

- Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*. New York: Jhon Wiley and sons.
- Radfor, L. (2008). Connecting theories in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 317-327.
- Sampieri, R., Fernandez, C., & Baptista, M. (1991). *Metodología De La investigación*. Mexico: McGraw Hill.
- Schoenfeld, A. (1992). *Learnin to think mathematically*. New York: MacMillan.
- Sriraman, B., & English, L. (2010). *Theories of Mathematics Education*. Nueva York: Springer.

## MODELO DIDÁCTICO PARA EL APRENDIZAJE DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA A TRAVÉS DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS

NÉSTOR ALEXANDER HERNÁNDEZ MORENO  
 Docente investigador, Universidad Manuela Beltrán  
 nealhemo@gmail.com

GERARDO CHACÓN GUERRERO  
 Director de Tesis  
 Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia  
 E-mail: gerardoachg@uan.edu.co

### Abstract

*This research in Mathematics Education called: "DIDACTIC MODEL FOR THE LEARNING OF MATHEMATICAL MODELING THROUGH EQUATIONS IN DIFFERENCES", includes problem solving, equations in differences and the quasi-empirical approach of mathematics as basic elements of the Framework Theoretical. To design the Didactic Model, the socio-cultural political and scientific-technological contexts were interrelated with the epistemological and ethical approaches.*

*Five groups of activities were applied in students of Systems Engineering of the Pan American University Institution Compensar, who attended the Discrete Mathematics course during the second semester of 2016. In the design and application of each of the didactic activities, the elements of the Theoretical Framework, Didactic Model and Discrete Dynamic Systems were taken into account. Each activity was constituted in three stages: Motivation, Discussion and Practice, which included historical elements, experimentation, data collection, formulation of conjectures and obtaining the mathematical model in discrete variable. The subjects modeled were: Finite Differences, The Game of Life, Towers of Hanoi, Sierpinski Triangle, Newton's Cooling Law, Markov Chains, Tessellated, Discrete Logistic Equation, and Chaotic Processes.*

*From the results of this research highlights the evidence of the development and improvement of mathematical abilities by the students to model mathematically from the equations in differences.*

### Resumen

*Esta investigación en Educación Matemática denominada: "MODELO DIDÁCTICO PARA EL APRENDIZAJE DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA A TRAVÉS DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS", incluye la resolución de problemas, las ecuaciones en diferencias y el enfoque cuasi empírico de las matemáticas como elementos básicos del Marco Teórico. Para diseñar el Modelo Didáctico se interrelacionaron los contextos sociocultural político y científico tecnológico con los enfoques epistemológicos y éticos. Se aplicaron cinco grupos de actividades en estudiantes de Ingeniería de Sistemas de la Institución Universitaria*

*Panamericana Compensar, que cursaron la asignatura Matemáticas Discretas durante el segundo semestre de 2016. En el diseño y aplicación de cada una de las actividades didácticas se tuvieron en cuenta los elementos del Marco Teórico, del Modelo Didáctico y los Sistemas Dinámicos Discretos. Cada actividad se constituyó en tres etapas: Motivación, Discusión y Práctica, en la cual se incluyeron elementos históricos, experimentación, toma de datos, formulación de conjeturas y obtención del modelo matemático en variable discreta. Los temas modelados fueron: Diferencias Finitas, El Juego de la Vida, Torres de Hanói, Triángulo de Sierpinski, Ley de Enfriamiento de Newton, Cadenas de Markov, Teselados, la Ecuación Logística Discreta y los Procesos Caóticos. De los resultados de esta investigación se destaca la evidencia del desarrollo y mejoramiento de habilidades matemáticas por parte de los estudiantes para modelar matemáticamente a partir de las ecuaciones en diferencias.*

### INTRODUCCIÓN

En nuestro país se cuestiona la calidad de la educación a todo nivel, así como la competencia de los egresados en diferentes profesiones. El Sistema Nacional de Información de la Educación Superior (SNIES), reporta 348 instituciones de Educación Superior activas en Colombia, de las cuales 115 se encuentran en Bogotá, y de éstas se reconocen como universidades 29; es importante resaltar que sólo 9 se encuentran acreditadas con alta calidad. Las Instituciones que ofrecen carreras de Ingeniería son 51, de carácter oficial son 5 y las demás son privadas. Para los egresados de carreras de ingeniería, se reconoce la exigencia de desarrollar el pensamiento científico, es decir la capacidad para relacionar variables, formular conjeturas, preguntas o hipótesis, además de proponer explicaciones y modelos que les permita interpretar diferentes situaciones en su desempeño profesional utilizando la tecnología.

En las pruebas "SABER PRO"<sup>40</sup> se evalúa esta competencia transversal a los estudiantes de los diferentes programas de Ingeniería, sólo que en un contexto específico relacionado con la formación dada en cada pregrado. Un indicador del nivel de

<sup>40</sup> [www.icfes.gov.co/examenes/saber-pro/informacion-general/que-se-evalua](http://www.icfes.gov.co/examenes/saber-pro/informacion-general/que-se-evalua)

formación matemática de los egresados es la prueba de razonamiento cuantitativo en la cual los más altos puntajes del grupo de las carreras de ingeniería los obtuvieron los estudiantes de las Universidades Nacional de Colombia y Los Andes, según el reporte de los resultados agregados de las pruebas aplicadas en el segundo semestre de 2013. En los resultados entregados por las “PRUEBAS SABER PRO 2013”, se estableció sólo el **1,7%** de los estudiantes alcanzó puntajes notables en las competencias relacionadas con el **desarrollo del pensamiento científico en contexto** y las asignaturas de **ciencias básicas** son la plataforma que permite a los estudiantes desarrollar el pensamiento científico. Tal como lo plantea el ICFES (Módulo de Pensamiento científico Matemáticas y Estadística SABER PRO 2014-2), la formación científica incluye habilidades como: 1) Plantear preguntas y proponer explicaciones o conjeturas que puedan ser abordadas con rigor científico. 2) Establecer estrategias adecuadas para abordar y resolver problemas. 3) Adquirir e interpretar información para abordar y entender una situación problema. 4) Analizar críticamente los resultados y derivar conclusiones. 5) Comprender, comparar, utilizar o proponer modelos que permiten describir, explicar y predecir fenómenos o sistemas. Pese a que en todo estamento de la comunidad educativa universitaria se reconoce las posibilidades que otorga la Educación Matemática, no se han resuelto las dificultades para superar modelos didácticos tradicionales, o propuestas, aisladas de la realidad de los ingenieros y los diferentes sectores industriales y de servicios que los demandan. Desarrollar el pensamiento científico de los estudiantes implica que utilicen las herramientas matemáticas para modelar situaciones relacionadas con otras asignaturas, el desempeño profesional o eventos cotidianos. La modelación matemática se considera un tema implícito en diferentes asignaturas del área matemática de las carreras de ingeniería, en algunos programas se enuncia como uno de sus objetivos pero no se establece la forma de cumplirlo. Algunos profesores de matemáticas consideran que la modelación matemática corresponde al área de las ciencias aplicadas y de las asignaturas específicas de cada ingeniería; otros enfoques se orientan a las aplicaciones que se derivan de cada tema de los cursos de matemáticas. Es notable que para abordar acertadamente la modelación matemática se requiere el aporte de diferentes disciplinas además de las matemáticas, pues el contexto y características de cada situación a modelar deben estar plenamente identificados y establecidos. Otro elemento importante a tener en cuenta en los procesos de modelación es la utilización de los recursos tecnológicos ya sea para procesar datos o para recolectarlos. Las habilidades matemáticas, que requieren los futuros ingenieros están relacionadas con el mundo cambiante y globalizado que afrontamos, el vertiginoso avance tecnológico y las comunicaciones que generan cada vez nuevas situaciones de ingeniería que deben ser analizadas, interpretadas, modeladas, recreadas y explicadas en forma concreta y precisa. Tal como lo plantea Dujet en su conferencia pronunciada en México en el año 2005 “Los ingenieros están destinados a evolucionar en un mundo de complejidad creciente y cada vez más incierto; sin embargo deben llevar a cabo sus proyectos con la mayor eficacia, lograr los resultados más sobresalientes y tomar las decisiones adecuadas con toda la responsabilidad requerida en este contexto” (Dujet, 2007)<sup>41</sup>. Sin embargo, en las prácticas de clase de matemáticas se enfatiza en resolver ejercicios de cálculo, considerando el saber matemático aislado de la vida laboral y cotidiana.

De las diferentes asignaturas que brindan las herramientas para realizar procesos de modelación matemática es de destacar las ecuaciones diferenciales y en diferencias y las matemáticas discretas pues permiten la conjugación y comparación de diferentes métodos de

análisis y una mejor comprensión de diversos fenómenos dinámicos. El abordar los sistemas discretos desde las ecuaciones en diferencias permite, en algunas situaciones, obtener modelos más ajustados a la realidad. Con las ecuaciones en diferencias finitas se obtienen estimaciones de las soluciones de ecuaciones diferenciales, lo que se denomina “*métodos de diferencias finitas*”.

Actualmente son muchas las aplicaciones de las ecuaciones en diferencias, en dinámica de poblaciones, ingeniería, economía, biología y otras. Dicha modelación se hace con el uso de recursos informáticos a través de la simulación. Al comparar las soluciones arrojadas y confrontarlas con las situaciones reales, se encuentra que en las ecuaciones diferenciales se presenta el análisis de las variables continuas y en las ecuaciones en diferencias el de las variables discretas. El comportamiento real de los fenómenos, algunas veces puede ser un punto intermedio entre estas posibilidades, y en estos casos debe abordarse desde los procesos estocásticos.

El “Aprendizaje de la modelación matemática a través de las ecuaciones en diferencias” es un tema no resuelto en las facultades de ingeniería, pues las actividades didácticas encaminadas a desarrollar la habilidad de modelar matemáticamente diversas situaciones son muy escasas en los cursos de ecuaciones diferenciales y en diferencias y matemáticas discretas. Esto se debe, en parte, a que algunos docentes no dominan las diferentes técnicas de modelación matemática ni utilizan situaciones novedosas de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales y en diferencias y matemáticas discretas. Otro elemento a tener en cuenta para formular una propuesta de enseñanza y aprendizaje de la modelación matemática es que los modelos matemáticos construidos con base en las ecuaciones en diferencias, deben servir para motivar y preparar a los estudiantes en el abordaje de las ecuaciones diferenciales y las matemáticas discretas.

La propuesta de promover el “Aprendizaje de la modelación matemática a través de las ecuaciones en diferencias” está inscrita en las siguientes líneas de investigación en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño: **1)** Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través de la solución de problemas (especialmente problemas no rutinarios). **2)** Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas avanzadas a través de sus aplicaciones. **3)** Estrategias del desarrollo, enriquecimiento y consolidación del pensamiento matemático (incluye la enseñanza y aprendizaje de la matemática para talentos).

El **problema de investigación** es el siguiente: ¿Qué características debe tener un Modelo Didáctico para el aprendizaje de la modelación matemática a través de las ecuaciones en diferencias, que corresponda a las necesidades de formación de los futuros profesionales en ingeniería, que esté acorde a las demandas de la sociedad, industria, innovación, investigación y desarrollo tecnológico en Colombia?

El **objeto de estudio** corresponde a los procesos de aprendizaje de la modelación matemática a través de las ecuaciones en diferencias.

El **objetivo general** es diseñar, aplicar y valorar un modelo didáctico que mejore las competencias relacionadas con la modelación matemática y el pensamiento científico en contexto desde las ecuaciones en diferencias para estudiantes de ingeniería. Los objetivos específicos de la tesis son:

1. Establecer las características y contenidos de los cursos que incluyan el tema de las ecuaciones en diferencias para los estudiantes de ingeniería.
2. Identificar la correspondencia entre la forma de abordar los contenidos de las ecuaciones en diferencias y las habilidades que debe adquirir el futuro profesional.

<sup>41</sup> Dujet, C. (05-10-2007). Matemáticas del Mundo Real. Recuperado el 30 de 10 de 2014, de Matemáticas del Mundo Real: <http://www.m2real.org/spip.php?article2>

3. Reconocer los intereses, las formas como acceden al conocimiento y las ideas de los estudiantes en relación con el contenido de la asignatura: Matemáticas Discretas para estudiantes de Ingeniería de Sistemas de la Institución Universitaria Panamericana Compensar.

4. Proponer y aplicar actividades de aprendizaje que tengan en cuenta la experimentación, conjetura, refutación, formalización, aplicación y que contemplen la evolución de los conocimientos de los estudiantes, la interacción profesor–estudiante y el desarrollo del proyecto didáctico en la asignatura Matemáticas Discretas.

5. Valorar el nivel de desarrollo de las habilidades matemáticas de los estudiantes para la modelación a través de las ecuaciones en diferencias.

El **campo de acción** se enmarca en el: proceso de aprendizaje de la modelación matemática en los estudiantes de las carreras de ingeniería.

Las **preguntas científicas** de la tesis son las siguientes:

1. ¿Cuáles son las características y contenidos de los cursos que incluyan el tema de las ecuaciones en diferencias para los estudiantes de ingeniería?
2. ¿Qué correspondencia hay entre la forma de abordar los contenidos de las ecuaciones en diferencias y las habilidades que debe adquirir el futuro profesional?
3. ¿Cuáles son los intereses, las formas como acceden al conocimiento y las ideas de los estudiantes en relación con el contenido de la asignatura: Matemáticas Discretas de la Institución Universitaria Panamericana Compensar?
4. ¿Cómo se lograría que los estudiantes de ingeniería adquieran habilidades en el proceso de modelación matemática a través de las ecuaciones en diferencias?
5. ¿Cómo valorar las actividades de aprendizaje desarrolladas por los estudiantes de la carrera de ingeniería de Sistemas de la Institución Universitaria Panamericana Compensar?

El aporte teórico y práctico del trabajo de investigación, aborda uno de los grandes problemas que poseen los estudiantes de ingeniería, el cual se refiere a los procesos de aprendizaje de la modelación matemática. Las herramientas usadas para mejorar dichos procesos, son las ecuaciones en diferencias y la resolución de problemas. El aporte teórico consiste en una **metodología de trabajo**, basada en las ecuaciones en diferencias y la resolución de problemas, que ayude sustancialmente a mejorar los procesos de aprendizaje de los estudiantes en la modelación matemática. El aporte práctico es el diseño, implementación y evaluación de un modelo didáctico para el aprendizaje de la modelación matemática a través de las ecuaciones en diferencias.

Los resultados en los estudiantes son los siguientes: Desarrollo de habilidades matemáticas en el proceso de modelación basadas en las ecuaciones en diferencias y la resolución de problemas; desarrollo de la capacidad para explicar, resolver e inferir acerca de situaciones problemáticas planteadas a través de modelos matemáticos; cambio en la concepción de los estudiantes sobre la importancia de la aplicabilidad real en su vida profesional de las matemáticas, específicamente en las ecuaciones en diferencias; evolución de preconceptos y desarrollo de heurísticas de los estudiantes para la solución de situaciones problema fundamentados en las ecuaciones en diferencias y resolución de problemas retadores.

La **novedad científica** de este trabajo doctoral se enmarca en: La interrelación de las ecuaciones en diferencias y la resolución de problemas como herramientas de naturalezas epistemológicas

diferentes, en el mejoramiento del aprendizaje de la modelación matemática en estudiantes de ingeniería.

Con el propósito de mejorar y desarrollar habilidades matemáticas de los estudiantes de ingeniería que cursan la asignatura de Matemáticas Discretas en la Institución Universitaria Panamericana Compensar, ésta tesis doctoral en Educación Matemática se enmarca dentro del enfoque de la investigación cualitativa. Este tipo de investigación es el más adecuado debido a que se busca explorar y comprender el comportamiento y actitudes de los estudiantes después de aplicar la estrategia didáctica, en aras de adquirir habilidades en el proceso de modelación.<sup>42</sup> Es recomendable seleccionar el enfoque cualitativo cuando el tema de estudio ha sido poco explorado, o no se ha hecho investigación al respecto en algún grupo social específico.

A continuación se describen las fases para su desarrollo: En la primera fase se diseñaron los instrumentos y estrategias para recolectar información y analizarla. En la segunda fase se realizó el diseño y aplicación del Modelo Didáctico sustentado en la resolución de problemas, las ecuaciones en diferencias y la concepción cuasi empírica de la matemática. La tercera y última fase, correspondió al análisis de datos y resultados que permitieron evaluar el Modelo Didáctico propuesto y formular unos elementos teóricos que describieran y explicaran la forma en que las actividades didácticas impactaron positivamente o no, en cada uno de los estudiantes y con esto aportar en la construcción del aprendizaje de la modelación a través de las ecuaciones en diferencias.

La estructura de la tesis tiene cuatro capítulos. En el capítulo uno, se hizo una revisión del estado del arte. En el capítulo dos, se desarrolló el marco teórico tomando como elementos las ecuaciones en diferencias, la resolución de problemas y la concepción cuasi empírica de las matemáticas. La conjugación de estos tres elementos, llevó a los estudiantes de ingeniería a construir el aprendizaje de la modelación matemática. En el capítulo tres denominado metodología para la construcción del modelo didáctico, se tuvieron en cuenta los tres principios que debe tener el modelo didáctico: aprender matemáticas es igual a hacer matemáticas, la importancia de los modelos discretos y las ecuaciones en diferencias como herramienta de modelación. En el cuarto capítulo, denominado análisis y discusión de resultados, se hizo un recuento de todas las actividades desarrolladas por los estudiantes, haciendo hincapié en los logros, las dificultades, necesidades, posturas teóricas y reacciones de los estudiantes. Finalmente, se formularon las conclusiones y recomendación que surgieron del presente trabajo de investigación.

**En el CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE** se analizan algunas investigaciones que tienen como eje central la enseñanza aprendizaje de modelación matemática a través de las ecuaciones en diferencias.

De hecho, en las últimas dos décadas, las ecuaciones en diferencias han tenido una importancia muy relevante debido al desarrollo de las nuevas tecnologías. La educación matemática ha adquirido nuevos enfoques, muchos autores señalan la importancia de contextualizar el quehacer matemático en las ciencias aplicadas en todos los niveles y en todos los campos del saber.

Los autores referenciados en este capítulo, resaltan en sus tesis una visión que permita integrar las matemáticas a los diferentes contextos y demás disciplinas del saber. La modelación matemática como eje central del conocimiento matemático, debe implementarse en todos los cursos de matemáticas, de tal forma que los estudiantes aprendan a plantear y resolver problemas contextualizados, lo cual les debe servir

<sup>42</sup> Hernández Sampieri, R. (2010). *Metodología de la Investigación*. Quinta Edición. Editorial McGraw Hill, México D.F., páginas. 364-365.

para llegar a ser mejores profesionales con un pensamiento autónomo y crítico a la hora de tomar decisiones. Destacamos las siguientes referencias consultadas: **Journal: Advances in Difference Equations**<sup>43</sup>, ésta revista especializada en el estudio de las ecuaciones en diferencias, presenta avances en la matemática contemporánea ligadas al área, pero en general no abarca los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones en diferencias.

El **Proyecto SIMIODE**<sup>44</sup> es una propuesta dirigida por Brian Winkel, Profesor Emérito del Departamento de Ciencias Matemáticas de la Academia Militar de Estados Unidos, cuya finalidad es promover el uso de la modelación con ecuaciones diferenciales y en diferencias en el aula de clase. Entre las estrategias utilizadas para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y en diferencias, se conforma una comunidad en línea para profesores y estudiantes en la cual se comparten experiencias exitosas que utilizan la modelación, la tecnología y el aprendizaje colaborativo.

SIMIODE ofrece a sus usuarios “escenarios de modelación”, conjuntos de datos, videos, y presentaciones entre otros recursos que permiten y motivan el aprendizaje. Otro artículo especialmente relevante es: **La Matemática en el contexto de las ciencias**<sup>45</sup> y las matemáticas en la formación de un ingeniero<sup>46</sup>.

Las exigencias de un mundo globalizado y un constante avance tecnológico llevan a las instituciones de educación superior a replantearse los perfiles de sus egresados, los programas académicos y curriculares y por lo tanto las prácticas docentes. Una opción a tener en cuenta para la formación de ingenieros es utilizar propuestas metodológicas de enseñanza que desarrollen la creatividad, innovación y el razonamiento orientado a la solución de problemas. En el caso de las matemáticas dirigidas a estudiantes de ingeniería, se expone la propuesta de “La matemática en el contexto de las ciencias” (MCC), teoría que data desde 1982 en el Instituto Politécnico Nacional de México como producto de las reflexiones acerca de la problemática estudiantil asociada a los procesos de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos<sup>47</sup>.

Esta propuesta pretende superar la dificultad que presentan los estudiantes para interpretar el mundo real, pues no reconocen los conceptos matemáticos como una herramienta para plantear o analizar modelos, y la gran cantidad de información proveniente de otras asignaturas no es relacionada con el conocimiento matemático.

Según la autora (Camarena, 2009), la matemática en el contexto de las ciencias se fundamenta en los siguientes paradigmas:

- “La matemática es una herramienta de apoyo y disciplina formativa.
- La matemática tiene una función específica en el nivel universitario.

- Los conocimientos nacen integrados<sup>48</sup>.

En relación a la temática de la modelación matemática destacamos: **Modelación matemática como método de investigación en clases de matemáticas**<sup>49</sup>

Según los autores, la modelación matemática es todo un proceso inmerso en el hallazgo de un modelo. El modelo matemático de un fenómeno reúne una serie de símbolos y formulaciones matemáticas que realizan la traducción del fenómeno en estudio. Dicho modelo no sólo permite hallar una solución particular del problema, sino que también sirve de apoyo para otro tipo de teorías o aplicaciones matemáticas. Existen muchas definiciones de modelo, según cada área del conocimiento.

El artículo termina con la presentación de una aplicación de un problema real al tema de la crianza de pollos, el peso que adquieren durante su vida y las raciones de comida que consumen en función de los días de vida, en la cual se hace todo el proceso de modelación matemática (delimitación del problema, referencial teórico, hipótesis, desarrollo, resolución del problema, interpretación de la solución y validación del modelo). **En referencia al contexto colombiano se revisó:** Modelación en educación matemática: Una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos<sup>50</sup>.

Este documento es un avance de investigación en el marco del proyecto “*El proceso de modelación matemática en las aulas escolares del suroeste antioqueño*”<sup>22</sup>, en él se desarrollan los referentes teóricos sobre la modelación como recurso didáctico en las clases de matemáticas.

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) en el documento *Lineamientos Curriculares* (1998) expone la importancia de que los estudiantes relacionen los contenidos de aprendizaje con sus experiencias cotidianas; además se afirma que uno de los propósitos de la enseñanza de las matemáticas es el desarrollo del pensamiento matemático.

Las estrategias que se sugieren son “la resolución de problemas” y “la modelación matemática”, sustentadas en desarrollar en los estudiantes la habilidad de comunicarse matemáticamente, propiciar la investigación que acompaña al razonamiento matemático, comprender conceptos y procesos matemáticos, e investigar diferentes alternativas a situaciones problemáticas.

La modelación se describe como un proceso que permite a los estudiantes construir conceptos matemáticos de una forma significativa ya que a partir de una situación problemática se puede observar, analizar, explicar, inferir, validar el modelo mismo y los conceptos y procesos matemáticos que encierra. **En el CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO se recogen los referentes teóricos, epistemológicos y conceptuales, en los cuales se soporta el trabajo**

<sup>43</sup> <http://www.advancesindifferenceequations.com>

<sup>44</sup> <https://www.simiode.org/about>

<sup>45</sup> Hernández M. Néstor (2012). Acciones didácticas para mejorar el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en carreras de Ingeniería. Tesis de Maestría Universidad Antonio Nariño. Bogotá

<sup>46</sup> Trejo Trejo, E.; Camarena Gallardo, P; Trejo Trejo, N. (2013). Las matemáticas en la formación de un ingeniero: una propuesta metodológica. *Revista de Docencia Universitaria*. REDU. Vol. 11, Número especial dedicado a Engineering Education, pp. 397-424. Recuperado el 25 de abril de 2015 en <http://red-u.net>

<sup>47</sup> Camarena, P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. Instituto Politécnico Nacional México. [Versión electrónica] *Innovación Educativa*, Vol. 9, núm. 46, enero-marzo, pp. 15-25. Recuperado el 8 de mayo de 2012 en el URL: <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/1794/179414894003.pdf>

<sup>48</sup> Camarena, P. (2009). *La matemática en el contexto de las ciencias*. Instituto Politécnico Nacional México. [Versión electrónica] *Innovación Educativa*, Vol. 9, núm. 46, enero-marzo, pp. 15-25. Recuperado el 8 de mayo de 2012 en el URL: <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/1794/179414894003.pdf>

<sup>49</sup> Hein, N., y Biembengut, M. S. (2006). Modelaje Matemático como Método de Investigación en Clases de Matemáticas. [Versión Electrónica]. V Festival Internacional de Matemáticas, 1-25. Recuperado el 10 de mayo de 2012 en el URL: <http://www.cientec.or.cr/matematica/pdf/P-2Hein.pdf>

<sup>50</sup> Villa, J.A. y Ruíz, H.M. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. “Revista Virtual Universidad del Norte”. No 27 (mayo – agosto de 2009, Colombia). Recuperado el 12 de mayo de 2012 en el URL: <http://revistavirtual.ucn.edu.co/22>

a realizarse en la tesis. Inicialmente se refiere a los Modelos Discretos y Continuos<sup>51</sup>.

Un modelo es la representación de un proceso, es decir, un cambio en los estados de un sistema a través del tiempo, esta descripción puede ser discreta o continua.

En el caso discreto, se observa un sistema que cambia a intervalos de tiempo regulares finitos, es decir, a cada segundo, minuto, hora, etc., y se relaciona el estado observado del sistema con los estados en los instantes anteriores. Tal sistema puede modelarse en algunas ocasiones con **ecuaciones en diferencias**.

En los casos continuos, se trata el tiempo como un continuo, lo que permite observaciones del sistema en cualquier instante. De tal forma que el modelo puede expresar las relaciones entre las tasas de variación de diversas cantidades. Estos tipos de modelos se representan con las ecuaciones diferenciales.

El abordar los sistemas discretos desde las ecuaciones en diferencias permite, en algunas situaciones, obtener modelos más ajustados a la realidad. Con las ecuaciones en diferencias finitas se obtienen estimaciones de las soluciones de ecuaciones diferenciales, lo que se denomina “*métodos de diferencias finitas*”.

Las **ecuaciones en diferencias** describen la evolución de ciertos fenómenos a través del tiempo. Por ejemplo, al establecer el tamaño de una generación de una población en el tiempo, este valor es una variable discreta, el tamaño de la generación  $x(n+1)$  es una función de la generación  $x(n)$ . Esta relación se expresa como una ecuación en diferencias así:

$$x(n+1) = f(x(n))$$

Puede verse esto usando otra notación, si se comienza desde el punto  $x_0$ , se genera la secuencia:

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

Por conveniencia, se adoptará la notación:

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)) \quad ; \quad f^3(x_0) = f(f(f(x_0))), \text{ etc.}$$

$f(x_0)$ , es la primera iteración de  $x_0$  sobre  $f$ ;  $f^2(x_0)$  es la segunda iteración de  $x_0$  sobre  $f$ , más generalmente,  $f^n(x_0)$  es la enésima iteración de  $x_0$  sobre  $f$ . El conjunto de todas las iteraciones positivas  $f^n(x_0): n \geq 0$ , donde  $f^0(x_0) = x_0$ , es denominada por definición *órbita* de  $x_0$  y se denotará por  $O(x_0)$ . Este proceso iterativo es un ejemplo de un sistema dinámico discreto. Escribiendo  $x(n) = f^n(x_0)$ , se tiene:

$$x(n+1) = f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0)) = f(x(n)),$$

Las ecuaciones en diferencias y los sistemas dinámicos discretos representan las dos caras de la misma moneda. Por ejemplo, cuando los matemáticos hablan de ecuaciones en diferencias, se refieren por lo general a la teoría analítica de la materia y cuando hablan acerca de los sistemas dinámicos discretos, por lo general se refieren a su geometría y aspectos topológicos.

La opción pedagógica asumida en el modelo se basa en la Teoría de la Resolución de Problemas. Pólya (1965) señala que en la solución de un problema, se requiere mínimamente seguir los pasos de la figura 1.

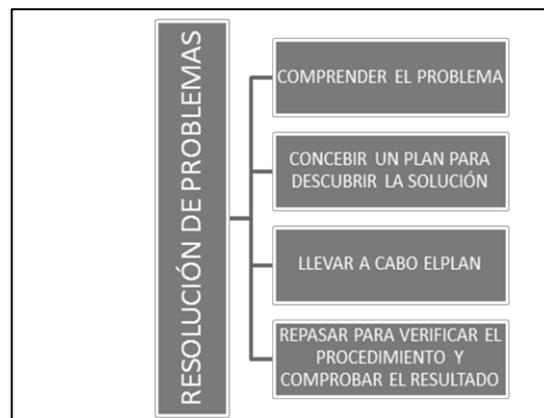


Figura 1: Pasos para la resolución de un problema<sup>52</sup>.

El cumplimiento de las etapas planteadas es un camino en la búsqueda de resultados satisfactorios. Cada enunciado de las actividades didácticas diseñadas como parte de la estrategia para mejorar el aprendizaje de la modelación matemática a través de las ecuaciones diferenciales y en diferencias, pueden abordarse bajo la propuesta de *resolución de problemas*.

**En el CAPÍTULO 3: CONSTRUCCIÓN DEL MODELO DIDÁCTICO**

se procede a dicha construcción la cual se soporta en los principios básicos:

- Aprender matemática = Hacer matemática
- Importancia de los modelos discretos
- Las ecuaciones en diferencias como herramienta de modelación

A partir de estos principios se construye el **Modelo Didáctico**. Iniciamos con la **definición y consideraciones generales**<sup>53</sup>.

En los últimos años, en Colombia se despliega una dinámica de cuestionamiento acerca de la Educación Superior con el fin de lograr una política educativa que garantice el acceso sin restricciones ni discriminaciones a toda la población, una educación superior de calidad y que sea generadora de conocimiento, tecnología e innovación.

Con el fin de lograr este anhelo nacional las Instituciones de Educación Superior se deben someter a diferentes procesos evaluativos ya sea de los entes que vigilan el sistema o de su propia autoevaluación en cuanto al cumplimiento de metas de eficiencia y calidad.

El cuestionamiento de la efectividad de los procesos de enseñanza y aprendizaje lleva a incentivar la generación de propuestas que superen dificultades ya identificadas en ciertas áreas del conocimiento. En las

<sup>51</sup> Banasiak J. (2013). *An Introduction via Difference and Differential Equations*. University of KwaZulu-Natal, South Africa Technical University of Lodz. Cambridge University Press.

<sup>52</sup> Polya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas*. (Décimo Quinta Reimpresión). Editorial Trillas, México D.C, p 7-12

<sup>53</sup> Ministerio de Educación Nacional de la República de Colombia. (29 de julio de 2014). *MINEDUCACIÓN*. Recuperado el 3 de diciembre de 2014, de MINEDUCACIÓN: [http://www.mineducacion.gov.co/1621/articulos-340678\\_recurso\\_1.pdf](http://www.mineducacion.gov.co/1621/articulos-340678_recurso_1.pdf)

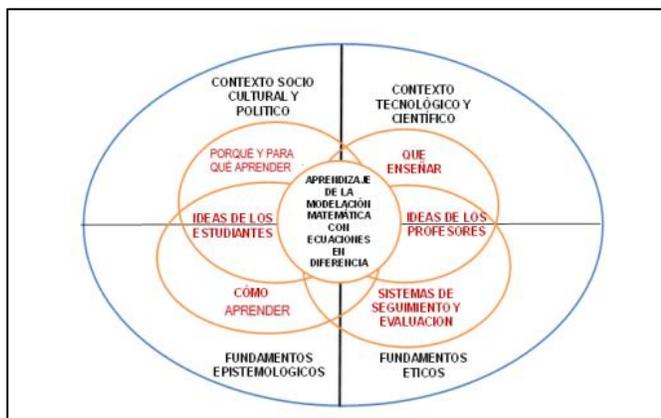
asignaturas de matemáticas se observa los mayores índices de pérdida y deserción académica por parte de los estudiantes.

En este contexto del Sistema Educativo Colombiano se delimita la propuesta de diseñar y validar un modelo didáctico para el aprendizaje de la modelación matemática a través de las ecuaciones en diferencias.

Un modelo didáctico es una representación del proceso enseñanza aprendizaje en un contexto tecnológico-científico y socio-cultural determinado y basado en opciones epistemológicas y éticas específicas.

A partir de visualizar la complejidad de elementos que se deben tener en cuenta al momento de proponer y diseñar un modelo que permita desarrollar en los estudiantes las competencias pertinentes para abordar la modelación matemática usando ecuaciones en diferencias, se describen el contexto tecnológico y científico bajo el cual se aborda la temática de ecuaciones en diferencias y modelos matemáticos, la situación social y cultural de la población estudiantil de las carreras de ingeniería en Colombia; los referentes epistemológicos de la educación matemática que subyace a la propuesta así como el compromiso por una educación superior de calidad.

A continuación se representa en un esquema los elementos que conforman un modelo didáctico:



**Figura 2: Elementos que conforman el Modelo Didáctico.**

Se describen con detalle los contextos tecnológico científico y sociocultural político, así como los fundamentos epistemológicos y éticos que hacen parte del modelo didáctico propuesto en esta investigación.

*Respecto al Contexto Tecnológico y Científico específicamente a la Modelación Matemática, Según Biembengut<sup>54</sup>, un modelo matemático es el conjunto de símbolos, relaciones matemáticas que se utilizan para representar una situación real.*

En el mundo tan cambiante en el que vivimos, globalizado y competitivo, donde no importa el conocimiento como tal sino cómo se puede aplicar y socializar para sacarle el mejor provecho, la modelación matemática definida como el proceso que se involucra directamente en el hallazgo del modelo matemático, viene siendo muy defendida como método de enseñanza, aunque hay algunos docentes que aún consideran que corresponde al área de las ciencias aplicadas y de las asignaturas específicas de cada Ingeniería.

*Respecto al Contexto Socio-Cultural y Político se destacan las Exigencias actuales de la formación matemática del profesional y en particular en las carreras de ingeniería.*

En Colombia, al igual que en otros países se percibe que el número de ingenieros no es suficiente. Los retos que impone un mundo globalizado en cuanto al desarrollo tecnológico y científico, las innovaciones y cambios sociales que traen los nuevos acuerdos comerciales entre los países, exigen contar con profesionales debidamente preparados y competitivos.

Los ingenieros son los profesionales que se encargan de analizar los sistemas, organizaciones, situaciones y proponen mejoras, soluciones o innovaciones para el crecimiento del sector productivo y la eficiencia de las empresas. Esto implica la comprensión del entorno, la visión holista y sistemática de cada situación para relacionarla acertadamente con la tecnología. En este panorama es necesario que las facultades de ingeniería a nivel de pregrado, desarrollen en los estudiantes habilidades para practicar la ingeniería de síntesis, es decir enfocarse en proyectos de diseño; así como desempeñarse con habilidades comunicativas y tecnológicas apropiadas al área de competencia y al mercado laboral altamente competitivo.

El **perfil del estudiante** se refiere a su formación previa, sus expectativas, deficiencias, potencialidades, y otras características académicas y sociodemográficas que se deben tener en cuenta al momento de formular una propuesta didáctica. Pese a la importancia que reviste para el desarrollo de un país contar con profesionales ingenieros, socialmente no hay reconocimiento ni valoración de las carreras ingenieriles.

En estudios recientes, se analiza que si bien en Colombia hay una gran oferta de carreras de pregrado en ingeniería, superior a países como Venezuela y Ecuador, no hay una acogida por parte de los jóvenes al momento de decidir su futuro profesional, es alto el nivel de deserción y la insatisfacción de los estudiantes cuando ingresan a las facultades de Ingeniería. Una de las causas de deserción e insatisfacción se relaciona con los programas académicos y la forma como se abordan contenidos en el aula, en especial con las asignaturas del área de ciencias básicas como lo son las matemáticas.

En el sistema educativo colombiano, hay una fuerte tendencia a las prácticas docentes tradicionales, que poco a poco han incorporado recursos de información y comunicación tecnológica, pero que aún mantienen esquemas de enseñanza tradicionales, sin propiciar una participación activa de los estudiantes.

Los Fundamentos Epistemológicos se incorporan al modelo al asumir (a nivel personal y/o institucional) un modo de entender el pensamiento matemático determina la práctica didáctica. Concretamente la concepción de la matemática como ciencia, se ve reflejada en las estrategias didácticas que se desarrollan en el aula. Este postulado obliga al investigador en educación matemática a indicar los referentes de la filosofía de las matemáticas que acompañan el modelo didáctico a desarrollar.

El planteamiento de uno de los matemáticos de nuestra época, Reuben Hersh, es cuestionar la esencia de las matemáticas proponiendo una “filosofía humanista” que se contrapone a los principios del realismo y el nominalismo; bajo esta concepción, las matemáticas se derivan de los contextos históricos y socioculturales; pues son un producto del pensamiento humano, la relación que tiene con su entorno ambiental y social.

Esta visión permite sustentar propuestas de enseñanza aprendizaje de las matemáticas aplicadas, matemáticas en contexto, la resolución de problemas y la modelación matemática. Además de concebir a las matemáticas como una herramienta útil para las otras ciencias naturales o aplicadas.

<sup>54</sup> Biembengut, M. y Hein, N. (s.f.). Modelo, Modelación y Modelaje: Métodos de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Departamento de Matemática CCEN, Universidad Regional de Blumeau. Brasil. Recuperado el 03 de Diciembre de 2014 en [http://matesup.utsalca.cl/modelos/articulos/modelación\\_mate2.pdf](http://matesup.utsalca.cl/modelos/articulos/modelación_mate2.pdf)

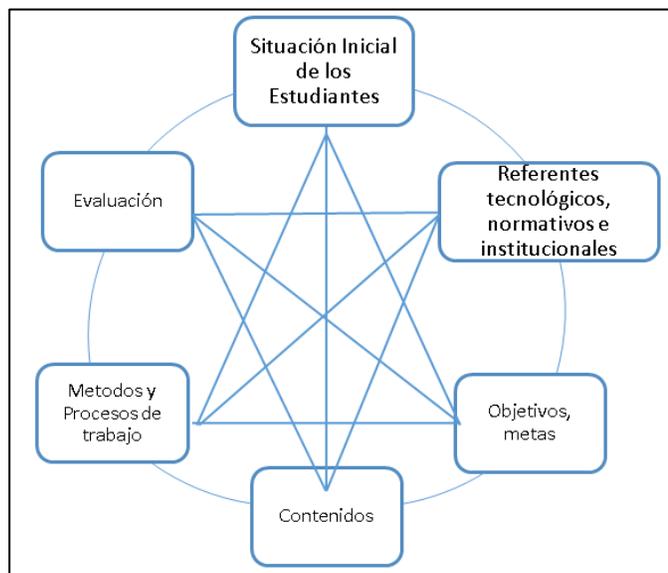
Los **Fundamentos Éticos** se refieren al **Dilema Inclusión – Calidad**. Ante las exigencias y necesidades no satisfechas en materia educativa de una sociedad cambiante, los entes gubernamentales, las instituciones de educación superior y las asociaciones de ingenieros se han propuesto como meta la calidad de la formación para los futuros egresados.

En el contexto educativo en el cual se interrelacionan la infraestructura universitaria, las aptitudes y habilidades de los estudiantes de pregrado y la formación de los docentes y directivos, el compromiso por brindar una formación de calidad debe hacerse realidad.

Para realizar las mejoras o cambios e innovaciones que se requiere en el caso particular de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es imperante avanzar en las investigaciones o intervenciones educativas para compartir aquellas experiencias exitosas.

La propuesta de un modelo didáctico para el aprendizaje de la modelación matemática a través de las ecuaciones en diferencias, cumple con allanar la búsqueda de la calidad en la formación de los futuros ingenieros, así como la coherencia entre lo que se aprende en el aula de clases y el quehacer del ingeniero.

A continuación se describen los aspectos que se tuvieron en cuenta en el **diseño y evaluación** de un conjunto de actividades didácticas para el aprendizaje de la modelación matemática a través de las ecuaciones en diferencias.



**Figura 3: Adaptada del Modelo de la Teoría Didáctica definida por Hilde Hiim y Else Hippe<sup>55</sup>.**

Finalmente se describen las actividades diseñadas para el desarrollo de esta investigación. Estas se organizaron en seis grupos cuya estructura responde al marco teórico propuesto. Las etapas de cada grupo de actividades son: motivación, discusión y práctica. En la motivación se hace una introducción al tema teniendo en cuenta aspectos históricos. En la discusión, se realiza la experimentación, es decir, los estudiantes toman la información necesaria para el proceso de modelación, hallan la ecuación en diferencias y modelan matemáticamente obteniendo la

fórmula cerrada en variable discreta. En la etapa práctica, se proponen ejercicios y problemas para que de forma repetida ejerciten lo planteado en la discusión y así puedan afianzar el conocimiento obtenido.

En el primer grupo se busca motivar a los estudiantes y para esto, se introduce el concepto de modelos dinámicos discretos a través de actividades lúdicas que contienen diferencias finitas, el juego de la vida y las torres de Hanói, que permitan al estudiante experimentar, manipular y conjeturar para obtener relaciones de recurrencia, que después serán formalizadas y resueltas como ecuaciones en diferencias. Al final de este grupo de actividades, se proponen algunos problemas retadores con la finalidad de determinar las habilidades previas que tienen los estudiantes que tomarán el curso de Matemáticas Discretas. (Ver Anexo 1).

El segundo grupo de actividades, incluye el tema de las ecuaciones en diferencias lineales de primer orden con coeficientes constantes homogéneas y no homogéneas, que se contextualizan a problemas de crecimiento y decrecimiento exponencial, dinámica de poblaciones y dosificación de medicamentos.

El tercer grupo de actividades también incluye el tema de las ecuaciones en diferencias lineales de primer orden con coeficientes constantes homogéneas y no homogéneas, aplicadas a la ley de enfriamiento de Newton y al triángulo de Sierpinski.

El cuarto grupo de actividades trata el tema de las ecuaciones en diferencias lineales de primer orden con coeficientes constantes homogéneas, aplicadas a las Cadenas de Markov, donde se modelan movimientos poblacionales, grafos dirigidos y el funcionamiento de Google. El quinto grupo de actividades abarca el tema de las ecuaciones en diferencias lineales de orden superior con coeficientes constantes homogéneas y no homogéneas, contextualizado a problemas de embañosamiento de retículos “teselación”.

El sexto grupo de actividades incluye el tema de las ecuaciones en diferencias no lineales aplicado a la ecuación logística de Verhulst y una introducción a los procesos caóticos de Lorenz.

Para el desarrollo de la investigación, se utilizó un curso compuesto de 32 estudiantes de séptimo semestre de la carrera Ingeniería de Sistemas de la Institución Universitaria Panamericana Compensar. Las actividades se aplicaron durante el segundo semestre de 2016 entre los meses de agosto y octubre en la asignatura “Matemáticas Discretas”.

En el **CAPÍTULO 4: ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS** para mostrar cómo los elementos del modelo didáctico propuesto se aplicaron en cada una de las actividades desarrolladas, se ejemplifica con la actividad de dinámica de poblaciones. Para hacer este análisis, se escogió el grupo compuesto por cuatro estudiantes de Ingeniería de Sistemas de la Institución Universitaria Panamericana Compensar.

En la primera etapa de **Motivación**, se hizo una introducción al tema de dinámica de poblaciones, donde se realizó un recorrido histórico de la temática, pasando por sus representantes principales.

En la etapa de Discusión se realizó la experimentación la cual consistió en colocar 50 dados en una bolsa, se agitaron y vaciaron en el suelo, luego se retiraron los que en la parte superior del dado tenían el puntaje 1 o 3 (muertos), después se colocaron nuevamente los sobrevivientes (los que en la parte superior tenían el puntaje 2, 4, 5 o 6) en la bolsa y se adicionaron 10 inmigrantes en cada generación. Se hizo esto, una y otra vez y se registraron los datos obtenidos experimentalmente en una tabla. Ahora, se procedió a analizar los datos recogidos a través de la siguiente secuencia de preguntas: (1) ¿Cuál fue la conjetura que surgió después de realizar este experimento?, (2) Si teóricamente, se asumió que muere (1/3) en cada

<sup>55</sup> Pérez, F. F. (18 de febrero de 2000). *iblio 3W. Revista Bibliográfica de Geografía y Ciencias Sociales*. Recuperado el 2 de diciembre de 2014, de [iblio 3W. Revista Bibliográfica de Geografía y Ciencias Sociales: http://www.ub.edu/geocrit/b3w-207.htm](http://www.ub.edu/geocrit/b3w-207.htm) Union, S. –G. (2005). *Getting Started with ODL*.

generación y sobrevivió (2/3) en cada generación, entonces, ¿cuál fue la ecuación que mejor relacionó  $b(n+1)$  y  $b(n)$ ?, (3) Ahora, a partir de la ecuación en diferencias obtenida, se hallaron los valores de  $b(n+1)$  para  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$  y se expresaron en función de  $b(0)$  y (4) A partir de lo anterior, se dedujo una fórmula razonable para  $b(n)$ , es decir, se encontró una función discreta en la variable  $n$ , para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Para deducir la fórmula cerrada en variable discreta, fue necesario el apoyo del docente. A modo de Práctica en la última etapa de la actividad, se propusieron diversos problemas del tema de crecimiento y decrecimiento exponencial (dinámica de poblaciones) para que los estudiantes los realizaran. Aquí se buscó que ellos afianzaran el conocimiento adquirido en la fase de motivación y discusión.

A continuación, se hace una descripción de lo ocurrido durante la ejecución de una de las actividades didácticas desarrolladas por los estudiantes de Ingeniería de Sistemas de la Institución Universitaria Panamericana Compensar.

Nos referiremos a la **Actividad 8: Teselación de Reticulos**. En esta actividad, la intención es que los estudiantes modelaran matemáticamente utilizando ecuaciones en diferencias lineales de orden superior.

Los comentarios que hacen los estudiantes durante y después de la actividad de Teselación de Reticulos son los siguientes:

1. Bastante didáctico el trabajo con las cartulinas para aprender matemáticas.
2. Experimentar, tomar datos, llegar a una ecuación en diferencias y hallar una generalidad.
3. Aprender a modelar matemáticamente haciendo todo el proceso.

Se presentaron las siguientes dificultades:

1. Encontrar la ecuación en diferencias del teselado del retículo de tamaño  $n \times 1$  unidades con baldosas cuadradas que no se superponen, de tamaño  $1 \times 1$  y dobles del mismo color, de tamaño  $2 \times 1$ .
2. Obtener la ecuación en diferencias con baldosas de tamaño  $1 \times 1$  y de tamaño  $3 \times 1$ , en la rejilla de tamaño  $n \times 1$ .
3. Al obtener las raíces del polinomio característico, algunos estudiantes tienen aún inconvenientes de tipo algebraico.
4. Hallar la fórmula cerrada para la variable discreta “ $n$ ”, que sirviera para saber el número de baldosas que se necesitan para cualquier “ $n$ ”.

Finalmente, a fin de determinar la Percepción de los estudiantes se aplicó un instrumento a 30 estudiantes al final de la investigación, responden lo siguiente. Lo información recolectada permite el Análisis de los datos obtenidos usando las siguientes categorías: Necesidades: Una de las necesidades que se detectaron en esta investigación, es la carencia de contenidos en los curriculums de los cursos de ecuaciones diferenciales y en diferencias, así como en matemáticas discretas, donde no se enfatiza de forma directa la modelación matemática. Se observó que los estudiantes tienen insuficiencias a la hora de modelar matemáticamente, debido a que poseen falencias en algunos temas de asignaturas anteriores a la Matemática Discreta como Álgebra Lineal, Cálculo Diferencial e Integral y Ecuaciones Diferenciales.

Los modelos matemáticos que los estudiantes conocen, son modelos continuos que estudiaron en la asignatura ecuaciones diferenciales y no se habían enfrentado a estudiar los modelos discretos. Respecto a la Postura teórica, En esta investigación se asume como postura teórica el pseudoempirismo (Hersh 1997), el cual se concretó en el diseño de actividades siguiendo la secuencia: motivación, experimentación, discusión y práctica. Esta secuencia se evidencia en cada una de las actividades. Cabe destacar, que los estudiantes se

sintieron muy motivados al utilizar la experimentación y toma de datos reales, lo que les permitió formular conjeturas y llegar a modelar matemáticamente.

Las **respuestas** a las necesidades o carencias se dan desde la resolución de problemas, las ecuaciones en diferencias y el cuasi empirismo. Según los tres elementos anteriores, las respuestas que pueden darse son las siguientes:

- Se utilizó la metodología de resolución de problemas de Polya, en la que cada una de las actividades comenzó con la motivación, luego la experimentación, la discusión y la práctica (suficientes problemas retadores para que afianzaran su conocimiento).
- La experimentación cuya postura fue el cuasi empirismo de Hersh, en la cual se hizo todo el proceso de modelación matemática, iniciando desde la toma de datos.
- La formulación de conjeturas por parte de los estudiantes, responde a la necesidad de predecir posibles comportamientos de las situaciones planteadas.
- Se presentaron muy diversas situaciones con variable discreta (el juego de la vida, torres de Hanói, teselados, cadenas de Markov, ecuación logística y caos).
- El uso de software matemático como herramienta fundamental en el procesamiento de datos y como método de verificación de soluciones.
- En todas las actividades, se partió de problemas contextualizados en los que se facilitó el hacer matemáticas en un contexto.

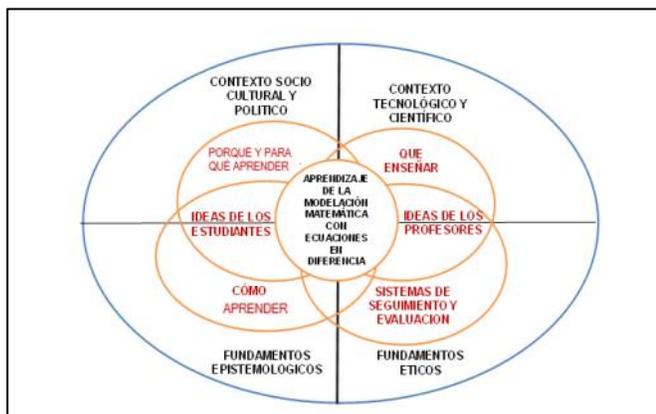
Algunas **reacciones** verbales y escritas que tienen los estudiantes después de realizar esta investigación son:

- “Las actividades y experiencias lúdicas realizadas son diferentes a la forma tradicional de enseñar matemáticas y ayudan a que se aprendan las matemáticas de una forma más dinámica. Estas actividades generan recordación y es un método mucho más ameno para entender”.
- “Las actividades me parecieron muy importantes, desarrollé otra lógica de leer las matemáticas aplicadas”.
- “Estas actividades son excelentes, nos permitieron seguir desarrollando la lógica y aplicarla en la solución de problemas cotidianos”.
- “El hecho de realizar las actividades en grupo generaba el intercambio de diferentes puntos de vista, lo cual ayudó a encontrar las soluciones de los problemas. El aplicar a casos, ayuda a diferenciar cómo se ve la matemática aplicada”.
- “Que el docente no haya explicado cómo se resolvían los problemas, nos obligó a que nos esforzáramos más en la búsqueda de las soluciones a los problemas matemáticos”.
- “Las actividades me parecieron muy interesantes porque le veo la esencia a las matemáticas. Utilizar software matemático Maxima, nos ayudó a encontrar las soluciones a los problemas más rápidamente”.
- “Aprender a modelar matemáticamente recogiendo datos experimentales y luego llegar a una fórmula general, me parece que es muy importante en mi formación como ingeniero”.

## CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación, fue elaborar un Modelo Didáctico que mejore las competencias relacionadas con la modelación matemática y el pensamiento científico en contexto desde las

ecuaciones en diferencias para estudiantes de ingeniería. A tal efecto, a partir de las observaciones iniciales y de los elementos del Marco Teórico, se elaboró un Modelo Didáctico cuyos componentes quedaron involucrados en las actividades diseñadas y aplicadas.



A partir de la aplicación de los elementos constitutivos del Modelo Didáctico, este se enriquece como queda descrito en las siguientes conclusiones:

- Es importante y motivante, incluir en los cursos de Matemáticas Discretas el concepto de Sistema Dinámico Discreto, las ecuaciones en diferencias lineales homogéneas y no homogéneas de primer y orden superior y las nociones básicas de Sistemas Caóticos sin usar el cálculo.
- La aplicación de las actividades diseñadas en esta investigación, permitió que los estudiantes adquirieran habilidades para la formulación y aplicación de modelos matemáticos utilizando las ecuaciones en diferencias. Estas habilidades que adquiere el estudiante son de mucha importancia en la formación del futuro profesional de ingeniería, puesto que le aporta elementos necesarios para la toma de mejores decisiones.
- A través de la experimentación, formulación de conjeturas, toma de datos, análisis de gráficas, obtención de la ecuación en diferencias y el hallazgo de la fórmula discreta cerrada en variable discreta para cada una de las situaciones específicas planteadas a lo largo de las actividades, los estudiantes se apropiaron de herramientas fundamentales para la modelación matemática, lo cual sirvió para que construyeran su propio conocimiento.
- Los estudiantes mostraron a lo largo de la aplicación de las actividades motivación e interés en el desarrollo de cada una de ellas por la aplicabilidad que tienen. Además, se evidenció un progreso del grupo en el manejo de los conceptos involucrados y satisfacción por los logros alcanzados a pesar de las dificultades que algunos grupos tuvieron.
- Se resaltan las ecuaciones en diferencias como elemento innovador aplicado a diferentes situaciones: modelado de la evolución de poblaciones, funcionamiento de Google, teselados, procesos caóticos, etc., utilizando el software Maxima como herramienta tecnológica para apoyar el procesamiento de datos y el aprendizaje de la modelación matemática.
- En las actividades se utiliza la concepción cuasi empírica de la matemática de Hersh, teniendo en cuenta que la matemática se aprende haciendo matemáticas. A partir de lo anterior, las actividades incluyen la motivación, conjeturación, experimentación, discusión y práctica, elementos esenciales para aprender a modelar matemáticamente.

- Después de la aplicación de cada una de las actividades, se logró motivar a los estudiantes debido a que el diseño de estas, permitió que ellos aprendieran matemáticas haciendo matemáticas desde la conjeturación y experimentación. El modelo didáctico, permitió abordar el problema de Inclusión-Calidad, el cual busca incluir cada vez más estudiantes en el proceso de aprendizaje de las matemáticas de una manera amable, motivadora y contextualizada que haga que los estudiantes se apropien de su conocimiento y esto redunde en su alta calidad como profesional en ingeniería.
- En el sistema educativo colombiano, hay una fuerte tendencia a las prácticas docentes tradicionales, que poco a poco han incorporado recursos de información y comunicación tecnológica, pero que aún mantienen esquemas de enseñanza tradicionales, sin propiciar una participación activa de los estudiantes. La intencionalidad del sistema de actividades didácticas implementado en esta tesis, fue procurar que la participación activa de los estudiantes se hiciera realidad.
- Los estudiantes manifestaron en el instrumento final aplicado su deseo de “más explicación por parte del docente”, pues dentro de la cultura estudiantil se denota un apego al modelo de enseñanza tradicional en el cual para el estudiante, el docente asume un rol paternalista lo que no promueve el aprendizaje autónomo.
- Los estudiantes compararon los métodos de solución en variable discreta (ecuaciones en diferencias) y en variable continua (ecuaciones diferenciales) y comprobaron que los modelos discretos en muchas situaciones son una alternativa adecuada para modelar matemáticamente.
- En relación a los sistemas de seguimiento y evaluación, se manejó un sistema de retroalimentación basado en la observación de los episodios de clase (bitácoras, filmaciones, trabajo de los estudiantes, etc.), lo cual permitió valorar los logros alcanzados.

## RECOMENDACIONES

1. Para futuras investigaciones, se recomiendan realizar trabajos en variable discreta aplicada a pre cálculo y matemáticas financieras, en los cuales pueden resolverse problemas contextualizados interesantes sólo utilizando aritmética.
2. Se recomienda aplicar actividades con intervalos de tiempo suficiente, que permita a los estudiantes madurar los conceptos involucrados en cada una de ellas y así poder desarrollar el syllabus de la asignatura matemáticas discretas.
3. El uso de software matemático en el aula hace que los procesos en la resolución de problemas sean más rápidos y además genera en el estudiante una motivación personal que le ayuda para que aprenda matemáticas.
4. Se recomienda que en todos los currículums de matemáticas para estudiantes de ingeniería, se incluya el tema de la modelación matemática que involucre dentro de la estrategia elementos como la experimentación, formulación de conjeturas, comprobación, demostración y aplicación, los cuales le proporcionen al estudiante insumos para aprender a manejar modelos continuos y discretos.
5. En futuros estudios y aplicaciones del modelo didáctico, sería recomendable la participación de equipos de profesores que intercambien ideas y promuevan mejoras en dicho modelo.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Advances in Difference Equations. 3<sup>rd</sup> International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2014).

- Agarwal, R.P. (1992). *Difference Equations and Inequalities*, Marcel Dekker, New York.
- Alligood, K., T. Sauer, J. Yorke. (1997). *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York.
- Baldoni, M. W., et al (2009). *Elementary Number Theory, Criptography and Codes*. Università di Roma. Springer. Italia.
- Banasiak, J (2013). *Mathematical Modelling in One Dimension. An Introduction via Difference and Differential Equations*. Cambridge University Press.
- Barrantes, H (2006). Resolución de Problemas. El trabajo de Allan Schoenfeld.
- Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta Matemáticas, UCR. Escuela de Ciencias exactas y naturales UNED. Año . No.1.
- Barquero, Bosch y Gascón. La modelización como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de Ciencias. Universidad Autónoma de Barcelona. Recuperado el 13 de mayo de 2012 en <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2507874>
- Beeler, R.A. (2015). *How to Count. An introduction to Combinatorics and Its Applications*. Department of Mathematics and Statistics East Tennessee State University. Springer, Johnson City.
- Bender, E. (1978). *An Introduction to Mathematical Modeling*. University of California, San Diego. A Wiley Interscience Publication. EEUU.
- Birkhoff, G. (1930). Formal theory of irregular difference equations, *Acta Math.* 54. 205–246.
- Brito M.L, Romero I. A, Guerra E.F. (2011). El papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros. *Ingeniería Mecánica*. Vol. 14. No. 2, mayo-agosto.
- Burger, E., B., Starbird, M. (2001). *The Heart of Mathematics. An invitation of effective thinking*. Williams College, The University of Texas at Austin. John Wiley and Sons, INC. Third Edition.
- Camarena, P. (s.f.) (2014). Matemáticas del mundo real. Recuperado el 30 de Octubre de 2014, de Matemáticas del mundo real: [http://www.m2real.org/IMG/pdf\\_Patricia\\_Camarena\\_Gallardo-II.pdf](http://www.m2real.org/IMG/pdf_Patricia_Camarena_Gallardo-II.pdf) Camarena, P. (s.f.).
- Camarena, P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. Instituto Politécnico Nacional México. [Versión electrónica] *Innovación Educativa*, Vol. 9, núm. 46, enero-marzo, pp. 15-25. Recuperado el 8 de mayo de 2012 en <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/1794/179414894003.pdf> URL:
- Devaney, R. (1992). *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiments*, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Duane Detemple, W. (2014). *Combinatorial Reasoning. An Introduction to the Art of Counting*. Department of Mathematics Washington State University Pullman, WA. Published by John Wiley & Sons, Inc.
- Dujet, C. (2007). Matemáticas del Mundo Real. Recuperado el 30 de Octubre de 2014 en el URL: <http://www.m2real.org/spip.php?article2>.
- Elaydi, S. (2003). Is the world evolving discretely? *Adv.in Appl. Math.* 31(1) 1–9.
- Elaydi, S. (2005). *An Introduction to Difference Equations*. (Third Edition). Springer.
- Feigenbaum, M. (1978). Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, *J. Statist. Phys.* 1925–52.
- Feldman P. David (2012). *Chaos and Fractals. An elementary introduction*. College of the Atlantic, Bar Harbor, Maine, USA. Primera impresión. OXFORD University Press.
- Font Vicent (2003). Matemáticas y Cosas. Una mirada desde la Educación Matemática. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No. 2.
- Fractales. Recuperado el 23 de mayo de 2016 en el URL: <http://www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/3.html>.
- Gardner, M. (2001). The Colossal Book of Mathematics. Classic Puzzles, Paradoxes and Problems. Mathematical Institute, University of Warwick. W.W. Norton y Company, Inc.London.
- Gardner, M. (1983). *Wheels, Life and Other Mathematical Amusements*. W.H. Freeman and Company New York.
- Gleick, J. (2012). *Caos. La creación de una ciencia*. Traducido por Juan Antonio Gutiérrez-Larraya. Editado por CRÍTICA, S.L., Diagonal 662-664, 08034 Barcelona (España).
- Gordon, S., et al (2004). *Functioning in the Real World. A Precalculus Experience*. Farmingdale State University of New York. Second Edition. Editorial Pearson. EEUU.
- Hein, N., y Biembengut, M. S. (2006). Modelaje Matemático como Método de Investigación en Clases de Matemáticas. [Versión Electrónica]. V Festival Internacional de Matemáticas, 1-25.
- Hersh R. (1997). *What is mathematics Really?* Oxford University Press, Inc.
- Hernández M. Néstor (2012). *Acciones didácticas para mejorar el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en carreras de Ingeniería*. Tesis de Maestría Universidad Antonio Nariño. Bogotá.
- Hernández Sampieri, R. (2010). *Metodología de la Investigación*. Quinta Edición. Editorial McGraw Hill, México D.F., páginas 364-365.
- Kaiser G., et al. (2011). *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. ICTMA 14*. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling 1. Springer Dordrecht Heidelberg London New York.
- Lakatos, Imre (1976). A Reanissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics. Published by Oxford University Press on behalf of The British Journal for the Philosophy of Science. Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/686119>.
- Lakshmikantham, V. and D. Trigiante (2002). *Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications*, Second Edition, Marcel Dekker, New York.
- Lay David C., y Lay Steven R. (2016). *Linear Algebra and its Applications*. Fifth Edition. Editorial Pearson. University of Maryland, College Park, EEUU.
- Ley de Enfriamiento de Newton. Ecuadiaz – Sites – Google. Recuperado el 23 de mayo de 2016 en el URL: <http://sites.google.com/site/ecuadiaz/ley-de-enfriamiento-de-newton>.
- Ley de Enfriamiento de Newton. Recuperado el (23-05-2016) en el URL: <http://www.sc.edu/es/sbweb/fisica/estadistica/otros/enfriamiento/enfriamiento.htm>
- Lewin K. (1946). Action research and minority problems. *Journal of Social Issues*, Vol. 2 (4), p - 34-46.
- Li, T.Y., and J.A. Yorke. (1975). Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly* 82. 985–992.
- May, R. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics, *j. Revista Nature* 261, 459-467
- Mazen Shain (2015). *Explorations of Mathematical Models in Biology with Maple*. Department of Mathematical Sciences Delaware State University Dover, DE, USA. Published by John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- Mickens, R. (2000). *Applications of nonstandard finite difference schemes*, World Scientific, Singapore.
- Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Magisterio.(p 52)
- Neuhauser C. (2011). *Calculus for Biology and Medicine*. Third Edition. University of Minessota. Editorial Prentice Hall, Pearson Education , Inc.
- Paul Cull Mary Flahive Robby Robson (2005). *Difference Equations From Rabbits to Chaos*. Editorial Board. Springer Science Business Media, Inc.
- Pérez, F.F. (2000). *Revista Bibliográfica de Geografía y Ciencias Sociales*. Recuperado el 2 de diciembre de 2014, de biblio 3w.

- <http://www.ub.edu/geocrit/b3w-204.htm>. Union, S.G.(2005). Getting Started with ODL.
- Poincare, H. (1885). Sur les equations lineaires aux differentielles ordinaires et aux differences finites, *Amer. J. Math.* 7. 203–258.
- Salinelli E., Tomarelli F. (2014). *Discrete Dynamical Models*. Unitext. Volume 76. Tercera Edición. Springer. Department of Mathematics Trinity University San Antonio, Texas. Editorial Board. Springer Science Business Media, Inc.
- Slavit, David; Cooper, Kevin; LoFaro, Tom (2002). *Understandings of solutions to differential equations through contexts*, Web-based simulations, and student discussion. Publicación: School Science and Mathematics. Editorial Blackwell Publishing Ltda. Hoboken, United Kingdom.
- Simiode Group (2014). <https://www.simiode.org/about>
- Simiode Group. M&M – Death and Immigration (Student Version).
- Srini D., Lehman E. (2005). Mathematics for Computers Science. *Recurrences. Lecture Notes*. The Towers of Hanói.
- Strogatz, S. (2001). *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, Perseus Books Group.
- Trejo Trejo, E.; Camarena Gallardo, P; Trejo Trejo, N. (2013). Las matemáticas en la formación de un ingeniero: una propuesta metodológica. *Revista de Docencia Universitaria. REDU*. Vol. 11, Número especial dedicado a Engineering Education, pp. 397-424. Recuperado el 25 de abril de 2015 en <http://red-u.net>
- Todorova, Tamara Peneva (2013). An Easy Way to Teach First-order Linear Differential and Difference Equations with a Constant Term and a Constant Coefficient. Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=2217820> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2217820>
- Valdez, L. et al (2005). *Implementación de Software para la Enseñanza de las Ecuaciones en Diferencias con valores iniciales*. Instituto Superior Andalgá-Catamarca.
- Villa, J.A. y Ruíz, H.M. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista Virtual Universidad del Norte*. No 27 (mayo – agosto de 2009, Colombia).
- Wanmei Soon, Luis Tirtasanjaya Lioe & Brett McInnes (2011). *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Understanding the difficulties faced by engineering undergraduates in learning mathematical modeling.
- Winkel, B. (2011). *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Cross coursing in mathematics: physical modelling in differential equations crossing to discrete dynamical systems.
- Mathematical Sciences, United States Military Academy, 646 Swift Road, West Point, NY 10996-1501, USA.
- Winkel, B. J. (2013). Browsing Your Way to Better Teaching. PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies. 23(3): 274-290. [www.icfes.gov.co/examenes/saber-pro/informacion-general/que-se-evalua](http://www.icfes.gov.co/examenes/saber-pro/informacion-general/que-se-evalua)
- Wikipedia, la enciclopedia libre. Juego de la vida. Recuperado el 23 de mayo de 2016 en el URL: [http://es.wikipedia.org/wiki/Juego\\_de\\_la\\_vida](http://es.wikipedia.org/wiki/Juego_de_la_vida).
- Wikipedia, la enciclopedia libre. Juego de la vida. Recuperado el 23 de mayo de 2016 en el URL: <http://es.wikipedia.org/wiki/Teselado>.
- Wikipedia, la enciclopedia libre. Las torres de Hanói. Recuperado el 21 de mayo de 2016 en el URL: [http://es.wikipedia.org/wiki/Torres\\_de\\_Hanói](http://es.wikipedia.org/wiki/Torres_de_Hanói).
- Wikipedia, la enciclopedia libre. Cadenas de Márkov. Recuperado el 21 de mayo de 2016 en el URL: [http://es.wikipedia.org/wiki/Cadena\\_de\\_Márkov](http://es.wikipedia.org/wiki/Cadena_de_Márkov).
- Wikipedia, la enciclopedia libre. Ecuación Logística. Recuperado el 31 de julio de 2016 en el URL: [http://es.wikipedia.org/wiki/Pierre-François\\_Verhulst](http://es.wikipedia.org/wiki/Pierre-François_Verhulst).
- Wikipedia, la enciclopedia libre. Teoría del Caos. Recuperado el 31 de julio de 2016 en el URL: [http://es.wikipedia.org/wiki/Edward\\_Lorenz](http://es.wikipedia.org/wiki/Edward_Lorenz).
- Yasuyuki Nakamura, Koichi Yasutake and Osamu Yamakawa (2012). IADIS *International Conference on Cognition and Exploratory Learning in Digital Age* (CELDA). Some Aspects of mathematical model of collaborative learning.

## UNA CARACTERIZACIÓN DE LOS TIPOS DE INSIGHT EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS PLANTEADOS EN EL SALON DE CLASES

CARLOS ALBERTO CAÑÓN RINCÓN  
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia  
[carloscanon@uan.edu.co](mailto:carloscanon@uan.edu.co)

MAURO M. GARCÍA PUPO  
Director de Tesis  
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia  
[mauro@uan.edu.co](mailto:mauro@uan.edu.co)

### Abstract

This research had as an objective the design of a methodology that would allow appreciating and characterizing the occurrence of *Insight* in convergent and divergent types of mathematical thinking that are present in the problem solving achieved by students of a course of the bachelor's degree in mathematics teaching in the Antonio Nariño University.

A qualitative approach was used in a case study composed of two experiences, the first experience corresponding to the second

academic semester of 2015, and the second, to the first academic semester of 2016. An elective course entitled "Development of mathematical thought through problem solving", was the setting in which this observation was made. This elective course had also the aim of contributing to the formation of the future mathematics professor, in a way that he or she can deepen the mathematical thought used in the process of problem solving.

As part of the analysis and discussion of the results obtained in the two experiments, it was possible to identify and characterize three types of *insight* in relation to the types of convergent and divergent