de la matemática discreta y la heurística de Lakatos llevada al aula de clase. Con respecto a la enseñanza de la demostración se analizan cuatro artículos. Un primer artículo denominado The Use of Logic in Teaching Proof[23], Este artículo, en términos generales, desarrolla ideas y da sugerencias específicas de cómo llevar al aula de clase la enseñanza de la demostración. El artículo se divide en tres subtemas, a saber: la importancia de los principios lógicos en la enseñanza de la demostración; escribir y re-escribir demostraciones y la importancia de ser cuidadoso al escribirlas; sugerencias para inducir al estudiante a demostrar; es decir, que sienta la necesidad de hacerlo. El segundo artículo*: The Need for Proof and Proving: Mathematical and Pedagogical Perspectives*[24], esta publicación se enfoca hacia tres cuestiones: ¿por qué enseñar la demostración?, ¿cuáles son los aspectos que el estudiante considera importantes por los cuales se debe llevar a cabo una demostración? y ¿cómo puede el docente promover que el estudiante sienta la necesidad de llevar a cabo una demostración? El tercer artículo, Challenges to the importance of proof [25], Hanna debate las siguientes cuestiones: ¿Dónde ubicamos la demostración en el currículo de matemáticas? ¿Qué papel debe desempeñar la demostración en el currículo? ¿Cómo se debe presentar la demostración a los estudiantes?, ¿de manera formal, informal, visual, etc.? ¿Qué rol debe desempeñar el docente en la enseñanza de la demostración? El último artículo de este grupo: Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof[26], se reporta los puntos de vista de cinco matemáticos que han tenido a cargo el curso "Introduction to mathematical reasoning" que se ofrece en diferentes universidades en los Estados Unidos y que es prerrequisito para que los estudiantes puedan acceder a cursos de alto nivel como análisis matemático y álgebra abstracta.

Con respecto a la enseñanza y aprendizaje de la matemática discreta se analizaron seis artículos, *Discrete mathematics in relation to learning and teaching proof and modeling*[27]**,** Los autores muestran en primer lugar que la matemática discreta está ausente en el currículo, en la práctica del docente y en los textos escolares de Francia, y por otra parte aseveran que los problemas la matemática discreta son bien importantes ya que se consideran como una herramienta significativa para la enseñanza de la modelación y de la demostración, a través de validar y explorar afirmaciones matemáticas. *The Place of Discrete Mathematics in the School Curriculum: An Analysis of Preservice Teachers' Perceptions of the Integration of Discrete Mathematics into Secondary Level Courses*[28]**,** La investigación analiza la percepción de los profesores de matemáticas en formación acerca de dos importantes cuestiones: ¿Cómo perciben los profesores en formación la matemática discreta? y ¿Cómo los profesores en formación reaccionan ante la integración de la matemática discreta en el currículo escolar? *Discrete mathematics in primary and secondary schools in the United States*[29]**,** Los autores del artículo presentan una visión de la situación de la enseñanza-aprendizaje de la matemática discreta en Estados Unidos. *Problem solving with discrete mathematics*[30]**,** Friedler explora la resolución de problemas a través de los tópicos de la matemática discreta a nivel elemental, concretamente en estudiantes de grado 5 del sistema educativo de Estados Unidos, niños cuyas edades oscilan entre los 10 y 11 años. *Teaching Combinatorics through Guided Discovery*[31]**,** Bogart propone una nueva manera de enseñar la combinatoria teniendo en cuenta el guided discovery model. En esta publicación Jane Korey describe la experiencia que se tuvo en dos instituciones en las cuales se enseñó combinatoria a través del método nombrado anteriormente y el método tradicional. *Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics*[32]**,** Gerald Goldin discute en este artículo acerca de las posibilidades que ofrece las matemáticas discretas en el desarrollo del pensamiento matemático y en la parte emocional del estudiante.

Para culminar el capítulo del estado del arte se presentan una serie de publicaciones acerca de las implicaciones de llevar la heurística de Lakatos al aula de clase. *Lakatos' heuristic rules as a framework for proofs and refutations in mathematical learning: local counterexample and modification of proof*[33]**,** En esta publicación el autor analiza la enseñanza de la demostración a través de las reglas heurísticas de Lakatos; concretamente, estudiantes japoneses entre las edades de 14 y 15 años intentan demostrar el teorema del ángulo inscrito en un arco. *Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom*[34]**,** Sean Larsen y Michelle Zandieh presentan un episodio de una clase de teoría de grupos para estudiantes universitarios ilustrando el método de la invención guiada con procesos análogos a los que describe Lakatos en su obra *Pruebas y refutaciones*. *Examining the Method of Proofs and Refutations in Pre-Service Teachers Education*[35] En este estudio Fatih Karakus y Mesut Butun tienen como propósito principal analizar la discusión que tienen profesores en formación entorno a una conjetura, en un ambiente que es estructurado sobre la base del método de Lakatos. *Proofs and Refutations as a Model for Defining Limit*[36], en este artículo e muestra como estudiantes universitarios intentaron matematizar su

[23] Epp, S. S. (2009). *The use of logic in teaching proof. Resources for Teaching Discrete Mathematics: Classroom Projects, History Modules, and Articles*, (74), 313.

[24] Zaslavsky, O., Nickerson, S., Stylianides, A., Kidron, I., & Winicki, G. (in press). *The need for proof and Proving: Mathematical and pedagogical perspectives*. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), Proof and proving in mathematics education. New York, NY: Springer.

[25] Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), pp. 42-49

[26] Alcock, L. (2010). Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof. *Research in collegiate mathematics education VII*, 63-91.

[27] Grenier, D., & Payan, C. (1999). Discrete mathematics in relation to learning and teaching proof and *modelling*. In I. Schwank (Ed.), *Proceedings of CERME 1,* vol. 1 (pp. 143–155). Osnabruck

[28] Marrero, O. R. (2007). The place of discrete mathematics in the school curriculum: An analysis of preservice teachers' perceptions of the integration of discrete mathematics into secondary level courses (Doctoral dissertation, Doctoral dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University).

[29] Debellis, V. A., & Rosenstein, J. G. (2004). Discrete mathematics in primary and secondary schools in the United States. *ZDM,* 36(2), 46-55.

[30] Friedler, L. (1996). *Problem Solving With Discrete Mathematics. National Council of teachers of mathematics*

[31] Bogart, K. (2004). *Combinatorics through Guided Discovery*. *National Science Foundation* Grant Number DUE-0087466

[32] Goldin, G. A. (2004). Problem solving heuristics, affect, and discrete mathematics. *ZDM*, *36*(2), 56-60.

[33] Komatsu, K. (2012) Lakatos' heuristic rules as a framework for proofs and refutations in Mathematical learning: local-counterexample and modification of proof. En 12th International Congress on Mathematical Education Topic Study Group 14.

[34] Larsen, S., & Zandieh, M. (2008). Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 205-216.

[35] Karakuş, F., & Bütün, M. (2013). Examining the method of proofs and refutations in pre service teacher's education. *Bolema: Boletim de Educação Matemática,* 27(45), 215-232.

[36] Swinyard, C.; Larsen, S (2010). Proofs and refutations as a model for defining limit**.** In: annual conference on research in undergraduate mathematics education, 13th, 2010, Raleigh, NC. Proceedings... Raleigh, North Carolina: RUME, 2010. p. 1-12. Available at: <http://sigmaa.maa.org/rume/crume2010/>. Accessed at: Nov. 2015.

comprensión informal de límite siguiendo muy de cerca las etapas descritas por Lakatos.

En el **CAPÍTULO 2. MARCO TEORICO**, se describen las teorías centrales que se tuvieron en cuenta en el desarrollo de la investigación. El capítulo se divide en cinco partes, la demostración matemática en el aula de clase, el método heurístico de Lakatos, la matemática discreta, la resolución de problemas y dos posturas acerca de lo que son las matemáticas. En la primera parte se discute acerca de la noción de *demostración en matemática* teniendo en cuenta las posturas de diversos autores. En la segunda parte se describe y resume la postura epistemológica de Lakatos desarrollada en su libro "pruebas y refutaciones". En la tercera parte se muestra un plano general de la matemática discreta, sus tópicos, sus aplicaciones y la importancia que tiene dentro del currículo de matemáticas. En la cuarta parte se discuten algunas cuestiones que se consideran alrededor y a partir de la resolución de problemas: ¿qué es un problema?, ¿cuál es su importancia en la educación matemática?, ¿cuál es el rol del docente bajo esta perspectiva?, ¿qué características debe tener un buen resolutor de problemas? Para intentar responder a estas preguntas, se remite a dos autores que han contribuido de manera trascendental a la teoría: George Polya y Miguel de Guzmán, En particular se centra la atención en tres referencias teóricas: *How to solve it* y *Mathematics and plausible reasoning* de Polya y *Para pensar mejor* de Miguel de Guzmán. En la última sección se analizan las posturas del matemático Timothy Gowers y del filósofo Carlo Celucci relacionadas con la cuestión de si el hacer matemáticas y el método fundamental de las matemáticas es resolver problemas o construir teoría (demostrar teoremas). Gowers en su artículo "The Two Cultures of Mathematics" realiza una distinción entre aquellos matemáticos cuyo principal objetivo es resolver problemas y aquellos cuya preocupación primordial es la comprensión y la construcción de teorías. Celucci por otra parte en su artículo "Is Mathematics Problem Solving or Theorem Proving?" discute desde un punto filosófico la naturaleza de las matemáticas. En su concepto, decir que la esencia de la matemática es solucionar problemas está fuertemente ligado con (o quizás equivalente a) decir que el método de las matemáticas es el analítico, mientras que asegurar que la matemática es esencialmente demostrar teoremas expresa el punto de vista que el método de las matemáticas es el método axiomático.

En el **CAPÍTULO 3. METODOLOGIA DE INVESTIGACION** se muestra el escenario de investigación el cual consta de un grupo de estudio estudiantes de la licenciatura en matemáticas y de ingeniería de sistemas de la Universidad Antonio Nariño en la ciudad de Bogotá, Colombia, matriculados en el curso de Matemática Discreta ofertado por la Facultad de Ciencias y el programa de Licenciatura en Matemáticas. El curso tiene una duración de un semestre académico con seis horas semanales de clase. Los participantes en el estudio correspondiente fueron en total seis, de los cuales cinco pertenecían al programa de licenciatura en matemáticas y uno al de ingeniería de sistemas. En relación con el enfoque metodológico, la investigación se ajusta a un enfoque cualitativo. E método de investigación es el estudio de casos. Para la recolección de datos re realizaron dos encuestas, una entrevista, diario de campo y todas las clases fueron registradas en video. Se diseñó un curso de matemáticas discretas para ser aplicado en estudiantes universitarios de ingeniería y licenciatura en matemáticas.

El **CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS**. La presentación y análisis de los resultados incluyen tres partes principales: la primera está relacionada con las etapas de la heurística de Lakatos, la segunda es el análisis de la encuesta número 2 (ver Capítulo 3) aplicada al grupo, y la tercera versa sobre los objetivos general y específicos propuestos en el trabajo de investigación.

Se concluyó puntualmente en este capítulo que la heurística de Lakatos y la resolución de problemas fue un método adecuado para llevar el curso de matemática discretas. Tuvieron un impacto en los estudiantes en cuanto a su actitud, el pensamiento autónomo, la exploración de estrategias y la investigación en matemáticas. Respecto a la demostración, el método de Lakatos fue una herramienta que aportó en cuanto a la función explicativa que ésta debe tener. Por otra parte, los resultados mostraron que el curso de matemáticas discretas llevado a cabo a través del método heurístico de Lakatos y la resolución de problemas también fortalece el pensamiento matemático, la actitud y el compromiso de los estudiantes hacia la matemática, un trabajo autónomo que lo conduce hacia la investigación matemática.

CONCLUSIONES

La posición de Gowers concluye, frente a la naturaleza de "el hacer matemáticas", que en contraposición al dominio de la generación de teorías en el siglo XX, a las dos culturas (priorizar el resolver problemas o el construir teoría) se les debe atribuir la misma importancia. Celucci concluye, desde un punto de vista filosófico frente a la naturaleza de la matemática, que el método de las matemáticas es el analítico y por ende la matemática en esencia es resolución de problemas, aunque tanto el método analítico como el axiomático juegan un papel en ella.

Ahora bien, ¿qué se puede decir desde la perspectiva de la educación matemática? Para responder a ello, es ineludible tener en cuenta la naturaleza de la matemática, de "el aprender matemáticas" y de los objetivos de la educación matemática (la naturaleza de "el conocer matemáticas"). Tanto la primera pregunta como la tercera (ésta última en parte) han sido respondidas a satisfacción del autor de la presente tesis. Celucci ha argumentado convincentemente que el método de la matemática es el analítico. Lakatos ha desarrollado una teoría falibilista y cuasiempírica acerca de la naturaleza del conocimiento matemático lo que implica que el conocer matemáticas involucra un proceso falibilista y cuasiempírica. De este modo queda por avanzar en la respuesta a la pregunta que concierne la naturaleza de "el aprender matemáticas".

Se considerarán algunas cuestiones que son importantes para poder dar una respuesta. ¿Qué es lo prioritario (sin la exclusión del otro) en la educación matemática: el aprendizaje de teoría o la resolución de problemas?, y ¿Cómo trabaja el estudiante a partir de la resolución de problemas y cómo a través de la demostración rigurosa de teoremas matemáticos?

Para abordar estas preguntas, en primer lugar, se tendrá en cuenta las posiciones de Polya y Schoenfeld. Como ya se ha señalado, Polya en su obra "How to solve it" [37] asegura que, si el profesor desafía la curiosidad de sus estudiantes proponiendo problemas proporcionales a su conocimiento, y les proporciona una guía a solucionarlos por medio de preguntas estimulantes, entonces ellos pueden experimentar el pensamiento matemático independiente. Esta postura, y así lo muestra Polya en toda su obra, prioriza la resolución de problemas antes que el entendimiento de teoría, se enfatiza en motivar y desafiar al estudiante con problemas que él pueda abordar. Polya también afirma que la matemática tiene dos caras: la matemática presentada de manera sistemática como ciencia deductiva y la matemática experimental, una ciencia inductiva. En su libro, muestra cómo en la educación matemática se puede abordar esa matemática experimental a través de la descripción de una heurística en la resolución de problemas. En concordancia con lo anterior Polya escribe "*permítame expresar lo que pienso cerca de lo que es la enseñanza. Quizás, el primer punto, el cual es ampliamente aceptado, es que la enseñanza debe ser activa, o mejor, el aprendizaje debe ser activo…el principal objetivo en la enseñanza de la matemática es el desarrollo de estrategias para la*

[37] Polya, G. (2014). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton University Press.

solución de problemas"[38] . Ahora bien, ¿por qué el énfasis de Polya en mostrar una heurística para el descubrimiento matemático? Quizás es debido a que para él la dificultad de entender la matemática no estuvo en la seguir los procesos deductivos de una demostración, sin en pensar como esos resultados fueron descubiertos. Puntualmente Polya, refiriéndose a sí mismo escribe "*yo llegué a las matemáticas muy tarde…cuando me acerqué y comencé a aprender, yo pensé: bien, es cierto, la demostración parece concluyente. ¿Pero cómo es que la gente encuentra esos resultados? Mi dificultad en comprender las matemáticas estuvo en pensar como ella fue descubierta"*[39].

Schoenfeld, siguiendo las ideas de Polya, en su libro "Mathematical Problem Solving" escribe acerca de la comprensión y enseñanza de las habilidades para la solución de problemas. En el texto presenta diferentes problemas desafiantes que requieren un conocimiento básico de la educación secundaria y algunos otros que requieren un conocimiento más sofisticado. No obstante, como él mismo afirma, los problemas sí requieren de un substancial aporte de razonamiento y pensamiento matemático.

Tanto Polya como Schoenfeld enfatizan en el desarrollo del pensamiento matemático, logrado a través de resolución de problemas, más que en el entendimiento de teoría, sin desconocer que éste es un resultado natural de aquél y que se alimentan mutuamente. En este orden de ideas y a través de los resultados obtenidos en la presente investigación, se corrobora la postura de estos dos autores concretando que, en la educación matemática, en el aprender matemáticas, la comprensión de teoría debe jugar el papel de antecedente para el objetivo prioritario que es "hacer matemáticas" o sea, ser un mejor resolutor de problemas y por ende desarrollar el pensamiento matemático.

Un aspecto adicional a considerar es la posición de Gila Hanna en su artículo "Challenges to the importance of proof" en cuanto a la resolución de problemas y al entendimiento de teoría. La autora asegura que la resolución de problemas refuerza el entendimiento de conceptos y la teoría matemática. Aunque Hanna escribe puntualmente sobre el papel de la demostración, es claro que no es aquella demostración que el docente presenta como un producto acabado a través de la deducción de reglas básicas, sino aquella que es una construcción propia del estudiante y que tiene la característica de ser explicativa. Así, la demostración de un teorema se puede ver como la resolución a un problema y como tal refuerza el entendimiento.

Los resultados de la presente investigación permitieron corroborar la priorización de la resolución de problemas en términos de varios parámetros. En primer lugar, frente a la actitud del estudiante bajo este enfoque y bajo el enfoque de la matemática como ciencia deductiva, los estudiantes 3, 5 y 1 comentaron con claridad que un aspecto que diferencia la metodología del curso de matemática discreta realizado fue el enfatizar en la resolución de problemas lo cual motiva más que la metodología de muchos otros cursos que se basan en aplicación de reglas, algoritmos, definiciones, teoremas y propiedades.

En segundo lugar frente al entendimiento de teorías como se mostró en el análisis de resultados, particularmente en la sección 4.5.2

Por otra parte, respecto al aporte práctico de la presente investigación, el aprendizaje centrado en la resolución de problemas que constituyen un reto para el estudiante fue un aspecto de la metodología llevada a cabo durante el curso que aportó para que el estudiante se comprometiera hacia la actividad matemática. En particular, el proponer un problema para ser desarrollado durante todo el semestre académico (conjetura principal), propició un escenario óptimo y de total concordancia con el método heurístico de Lakatos. Los estudiantes exploraron, indagaron, propusieron y socializaron a medida que, de manera independiente, trabajaron motivados en la solución del problema. Esta estrategia innovadora junto con la metodología del curso permitió involucrar al estudiante en una genuina investigación en matemáticas.

El diseño del curso contempló problemas categorizados en diferentes niveles de dificultad, lo cual implicó que, aunque los sujetos de estudio fuesen heterogéneos, en términos de las capacidades y dificultades manifestadas en matemáticas, a cada estudiante se le llevara, y él o ella se esforzara, a lograr su mejor nivel posible, desarrollando de esta forma el pensamiento matemático.

A través de la metodología propuesta para el curso los estudiantes resolvieron 25 de los 31 problemas propuestos y trabajados. De ahí se puede concluir que el método de Lakatos es una muy buena herramienta para abordar problemas de la matemática discreta, los cuales, como se observó, tienen una característica intrínseca de ser motivadores en concordancia con los resultados de diferentes autores que han investigado en este campo de la educación matemática. El método de la heurística de Lakatos es una buena herramienta para que los estudiantes construyan sus propias demostraciones que a su vez permite que el estudiante entienda por qué un teorema se cumple, tal y como lo aconseja Gila Hanna y como siempre buscaba el inigualable matemático Paul Erdős.

La presente investigación también permitió observar cómo el curso de matemáticas discretas para estudiantes universitarios puede llevarse a cabo con resultados favorables a través del método de la heurística de Lakatos. El tópico de matemáticas discretas en los últimos años ha ocupado un lugar importante en el currículo de matemáticas en países como los Estados Unidos, tal como lo expresan autores como Gerald A Goldin, Joseph Rosenstein, Valerie DeBellis entre otros. El NCTM en "Principles and standards for school mathematics (2000)" sostiene la posición que la matemática discreta debe ser parte integral del currículo de matemáticas.

La matemática discreta es una rama de la matemática considerada especialmente apta para desarrollar el pensamiento matemático del estudiante por el tipo de problemas que se pueden proponer para motivar y comprometerlo hacia la actividad matemática. Si bien en los últimos años ha ido cobrando importancia en países como los Estados Unidos, no obstante, en Colombia existen pocas investigaciones sobre la enseñanza de esta rama a nivel primario, secundario o superior. Adicional a esto, los estándares básicos de competencias en matemáticas de Colombia (2009) no contemplan estos tópicos para la enseñanza en las escuelas de nivel primario y secundario. Aunado a lo anterior, son pocos los planes de estudio de licenciatura en matemáticas y matemáticas de las universidades colombianas que contemplan esta asignatura, lo cual influye directamente en el poco conocimiento de dichos tópicos al nivel de la educación básica y media.

Ahora bien, los resultados de la presente investigación mostraron que desde la perspectiva de la educación matemática se prioriza la resolución de problemas antes que el entendimiento de teorías y la demostración de teoremas para aprender matemáticas, por lo tanto, es necesario que este enfoque se abarque en los cursos de formación matemática en todos los niveles.

RECOMENDACIONES

- Se recomienda que los cursos de matemáticas discretas a nivel superior re lleven a cabo bajo una metodología análoga a la que se describe en este estudio.
- Se recomienda que la comunidad de educación matemática en Colombia realice nuevas investigaciones aportando, analizando y obteniendo resultados que evalúan el valor de la matemática

[38] Polya, G. (2014). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton University Press.
[39] Ibidem.

discreta en el currículo escolar, además de investigaciones que muestren la importancia de esta rama para el desarrollo del pensamiento matemático y la formación de actitudes positivas de los estudiantes hacia la matemática.

- Se requieren investigaciones que muestren resultados acerca de la manera en que se puede enseñar este tópico a nivel primario y secundario.
- Es necesario adelantar investigaciones adicionales que analizan la manera de utilizar la heurística de Lakatos como método para la enseñanza-aprendizaje de otros tópicos de la matemática que suelan considerarse más abstractos y formales, tales como el análisis real o el álgebra abstracta, de manera similar pero más a fondo de lo que reportaron Larsen y Swinyard en los artículos que se revisaron en el Capítulo 1
- Se requieren investigaciones que evalúan o valoran la repercusión de la heurística de Lakatos en la enseñanza de la matemática en la educación primaria, secundaria y media.
- Se requieren estudios que muestren con detalles la relación del método heurístico de Lakatos con el pensamiento matemático divergente y con el convergente.

ARTÍCULOS DEL AUTOR EN ELABORACIÓN

La heurística de Lakatos en una clase de Teoría de Grafos.

BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS

Alcock, L. (2010). Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof. *Research in collegiate mathematics education VII*, 63-91.

Atkins, S. L.(1997). Lakatos' Proofs and Refutations comes alive in an elementary classroom. *School Science and Mathematics*, Corvallis, v. 97, n. 3, p. 150-154, Mar. 1997.

Balacheff, N. (2000). Procesos de demostración en los alumnos de matemáticas. Bogotá: una empresa docente y Universidad de los Andes.

Bogart, K. (2004). *Combinatorics through Guided Discovery*. National Science Foundation Grant Number DUE-0087466

Debellis, V.A. & Rosenstein, J.G. (2004). Discrete Mathematics in Primary and Secondary Schools in the United States. *ZDM*. 36 (2), 46-55.

De Guzmán Ozámiz, M. (2006). *Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*.

Epp, S. S. (2009). *The use of logic in teaching proof. Resources for Teaching Discrete Mathematics: Classroom Projects, History Modules, and Articles*, (74), 313.

Friedler, L. (1996). *Problem Solving With Discrete Mathematics*. National Council of teachers of mathematics

Goldin, G. A. (2004). Problem solving heuristics, affect, and discrete mathematics. *ZDM*, *36*(2), 56-60

Grenier, D., Payan, C. Discrete matheamtics in relation to learning and teaching proof and modelling. In: Schwank, I. eds. (1999) *Proceedings of the Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-1)*. Universität, Osnabrück, pp. 143-155

Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. For the Learning of Mathematics, 15(3), 42-50.

Karakuş, F., & Bütün, M. (2013). Examining the method of proofs and refutations in pre-service teacher's education. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *27*(45), 215-232.

Komatsu, K. (2012*). Lakatos' heuristic rules as a framework for proofs and refutations in mathematical learning: Local-counterexample and modification of proof*. In Pre-proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education (pp. 2838-2847).

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

Larsen, S., & Zandieh, M. (2007). *Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom*. Educational Studies in Mathematics, 67(3), 205–216..

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. I. Induction and analogy in mathematics. II. Patterns of plausible inference.

Rivera-Marrero, O. (2007). The Place of Discrete Mathematics in the School Curriculum: An Analysis of Preservice Teachers' Perceptions of the Integration of Discrete Mathematics into Secondary Level Courses, tesis de doctorado, Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, Virginia.

Swinyard, C. (2011). *Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike*. *The Journal of Mathematical Behavior*, 30(2), 93-114.

Wong, K. Y., Lee, P. Y., Kaur, B., Foong, P. Y., & Ng, S. F. (2009). *Mathematics education: The Singapore journey* (Vol. 2). Singapore: World Scientific Publishing.

Zaslavsky, O., Nickerson, S., Stylianides, A., Kidron, I., & *Winicki*, G. (in press). *The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives*. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.) Proof and proving in mathematics education. New York, NY: Springer.

APRENDIZAJE DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DESDE UN ENFOQUE CUALITATIVO

EDISON CAICEDO PARRA
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
edicaicedo@uan.edu.co

GERARDO CHACÓN GUERRERO
Director de Tesis
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
gerardoachg@uan.edu.co

Resumen

El propósito de esta investigación es diseñar y valorar un modelo didáctico para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, con un enfoque