

- Mathematics Education (CERME 8)*. En Manavgat-Side, Antalya – Turkey.
- Penn, A. (2012). *The Alignment of Preservice Elementary School Teachers' Beliefs concerning Mathematics and Mathematics Teaching* (Tesis de maestría). Queen's University, Kingston, Ontario, Canada.
- Pepin, B. (1999). *Epistemologies, beliefs and conceptions of mathematics teaching and learning: The theory, and what is manifested in mathematics teachers' work in England, France and Germany*. NTTEE Publications, 2(1), 127-146.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Traducción Julián Zugazoita. México: Trillas.
- Roscoe, M., & Sriraman, B. (2011). A quantitative study of the effects of informal mathematics activities on the beliefs of preservice elementary school teachers. *Zdm*, 43(4), 601. doi:10.1007/s11858-011-0332-7
- Skott, J. (2009). Contextualizing the notion of 'belief enactment'. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(1), 27-46.
- Steiner, H. (1987). Philosophical and epistemological aspects of mathematics and their interaction with theory and practice in mathematics education. *Learning of Mathematics* 7(1), 7-13.
- Thompson, A. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 105-127.
- Thompson, A. (1992). *Teacher's beliefs and conceptions: a synthesis of the research*. En D.A. Grouws, (Ed.), *Handbook on mathematics teaching and learning*. (pp. 127-146). New York: Macmillan.
- UNESCO. (2014). *Enseñanza y aprendizaje: Lograr la calidad para todos*. París: Ediciones UNESCO.
- Walker, D. (2007). *The development and construct validation of epistemological beliefs survey for mathematics* (Tesis doctoral). Oklahoma State University, E.U.A.
- White-Fredette, K. (2009). What is Mathematics? An Exploration of Teachers' Philosophies of Mathematics during a Time of Curriculum Reform. Middle-Secondary. *Education and Instructional Technology Dissertations*. Paper 46.
- White-Fredette, K. (2009/2010). Why Not Philosophy? Problematising the Philosophy of Mathematics in a Time of Curriculum Reform. *The Mathematics Educator*, 19(2), 21-31.
- Yang, X. (2014). *Conception and Characteristics of Expert Mathematics Teachers in China*. Berlin: Springer.

## CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO ROBUSTO PARA EL CONCEPTO DE ÁREA Y CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO INVOLUCRADO EN LOS ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO (niños entre 10 y 13 años)

DIANA CAROLINA PÉREZ DUARTE  
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia  
dianacperez@uan.edu.co

MARY FALK DE LOSADA  
Directora de tesis  
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia  
rectoria.uan@gmail.com

### Resumen

El propósito de esta investigación es la construcción de significado robusto del concepto de área y la caracterización del pensamiento geométrico involucrado, en los estudiantes de grado sexto de los Colegios: Antonio Nariño sede Usme, Liceo Fesán, el Bosque Bilingüe y Tibabuyes Universal I.E.D. Se diseñaron once actividades, las que se implementaron a 176 estudiantes. En el proceso de solución de cada problema planteado, los estudiantes comienzan a construir el concepto de área utilizando su pensamiento geométrico operacionalmente, a partir de elementos básicos de la geometría griega.

Para las actividades se propone un conjunto de problemas bajo la estructura de las competencias matemáticas, frente a los cuales, los estudiantes ofrecen estrategias que les permite realizar transformaciones a las figuras geométricas por medio de acciones de descomposiciones, recomposiciones y comparaciones. Las actividades diseñadas propician que los estudiantes lleguen a deducir fórmulas aritméticas para calcular el área de diferentes figuras geométricas. La implementación de cada una de las actividades y los resultados obtenidos en las entrevistas, permitió evidenciar las estrategias utilizadas por los estudiantes en el proceso de solución de los diferentes problemas, para constatar los elementos que caracterizar el pensamiento geométrico involucrado con respecto al concepto de área.

### Abstract

The purpose of this research is the construction of robust meaning of the concept of area and the characterization of the geometric thinking involved in sixth-grade students of four different schools. The schools were chosen to include students from varying socio-economic levels as well as both public and private schools. The participating schools were: Colegio de la Universidad Antonio Nariño in Usme, Liceo Feán, Colegio El Bosque Bilingüe and Colegio Tibabuyes Universal I.E.D. Twelve activities were designed, which were implemented with 176 students. In the process of solving every problem posed, students begin to build the concept of area using their geometric thinking operationally, following the approach of classic elements of Greek geometry.

A series of activities was designed to allow the students to approach problems of area from an essentially geometric perspective. For each of the activities a set of problems, either taken from or similar to the non-routine or challenging problems found in popular mathematics competitions, is proposed. Working in groups, students offer their own strategies of solution using transformations to the geometric figures through actions of decomposition, recombination and comparison, gradually constructing the concept of area. The activities designed also propitiate that students arrive, through similar means of decomposition and recombination, at arithmetic formulas to calculate the area of different geometric shapes. The implementation of each of

*the activities and the results obtained in the interviews of a random sample of students, allowed evidence to be compiled concerning the strategies used by the students in the process of resolution of the different problems and to ascertain elements that characterize the geometric thinking involved in the construction of meaning for the concept of area.*

## INTRODUCCIÓN

La geometría es una de las ramas de la matemática con mayor presencia en la naturaleza y en la vida. En la actualidad, se realizan investigaciones concernientes al proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría y el desarrollo del pensamiento geométrico. Algunos de estos estudios se enfocan en la realización de unidades didácticas, métodos de enseñanza, uso de recursos informáticos, entre otros, para mejorar la comprensión, desempeño y desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes.

Dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría se evidencian varias debilidades. Una primera de ellas es la manera en que en general se suele plantear el quehacer instructivo en el salón de clases, donde el profesor da importancia sólo al reconocimiento (abstracción de algunas de las propiedades) de las figuras geométricas

y memorización de fórmulas para calcular áreas, volúmenes, perímetros, entre otras; con un tratamiento y orientación como éste no se contribuye al desarrollo del pensamiento geométrico del estudiante.

Con respecto a las investigaciones, algunas de éstas se dedican a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría. Estos trabajos no mencionan de qué manera se puede enfocar el aprendizaje para que los estudiantes construyan significado robusto de los conceptos geométricos, y específicamente para el que nos interesa en la presente tesis, el de área, de tal forma que el proceso de aprendizaje sea perdurable. Por ejemplo, las unidades didácticas que se elaboran en el contexto de varias investigaciones continúan con la formulación de ejercicios en lugar de problemas de corte no rutinario, como los problemas de competencias matemáticas, práctica que institucionaliza el aprendizaje como adquisición de definiciones, métodos y procedimientos.

En el tema de área, se sigue dando importancia a las fórmulas y su cálculo por medio de ellas, circunscribiendo el trabajo a la aritmética, en lugar de dar oportunidad a los estudiantes a potencializar su pensamiento y autonomía en la construcción de significado geométrico para este concepto. El proceso desarrollado de esta última forma permitiría la resolución de problemas no rutinarios enfocados a una amplia gama de situaciones incluyendo problemas pertinentes a la vida cotidiana.

Frente a esta situación, se ve la importancia de tener en cuenta la investigación de Pérez (2011)<sup>1</sup>, que versó sobre la construcción de significado para el concepto de área de algunas figuras geométricas planas, dirigida a estudiantes de grado sexto. Con la motivación de continuar con este proceso de investigación, se pretende seguir explorando el desarrollo del pensamiento geométrico y las condiciones, actividades y prácticas pertinentes para llegar a construir significado robusto para el concepto de área y caracterizar el pensamiento geométrico involucrado.

En efecto, el enfocarse en el desarrollo del pensamiento geométrico, sin precisar o caracterizar dicho pensamiento, ocupa a muchas investigaciones internacionalmente y ha sido tratado en numerosos eventos, tales como los Congresos Internacionales de Educación

Matemática (ICME 1995 hasta 2012), las Conferencias Interamericanas de Educación Matemática (CIAEM o IACME 1961, 1987 y 1995), las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa (RELME), los Congresos Iberoamericanos de Cabri (IBEROCABRI) y los Congresos de la Sociedad Colombiana de Matemática (SCM).

Las investigaciones acerca del desarrollo del pensamiento geométrico se reflejan en las siguientes tendencias, y los investigadores que las adelantan.

1. Trabajos cuyo interés radica en la validación del conocimiento geométrico y centran su atención en las concepciones de los estudiantes acerca de cómo se valida éste. En este sentido se destacan: Krygowska (1980); Hanna (1991), Holowey (1969).

2. La preocupación por el razonamiento espacial, como elemento esencial del pensamiento científico, que agrupa varias líneas de investigación, como aquellas que intentan establecer relaciones entre el pensamiento espacial y las matemáticas. Entre los que han trabajado en esta línea se tienen: Del Grande (1990); Bishop (1993); Mammana y Villani (1998).

3. Las referidas al estudio de la visualización que intentan establecer las interacciones entre ésta y el razonamiento en geometría, y otras que buscan determinar mecanismos para incrementar la habilidad espacial en los aprendices. En este sentido se destacan: Presmeg (1986); Clement y Battista (1992); Fischbein (1993); Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996); Gutiérrez (1996); De Guzmán (1996).

4. Las que apuntan al desarrollo evolutivo del pensamiento geométrico y están orientadas por los avances de la psicología cognitiva. Se destacan trabajos realizados por Piaget, acerca de la concepción del espacio en los niños, y los estudios de los esposos Van Hiele (1957), encaminados a determinar niveles de pensamiento geométrico y etapas de instrucción correspondientes. Tall (2013), describe en su último libro una teoría que versa sobre el desarrollo del pensamiento matemático desde el niño menor hasta el adulto.

5. Desde la ciencia cognitiva se intentan precisar modelos de conocimiento y pensamiento geométrico. En este sentido se destacan Sharma (1979), Bransford (1979); Jenkins (1979), Pinker (1994).

6. Sobre el desarrollo de las tecnologías de la información (TIC) y el uso extenso de recursos informáticos, lo anterior ha dado lugar a varias investigaciones en torno al aporte de las representaciones dinámicas y generalizadas. Algunos autores que aportan a esta temática son: Hitt (1998), Laborde (1998), Rizo y Campistrous (2003), Villiers (1999), González (1999).

Se enmarca la presente investigación por la primera, tercera, cuarta y quinta tendencias presentadas, sin desconocer el aporte que las demás posiblemente puedan ofrecer a ella.

Algunos de los autores citados tratan de caracterizar el pensamiento geométrico del niño; sin embargo, sus hallazgos no propician un aprendizaje desarrollador<sup>2</sup>, pues tienen entre sus limitantes que el diagnóstico se refiere al contenido curricular y no valoran el papel que tienen los estudiantes en construir significado de un concepto geométrico determinado.

Una de las últimas investigaciones que buscan caracterizar el pensamiento geométrico es el desarrollado por Tall (2013) en su libro: Como los seres humanos aprenden a pensar matemáticamente.

<sup>1</sup> Pérez, D. (2011). *Diseño, aplicación y evaluación de un sistema de actividades para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para sexto grado*. Tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia

<sup>2</sup> No todo aprendizaje es desarrollador; esto depende de las habilidades que desarrolla el estudiante, lo cual le permite buscar diferentes estrategias a la solución de un problema interesante.

En este escrito Tall (2013) comienza a describir el pensamiento matemático del ser humano como una construcción de conceptos a partir de dos tipos de abstracción, la estructural y la operacional.

Tall (2013), con respecto al desarrollo a largo plazo de las ideas matemáticas afirma:

*La geometría comienza cuando el niño juega con los objetos, reconociendo sus propiedades a través de los sentidos y describiéndolos utilizando el lenguaje. Con el tiempo, las descripciones se hacen más precisas y se usan como definiciones verbales para especificar figuras que pueden construirse con regla y compás y eventualmente las propiedades de las figuras pueden relacionarse en el enfoque formal de la geometría Euclidiana. El aprendizaje de la aritmética sigue una trayectoria diferente, empezando no enfocándose en las propiedades de los objetos físicos, sino en las acciones que se realizan sobre esos objetos las cuales incluyen el contarlos, agruparlos, compartirlos, ordenarlos, sumarlos, restarlos, multiplicarlos y dividirlos.*

*Estas acciones se vuelven operaciones matemáticas coherentes y se introducen los símbolos que permiten realizar las operaciones rutinariamente con muy poco esfuerzo consciente. Más sutilmente, los símbolos en sí mismos pueden verse no solo como operaciones a realizarse sino también comprimidos en conceptos numéricos mentales que pueden manipularse en la mente.*

*Los sistemas de medidas también se desarrollan a partir de acciones<sup>3</sup>: medir longitudes, áreas, volúmenes, pesos y otros. Estas cantidades pueden calcularse en forma práctica usando fracciones o usando decimales si se desea un nivel mayor de precisión.<sup>4</sup>*

Para esta investigadora la anterior afirmación elaborada por el profesor Tall (2013) en su libro no es acertada, ya que en la investigación realizada por Pérez (2011)<sup>5</sup>, se observó que los estudiantes lograban construir el concepto de medición (área) por medio de las acciones de descomposición-recomposición-comparación de algunas figuras geométricas planas abordadas en el contexto de la solución de problemas no rutinarios. El análisis de las actividades generadas en la tesis indicó que en el transcurso de la solución de cada problema no rutinario el estudiante complementa y adecúa cada vez más el significado del concepto de área. Los resultados obtenidos en la población de estudio mostraron que los estudiantes construyeron de esta manera un significado apropiado del concepto implicado fortalecido y reforzado por generar diferentes estrategias en la solución de los problemas planteados, y asimilar la potencia del concepto revelada en ellas.

Las valoraciones anteriores conducen al siguiente **problema de investigación**, para construir significado robusto<sup>6</sup> del concepto de área en los estudiantes de grado sexto, ¿cuáles son las experiencias que deben fomentarse y cómo puede caracterizarse el pensamiento geométrico involucrado?

Se precisa como **objeto de estudio** el proceso de construcción de significado para el concepto de área. El **objetivo general** es contribuir

a la caracterización del pensamiento geométrico relacionado con la construcción de significado robusto para el concepto de área.

Se plantean como **objetivos específicos**:

- Recopilar evidencia pertinente de la historia de la matemática, pues a través de ella se revela el camino transitado por la comunidad matemática en la generación y construcción de conceptos y estrategias de pensamiento.
- Diseñar actividades basadas en problemas no rutinarios y retadores, que hagan que los estudiantes del grado sexto construyan significado para el concepto de área y desarrollen estrategias para calcular el área de ciertas figuras planas, mediante la descomposición y recomposición de figuras y regiones geométricas planas.
- Analizar las soluciones de los problemas planteados y a través de éstas caracterizar el pensamiento geométrico de los estudiantes de grado sexto involucrado en la construcción de significado robusto para el concepto de área.
- Analizar la solución de los problemas olímpicos de matemáticas realizadas por la Universidad Antonio Nariño (Primer Nivel – grados sexto y séptimo).
- Analizar y sustentar una posición crítica con el fin de establecer si los planteamientos de la teoría de Tall (2013) son justificables o no frente al pensamiento geométrico cuyo desarrollo se observa en la construcción de significado robusto para el concepto de área.

El campo de acción de esta investigación es la caracterización del pensamiento geométrico.

Para el cumplimiento del objetivo y la solución del problema, se presentan las siguientes preguntas científicas:

- ¿Qué investigaciones se han realizado sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje en la geometría?
- ¿Qué presupuestos teóricos sustentan la caracterización del pensamiento geométrico relacionado con el concepto de área?
- ¿Cómo estructurar una secuencia de experiencias para poder caracterizar el pensamiento geométrico en estudiantes de grado sexto en el proceso de construcción de significado robusto para el concepto de área?
- ¿En qué contextos deben presentarse las experiencias estructuradas?
- ¿Cómo analizar la eficacia y el impacto de la secuencia de experiencias diseñadas para poder caracterizar el pensamiento geométrico en estudiantes de grado sexto en el proceso construcción de significado robusto para el concepto de área?
- ¿Cuál sería una caracterización del pensamiento geométrico involucrado en la construcción de significado robusto del concepto de área en niños de grado sexto?

En aras de dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, se proponen las siguientes tareas de investigación:

- Fundamentar teóricamente el problema. Revisar teorías propuestas e investigaciones realizadas en el diseño de actividades en geometría para caracterizar el pensamiento geométrico con el propósito de fundamentar la investigación.
- Construir el estado del arte de la presente temática para definir su grado de actualidad.
- Estudiar las soluciones de estudiantes de grado sexto a problemas pertinentes de las olimpiadas de matemáticas y otros similares y estructurar un sistema de actividades diseñadas (teniendo en

<sup>3</sup> Tall, D. (2013). Este autor define acción como la manipulación de los objetos geométrico.

<sup>4</sup> Tall, D. (2013). How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three words of Mathematics.

<sup>5</sup> Pérez, D. (2011). *Diseño, aplicación y evaluación de un sistema de actividades para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para sexto grado*. Tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia

<sup>6</sup> Pérez (2015). Criterio emitido en el examen de calificación.

“Construcción de redes conceptuales que desarrolla el estudiante para dar solución a problemas no rutinarios”

cuenta en el diseño problemas retadores como son los problemas olímpicos que provocan el pensamiento autónomo) para que, al desarrollarlas, el estudiante pueda construir significado para el concepto de área coherente con el nivel de la geometría del grado sexto y así contribuir a caracterizar el pensamiento geométrico involucrado, empleando del modelo de Wenger y con el propósito de contrastar las teorías de Tall (2013).

- Valorar los resultados de la implementación del sistema de actividades.
- Proponer una caracterización del pensamiento geométrico involucrado en la construcción de significado para el concepto de área en estudiantes de grado sexto.

El aporte práctico de la presente investigación radica en un conjunto de actividades para la construcción de significado del concepto de área desde un enfoque netamente geométrico. El aporte teórico es que se precisa una caracterización del pensamiento geométrico involucrado en tal construcción (áreas).

Este estudio permite sugerir los pasos que se cree se deben seguir en el proceso de enseñanza para que se construya el concepto de área en estudiantes de grado sexto, además de proponer la caracterización del pensamiento geométrico con respecto a la medición (área).

Esta tesis está estructurada en la introducción, cuatro capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos. En el Capítulo 1, se describe la situación actual en la que se encuentran estudios dirigidos al pensamiento geométrico, identificando los métodos de enseñanza que se utilizan para la geometría y poniendo en evidencia que no se han hecho suficientes investigaciones que caractericen este pensamiento. En el Capítulo 2, se presenta el marco teórico en que se basó este estudio y que se encuentra dividido en cinco partes, en la primera se expone un marco geométrico, en la segunda se expone la teoría piagetiana relevante, en la tercera se analiza la teoría de Tall acerca de la forma en que los seres humanos construyen el concepto de área, en la cuarta se expone la epistemología de Lakatos, Hersh y Davis que enriquecen las perspectivas del presente estudio, y en la quinta se describe el modelo de Wenger. El Capítulo 3 presenta la metodología en que se desarrolló esta investigación y los pasos en que se diseñaron y aplicaron las actividades. El Capítulo 4 se presenta la implementación de la propuesta metodológica y descripción de algunos episodios en la construcción del significado del concepto de área.

Además, se pretende construir un material docente que pauté el proceso de enseñanza - aprendizaje y el estudio del concepto de área.

## 1. ESTADO DEL ARTE

Diversas son las investigaciones que han trabajado sobre el pensamiento geométrico llegando a una aproximación a caracterizar éste, lo cual implica identificar diferentes formas de pensamiento relacionados con el hacer geometría (resolver problemas, conjeturar, demostrar teoremas). Los puntos de vista de estas investigaciones no son unificados.

Para el análisis de las caracterizaciones que se han desarrollado dentro de un marco geométrico se tendrá en cuenta algunas de las tendencias del pensamiento geométrico. Esta descripción se dividirá en cinco categorías donde se puntualizará cada una de las investigaciones que se han desarrollado en cada categoría:

1. Pensamiento geométrico como se entiende desde los niveles de Van Hiele
2. Pensamiento geométrico y su relación con la visualización
3. Materiales diseñados para desarrollar el pensamiento geométrico

4. Pensamiento geométrico como se entiende desde la ciencia cognitiva

5. Referencia de varios autores que intentan caracterizar el pensamiento geométrico

En estas categorías se destacan investigadores como Corberan y otros (1994), Malloy (1999), Pugalee y Malloy (1999), Beltrametti y otros (2003), Frimel (2004), entre otros, los cuales hacen referencia de cómo se entiende el pensamiento geométrico desde los niveles de Van Hiele. Sus propuestas van orientadas al diseño de métodos de enseñanza – aprendizaje a través de los niveles de Van Hiele. Por otra parte Bower (1983), Godino y otros (2011), Hitt (1998), entre otros, relacionan el pensamiento geométrico y la visualización. En sus trabajos brindan importancia a la relación entre los objetos geométricos y el desarrollo de determinadas operaciones o transformaciones. También consideran significativo el proceso de generación de imágenes mentales adecuadas para el desarrollo de las habilidades de visualización en la resolución de problemas en el salón de clases. Estos trabajos no hacen referencia a la caracterización del pensamiento geométrico.

Concerniente a la visualización Clements y Battista (1992), Del Grande (1990), Presmeg (1986), De Guzmán (1996) desarrollan diversos aportes, en particular De Guzmán (1996) establece varias categorías: isomorfa, homeomorfa, análoga y diagramática. Estos investigadores no llegan a concretar una caracterización del pensamiento geométrico, en la construcción de significado de un concepto geométrico. Por otro lado Coberán (1996), Tasayco, (1998), Richar (2009), Rojas (2009), entre otros, proponen en sus investigaciones la utilización de diversos materiales diseñados para desarrollar el pensamiento geométrico. Sus propuestas las desarrollan a través de materiales manipulables y elaborados con el apoyo de software de geometría dinámica.

Por último un intento por caracterizar el pensamiento geométrico lo hacen Piaget e Inhelder, los Van Hiele y Tall. Los primeros investigan acerca de las relaciones espaciales de los niños y proponen cuatro etapas de desarrollo en el pensamiento espacial. Los esposos Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof en el año 1957, elaboran una concepción cuyos componentes son la teoría de los niveles de razonamiento: visualización, análisis, deducción informal, deducción formal y rigor, que explican cómo se produce el desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes y proponen las fases de aprendizaje (interrogación, orientación dirigida, explicación, orientación libre, integración), lo cual resume su propuesta didáctica para el aula. Por su parte Tall (2013) propone una clasificación del pensamiento humano con respecto a la construcción del concepto de área.

## 2. MARCO TEÓRICO

Este capítulo tiene como objetivo situar al lector de la presente investigación, en la perspectiva conceptual utilizada en ella concerniente a la importancia de permitir a nuestros estudiantes la construcción de significado para el concepto de área de superficies planas y caracterización del pensamiento involucrado en tal construcción. El marco teórico estará dividido en cinco partes.

Primero, se expone un marco geométrico, donde se menciona los inicios de la geometría pertinentes al concepto de área, destacando algunos matemáticos que aportaron proposiciones generales (teoremas) de área por medio de la descomposición y recomposición de figuras geométricas.

Segundo, se estudia con juicio la teoría piagetiana de la construcción de conceptos geométricos en el niño, en particular, la construcción del concepto de área.

Tercero, se compara lo anterior con la teoría de Tall acerca de la forma en que los seres humanos aprenden a pensar geoméricamente y en particular como construyen el concepto de área.

Cuarto, se enmarca la investigación en la epistemología de Lakatos, Hersh y Davis que aprecia el “hacer matemáticas” como una empresa de una comunidad que, en un diálogo que se desarrolla en la historia, avanza por medio de “pruebas y refutaciones”. En este enfoque se detalla los intercambios estudiantiles en el contexto de la solución de una serie de problemas relacionados con la determinación del área de ciertas figuras o regiones planas, operando sobre las figuras o regiones (descomposición, recomposición, comparación), y produciendo así soluciones que van construyendo significado para el concepto de área cada vez más apropiado en relación con el concepto que se maneja en la comunidad matemática.

Por último, se describirá el modelo de Wenger (1998) presentando los aspectos que se tienen en cuenta para el desarrollo de esta investigación. Específicamente se retoma la teoría *Communities of Practice: learning, meaning and identity* (Wenger, 1998-2007); esta teoría contribuye al proceso de aprendizaje de los estudiantes que otras teorías no consideran prioritarias. Se dirige a describir cómo la práctica social propicia y mejora en el estudiante el desarrollo cognitivo.

### 3. DISEÑO METODOLÓGICO Y DE ACTIVIDADES

La investigación es de tipo teórico-descriptivo y es un estudio evolutivo y transversal, ya que en ella se produce una fotografía instantánea de una población en un momento determinado y se evalúan los cambios que se producen comparando las mismas personas en diferentes etapas de desarrollo de las actividades y demás componentes.

Adicionalmente, se trabaja con un análisis temático para interpretar el significado de la realidad del sujeto o autor de una situación estudiando sus representaciones, estrategias de solución y actitudes, de esta forma indagar sobre las diferentes etapas o procesos del pensamiento geométrico que desarrolla el individuo para construir significado robusto del concepto a estudiar y lograr categorizarlos. Se diseñaron actividades didácticas para ser desarrolladas en forma grupal e individual, observando tanto su desarrollo como sus resultados.

Esta investigación se desarrolló en cuatro colegios distintos, de diferentes perfiles en cuanto a su estudiantado, y está dividida en dos etapas. En la primera fase se aplica cada una de las actividades propuestas a un grupo de estudiantes de grado sexto pertenecientes a los colegios seleccionados. Se graban videos para analizar las estrategias que utilizan los equipos de estudiantes cuando están ejecutando sus respectivas actividades y los cuales sirven para el mejoramiento continuo, perfeccionando los materiales para luego ser implementados con un segundo grupo de estudiantes.

Se diseñó y elaboró la serie final de actividades didácticas que se realizaron a los estudiantes de grado sexto pertenecientes a los colegios seleccionados. Al finalizar el estudio se realizó una prueba - entrevista de forma individual, el cual se llevó a cabo con el segundo grupo de los cuatro colegios escogidos, para de este modo analizar cada una de las fases por las cuáles el estudiante progresa en la construcción de significado robusto para el concepto de área.

Con respecto a la descripción, y aplicación de las actividades se describieron los objetivos que se pretenden en cada una de las actividades y la aplicación de éstas para el desarrollo de la presente investigación, con el propósito de caracterizar el pensamiento geométrico con respecto a la medición.

Antes de diseñar las diferentes actividades que ayudaran a los estudiantes a construir el significado de área de ciertas figuras

geométricas planas y caracterizar el pensamiento involucrado se pensó en actividades que no fueran de tipo de rutina memorística, no se pretende desarrollar la habilidad sólo para responder una prueba, se busca ver si el estudiante construye este concepto por medio de la descomposición – recomposición – comparación, de esta forma analizar cuáles son los procesos de pensamiento que desarrolla el estudiante para construir el significado de este concepto.

Estas actividades presentan una estructura euclidiana donde se tienen en cuenta el concepto de área y las estrategias utilizadas en las demostraciones euclidianas. El propósito de estas actividades, es que el estudiante construya el significado del concepto de área por medio de la descomposición y recomposición de algunas figuras geométricas planas, y la posterior comparación, presentando en cada actividad una serie de problemas con el objetivo que el estudiante a medida que vaya solucionando cada problema, comience a construir el significado del concepto que se está trabajando.

Para el desarrollo de las actividades de descomposición – recomposición se plantean dos etapas, una primera de manipulación física que tiene como objetivo apreciar en cuántas formas se puede descomponer una figura. La segunda etapa es de manipulación mental, donde se proyectaron actividades en el papel para que el estudiante tenga la necesidad de utilizar su imaginación y pueda realizar la comparación del área de las figuras planas, haciendo correctamente esta representación en su dibujo.

Luego los estudiantes realizarán la etapa de comparación, que tiene como objetivo que lleguen a la conclusión que una misma área puede estar representada por diferentes formas geométricas, esta etapa se realizará en dos maneras, la primera donde no se utiliza la unidad de medida, la segunda descomponiendo en unidades de comparación, representados en triángulos, rectángulos, rombos y cuadrados.

A continuación los estudiantes efectuarán actividades de deducción de procedimientos aritméticos para encontrar el área de las figuras geométricas propuestas. La última actividad aborda el círculo donde el estudiante encontrará su área por métodos de aproximación.

Al finalizar este proceso se realizará una prueba - entrevista donde se tomará una muestra de los estudiantes que participaron en las etapas anteriores de la investigación, pues se quiere observar el carácter conceptual y procedimental del conocimiento que ponen en juego los estudiantes.

Para el desarrollo de cada una de las actividades se tiene en cuenta en su diseño los componentes de la teoría social del aprendizaje propuestos por Wenger, Lakatos, Hersh y Davis, enfatizando algunos aspectos como: contextualizar el problema de una manera que se conecte con los alumnos y sus intereses, ofrecer una situación que sale de las actividades habituales, poner a los alumnos en condiciones de apropiarse de la situación, para que puedan desarrollar por sí mismos la comprensión de su participación, colocar a los estudiantes en interacciones, haciéndolos trabajar en equipo o como un grupo, animar a los estudiantes a crear sus propias estrategias de uso de sus conocimientos matemáticos estableciendo vínculos entre los conceptos, animar a la reflexión y al debate, y a la adopción de un número determinado de estrategias o soluciones.

### 4. IMPLEMENTACIÓN DE LA PROPUESTA METODOLÓGICA Y DESCRIPCIÓN DE ALGUNOS EPISODIOS EN LA CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DEL CONCEPTO DE ÁREA

La investigación se desarrolló en el Colegio Antonio Nariño sede Usme, Liceo Fesán, y Colegio Del Bosque Bilingüe, de la Ciudad de Bogotá. La propuesta metodológica se dirige a la caracterización de este pensamiento, por medio del análisis de las estrategias de solución y los aportes que realizan los estudiantes a su grupo y al grupo en

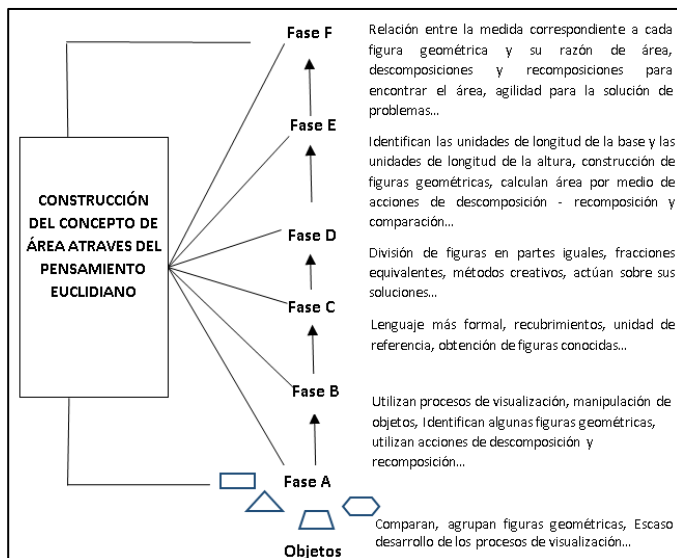
conjunto en cada colegio, demostrando las formas en que van construyendo significado robusto del concepto de área.

Con respecto a la descripción de algunos episodios en la construcción del significado del concepto de área, se da un breve reporte de la ejecución de la investigación, donde se señala algunas condiciones particulares de ésta, alcances y dificultades principales.

A continuación, se realiza una caracterización de las acciones y estrategias usadas por los estudiantes mientras desarrollaban cada una de las actividades en la etapa práctica de esta investigación, además se indicará que el trabajo autónomo de los estudiantes resulta un factor motivacional muy fuerte.

Caracterización de las acciones y estrategias usadas por los estudiantes

Este proceso de caracterización se refleja en el Gráfico 1, en la que se muestra cómo los estudiantes avanzan en sus procesos para la construcción de significado robusto del concepto de área, iniciando en una fase que se ha denominado Fase A hasta llegar a una fase culminante de la construcción que se ha nombrado Fase F.



**Gráfico 1. Avances de los estudiantes en cada Fase.**

Se diseñaron cinco actividades que contribuyeron a caracterizar el pensamiento en cada fase, en las cuáles se identificaron las características del pensamiento que evidencian los niños en cada una de éstas.

En la Fase A, se inicia con una prueba de entrada donde el desempeño estudiantil se caracteriza en general por los siguientes aspectos.

- Falta de claridad en los procesos a realizar para dar solución a los problemas que involucran medición.
- Comparación de figuras geométricas midiendo a través de una regla.
- Agrupación de figuras geométricas y comparación visual para observar si son congruentes.
- Falta de dominio de un lenguaje geométrico.
- Dificultad en la comprensión lectora.
- Escaso desarrollo de los procesos de visualización.
- Dificultad en la identificación de algunas figuras geométricas, como por ejemplo hexágono y trapecio.

- No utilización de una unidad de referencia a emplear para realizar recubrimientos.

Con base en estas características se propuso desarrollar procesos de pensamiento en los estudiantes por medio de experiencias retadoras y enriquecedoras, de esta manera, comenzaron a desarrollar una serie de acciones sobre las figuras geométricas, y así llevar a cabo la medición de área. Con estas acciones los estudiantes comienzan a construir significado del concepto de área. En este proceso se toma como marco la teoría euclidiana, que tiene como característica el uso de herramientas de proporción, descomposición y comparación de figuras geométricas.

Para la Fase B, se propuso una actividad de descomposición y recomposición de figuras geométricas, en la cual se observó que los estudiantes aumentaron sus capacidades en los siguientes aspectos:

- Identifican algunas figuras geométricas como los cuadrados, rectángulos y triángulos.
- Comienzan a realizar descripciones cortas de algunas figuras geométricas.
- Utilizan procesos de visualización.
- Manifiestan de cuántas formas se puede descomponer una figura geométrica.
- Justifican por qué dos figuras geométricas tienen igual tamaño.
- Realizan descripciones cortas de algunas propiedades de las figuras geométricas.
- Ejecutan descomposiciones de las figuras geométricas mentalmente.

Esta caracterización se logra por medio de la manipulación de objetos geométricos, que es una primera etapa que desarrolla la teoría euclidiana, en la cual se realizan demostraciones de los teoremas acerca del área de figuras geométricas, a través del reacomodo de las “piezas” geométricas. Estas características fueron evidenciadas en la actividad uno, sección uno y dos.

Durante la Fase C, se desarrolló una actividad de comparación de figuras geométricas en la cual los estudiantes comenzaron a medir varias figuras geométricas mediante recubrimientos. Los avances significativos que se lograron identificar fueron los siguientes:

- Utilizan una unidad de referencia.
- Realizan las respectivas recomposiciones para obtener figuras geométricas conocidas.
- Utilizan un lenguaje más formal para sustentar sus respuestas.
- Continúan utilizando procesos de visualización de una forma más rigurosa.

Los estudiantes utilizaron algunas estrategias manifestadas por Byrne (1847) en su libro Los primeros seis libros de Euclides, donde las demostraciones se construyen a través de diferentes métodos, como la descomposición, recomposición y comparación, además de los procesos de visualización. Esto se evidenció cuando los estudiantes realizaron las respectivas recomposiciones, para obtener figuras geométricas conocidas y de esta manera, ubicar una unidad de referencia y comenzar a realizar el recubrimiento total de la figura, según los resultados arrojados en la actividad 2.

Cabe resaltar que los estudiantes al encontrar la unidad de referencia hacían uso de las propiedades de las figuras geométricas, como lados opuestos de un paralelogramo son iguales, las diagonales de un paralelogramo se cortan mutuamente en partes iguales, lados opuestos de un paralelogramo son paralelos, las diagonales de un rectángulo

son iguales, el cuadrado es a su vez paralelogramo, rectángulo y rombo, entre otras. De esta forma identificaron cuadrados, rectángulos y paralelogramos, concluyendo cuántas de estas unidades recubrían la figura proporcionada para determinar su área.

En la Fase D, se propuso determinar la razón entre áreas de figuras geométricas. En ella los estudiantes comenzaron a utilizar herramientas de proporción, descomposición y comparación de figuras geométricas. El trabajo realizado por los estudiantes en esta Fase se caracteriza por:

- Subdividen las figuras en partes iguales.
- Comparan las partes constituidas respecto a cada división realizada.
- Señalan por qué el polígono quedó dividido en partes iguales.
- Encuentran fracciones equivalentes.
- Observan y comparan si las partes divididas de una figura geométrica tienen igual área.
- Utilizan diferentes acciones para dividir una figura geométrica en partes iguales.
- Actúan sobre sus soluciones para comenzar a dar justificaciones.

Los estudiantes utilizaron muchas de las herramientas principales que utilizó Euclides para resolver problemas de áreas, llegaron a manejar el término de igualdad a través de acciones de descomposición, recomposición y comparación, aspectos que se evidenciaron en la Actividad 3.

Para la Fase E, se propusieron varias actividades para que los estudiantes dedujeran fórmulas para calcular el área de figuras geométricas específicas, evidenciando que los estudiantes poseen la habilidad de desarrollar procedimientos aritméticos para encontrar el área de las principales figuras geométricas planas. En ella se encuentran los siguientes avances en su pensamiento.

- Identifican las unidades de longitud de la base y la altura de rectángulos y triángulos.
- Construyen diferentes figuras geométricas, donde tienen en cuenta los datos indicados y encuentran la relación de proporcionalidad que puede existir entre una figura y otra.
- Argumentan por qué se usa un tratamiento similar que involucra las longitudes de la base y altura en un rectángulo y en un paralelogramo.
- Calculan el área de figuras geométricas por medio de descomposiciones y recomposiciones obteniendo una figura geométrica conocida.
- Adquieren habilidades para la solución de problemas.

Las características logradas en esta fase, se pudieron constatar a través de los resultados de la actividad 5, sesiones uno, dos, tres y cuatro.

Por último durante la Fase F, se estudiaron las fórmulas para la longitud y el área del círculo, actividades en las cuales se confirma que los estudiantes utilizaron estrategias plenamente consolidadas para hallar el área por medio de descomposiciones y recomposiciones, con base en lo anterior se logró identificar los siguientes progresos en el desarrollo de su pensamiento.

- Encuentran con facilidad la razón de área correspondiente a cada figura geométrica.
- Justifican la relación entre la medida correspondiente a cada figura geométrica y su razón de área.

- Argumentan cómo encontrar la longitud aproximada para la circunferencia haciendo uso de los datos obtenidos.
- Realizan descomposiciones y recomposiciones para encontrar el área de una circunferencia.

Se demostró que a medida en que el estudiante va utilizando las propiedades de los objetos para llevar a cabo la descomposición, recomposición y comparación, interioriza y obtiene un mejor entendimiento<sup>7</sup> de las propiedades de las figuras geométricas y sus implicaciones.

Con respecto a la metodología descrita anteriormente, se consideró conveniente, para realizar un correcto análisis de las respuestas, entrevistar a varios estudiantes por curso, los cuáles fueron escogidos de forma aleatoria. Cada una de las respuestas dadas por los estudiantes respondía a determinadas características específicas. Las entrevistas tuvieron como objetivos:

- Caracterizar el pensamiento del niño en la solución de problemas no rutinarios donde interviene el concepto de área.
- Analizar las acciones (físicas o imaginarias) y estrategias que utiliza el estudiante para dar solución a los problemas planteados para caracterizar su pensamiento al desarrollar un enfoque predominantemente geométrico de la medición.

Para la primera fase, se utilizaron nueve tarjetas en cada una de las cuales aparecen diferentes figuras geométricas. El estudiante debió escoger dos de las tarjetas, crear un problema y escribirlo en los respectivos formatos. Además, para cada tarjeta se diseñó una serie de preguntas que se podían realizar al estudiante si no llegara a dar solución a la actividad planteada. En la segunda fase, se le entregó al estudiante siete problemas para que el estudiante explicara y justificara su solución por escrito complementado por explicaciones verbales.

La entrevista se llevó a cabo en distintos momentos y de forma individual para cada uno de los niños elegidos, y en todos los casos se usó un cuestionario preparado. Dentro del desarrollo de las entrevistas, el docente investigador se vio en la necesidad de hacerse participe en este proceso, pues los estudiantes por sí solos no expresaban fácilmente las heurísticas que realizaban para dar solución al problema, probablemente debido a que no están acostumbrados a expresar libremente sus ideas porque en su formación siempre esperan que el docente les realice las preguntas para luego ser contestadas.

## CONCLUSIONES

Robustez del significado del concepto de área

Con base en el análisis histórico desarrollado en el Capítulo 2, la experiencia que se obtuvo en la implementación de cada una de las actividades propuestas y los resultados obtenidos en las entrevistas, se tienen los elementos requeridos para definir la construcción de significado robusto del concepto de área.

Una primera etapa en la construcción de un significado robusto del concepto de área se logra cuando el individuo usa la estrategia euclidiana basada en igualdad de área buscando diferentes estrategias de división de una región del plano o figura geométrica. Con base en estas transformaciones el individuo utiliza herramientas de traslación y rotación, entre otras, para reconfigurar estas “piezas” geométricas, y de esta manera, formar una nueva figura geométrica, comprendiendo con claridad que el área permanece igual (invariante).

<sup>7</sup> Construcción de conexiones robustas entre los nuevos conocimientos y aquellos que se conocen de forma previa, donde son capaces de elaborar sus propios procedimientos o herramientas para resolver problemas.

En una segunda etapa, se comparan figuras que no tienen igual área, utilizando patrones de referencia que permiten hacer comparaciones parte-todo de la misma configuración introduciendo un conteo de partes constituyentes (unidades iguales de referencia).

Una tercera etapa aborda la búsqueda de fórmulas aritméticas para calcular el área. Dichas fórmulas se obtienen mediante la descomposición y recomposición de las figuras basadas en una fórmula primitiva tomada como conocida, en este caso la del rectángulo, al igual de lo que sucede en la teoría matemática de la medida.

Finalmente, se es capaz de resolver problemas no rutinarios y hasta retadores que involucran el concepto de área empleando una gama de estrategias que se desarrollaron en etapas anteriores.

El pensamiento métrico primeramente es geométrico.

En esta investigación se evidencia que los jóvenes estudiantes han construido conceptos de medición a través de la solución de problemas no rutinarios que involucran acciones de descomposición, recomposición y comparación de figuras geométricas, sin la utilización de símbolos aritmético-algebraicos. Esto va en contravía de la postura teórica de David Tall (2013), donde señala que el pensamiento geométrico es la abstracción a partir de las figuras percibidas (abstracción estructural) y el pensamiento métrico (la medición) es la abstracción a partir de acciones de medición de longitudes (abstracción operacional).

Para esta investigación, la medición, y en particular, la construcción del significado del concepto de área, es primariamente geométrico, combinando luego elementos aritméticos que, a su vez, se basan en relaciones geométricas. Detrás de las estrategias de descomposición y recomposición, se halla la identificación y uso de propiedades geométricas de las figuras involucradas, propiedades que sustentan la corrección de las descomposiciones y recomposiciones (que las figuras “calcen”, que depende del reconocimiento de propiedades de los ángulos, las longitudes de los segmentos, paralelismo, entre otros). Tal identificación, a su vez, tiene su raíz, por ejemplo, en la manipulación física de fichas con cierta forma, pero se hace efectiva en la construcción del significado del concepto de área, no por intermedio de la percepción sino en el reconocimiento de invariantes bajo las transformaciones efectuadas, es decir, las operaciones del sujeto sobre las figuras.

Estas manipulaciones se emprenden por medio de realizar acciones de transformación o modificación de las figuras geométricas por medio de descomposiciones y trazos de líneas auxiliares.

Clasificación del pensamiento humano con respecto a la construcción del concepto de área

Se tiene presente que para Tall (2013) los conceptos de longitud y área inician con acciones de medir, un proceso esencialmente numérico – aritmético, y de esta forma se abstrae el concepto con base en las acciones del sujeto por medio de operaciones rituales sobre los objetos y no por medio de los objetos en sí. Además, Tall intenta hacer una clasificación del pensamiento humano basada en la percepción por una parte y en acciones que se van convirtiendo en operaciones, por otra. Para esto, siguiendo parcialmente a Piaget, formula dos maneras en las cuales el individuo construye conceptos nuevos. Una primera, denominada abstracción estructural y una segunda llamada abstracción operacional, ilustradas en la Figura 1.

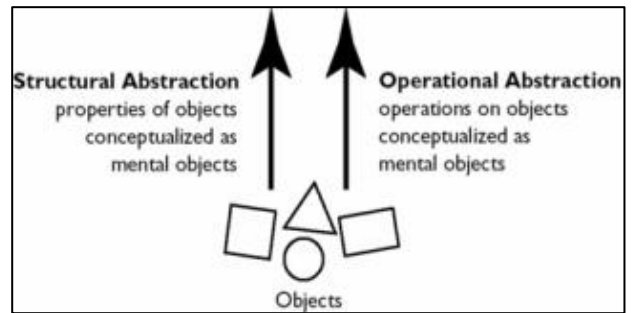


Figura 1. Tomado de Tall, David (2013) *How Humans Learn to Think Mathematically* pg. 65

La abstracción estructural se define como centrarse en contemplar la estructura de los objetos y abstraer de ahí sus propiedades. Tall (2013) afirma que ésta es la abstracción propia del pensamiento cuyo producto son los conceptos geométricos.

En cambio, la abstracción operacional se logra a partir de las acciones del sujeto por medio de procesos que se van interiorizando y organizando de modo que se vuelven con el tiempo operaciones sobre las cuales se logra abstraer los conceptos aritméticos y algebraicos.

En cuanto, a su caracterización del pensamiento geométrico, Tall (2013) no tiene en cuenta las diferentes operaciones que puede realizar un individuo para construir un concepto geométrico nuevo, ya que se limita a un pensamiento contemplativo y no activo.

Tall (2013) plantea que la abstracción estructural y la operacional son dos tipos de pensamiento diferentes, separando el pensamiento geométrico del aritmético y algebraico. Pero en la presente investigación se ha demostrado que este señalamiento no es cierto, ya que estas dos abstracciones van articuladas en la geometría, pues se promueve la abstracción a partir o bien de los objetos o bien de las acciones que realiza el sujeto para ejecutar transformaciones.

Por otra parte, como se dijo en el aparte anterior, el planteamiento central de la presente investigación es que el pensamiento métrico es esencialmente geométrico.

En la investigación se evidenció que las actividades diseñadas para este estudio seguían el concepto griego de área, donde los estudiantes al enfrentarse a un problema, y buscar darle solución, comienzan utilizando su pensamiento geométrico operacionalmente.

El pensamiento geométrico involucrado en la construcción de significado del concepto de área y llevado a cabo en el contexto de la solución de problemas no rutinarios requiere de construcciones, descomposiciones, recomposiciones y comparaciones, todas estas acciones realizadas por el individuo. Este pensamiento geométrico no es la abstracción a partir de las figuras geométricas como lo indica Tall (2013), sino a partir de transformar la figura y utilizar activamente sus propiedades. Concluimos que Tall no ha tenido en cuenta y no ha analizado el pensamiento utilizado por un individuo al resolver problemas geométricos no rutinarios relacionados con el concepto de área.

Por otro lado, en cuanto al pensamiento métrico, incluyendo el relacionado con el concepto de área, Tall (2013) argumenta que es la abstracción a partir de acciones de medición de longitudes, involucrando un elemento de simbolismo, ya que se introduce además unas expresiones numérico - aritméticos. Con base en este señalamiento, Tall (2013) sostiene que la medición involucra operaciones del sujeto y termina empleando fórmulas de tipo algebraico, y por lo tanto, que el pensamiento métrico, se relaciona con la abstracción operacional, separando así el pensamiento métrico del geométrico.



Basado en los resultados de esta investigación, se difiere de estos señalamientos ya que en ella se muestra que se construye significado del concepto de área a partir de actividades que recorren tres fases.

Primero, se centran en la igualdad de áreas de distintas figuras por medio de las transformaciones de descomposición y recomposición. Segundo, usando lo que se han denominado “unidades de referencia”, se logra la comparación de las áreas de distintas figuras y, más generalmente de diferentes regiones planas. Tercero, formando nexos entre los aspectos geométricos y aritmético – algebraicos de la medición de áreas se toma la fórmula del área del rectángulo como básica, y a partir de allí, por medio de la misma clase de transformaciones, se muestra cómo se puede relacionar y referir las fórmulas de las áreas de otras figuras geométricas (paralelogramo, triángulo, trapecio, hexágono, entre otros) al área del rectángulo. Reiteramos, como se mostró en el Capítulo 2, que se procede de manera similar en la matemática avanzada, en particular, en la teoría matemática de la medida.

Con base en estos resultados, se evidenció que el pensamiento requerido para la construcción del concepto de área y la solución de problemas involucrados en términos de medición utiliza un pensamiento geométrico operacional.

El pensamiento geométrico y el pensamiento euclidiano van más allá del acto de la contemplación, es mucho más rico de lo que Piaget y Tall señalan en su teoría, no está limitado al análisis de las propiedades de los objetos, sino es activo y operacional. Se concluye que, las actividades inspiradas en los planteamientos griegos alrededor del concepto de área, permiten al estudiante construir significado robusto de ese concepto por medio de operaciones netamente geométricas.

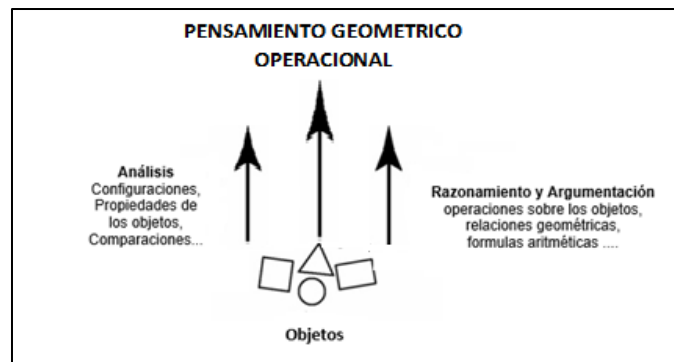
Se observa, además, que Tall (2013) sigue de cerca el tradicional tratamiento curricular de la geometría para hacer sus planteamientos.

La autora de la presente investigación discrepa de la caracterización realizada por Tall (2013), por lo que en lo que sigue se proponen dos clasificaciones para la construcción de significado del concepto de área y la caracterización del pensamiento involucrado.

La primera es el análisis; cuando el estudiante se centra en examinar las configuraciones e identifica sus propiedades para transformarlas, con el propósito de encontrar figuras geométricas equivalentes (de igual área).

El segundo aspecto, es el razonamiento y la argumentación. En esta etapa se encuentran las diferentes operaciones que se realizan sobre la configuración por medio de métodos creativos como visualizar la situación, subdividir, descomponer, recomponer y comparar, entre otros, para obtener figuras geométricas nuevas conservando el área de la figura original. Se procede de forma similar para establecer fórmulas de tipo algebraico para determinar su área.

Estas dos clasificaciones son llevadas a cabo con la utilización de un pensamiento geométrico operacional, las cuáles se ilustran en la Figura 2.



**Figura 2. Replanteamiento del proceso en la construcción del concepto de área.**

La construcción de significado robusto de los conceptos de longitud y área en un proceso sólido de enseñanza – aprendizaje no se inicia con acciones de medir, como lo señala Tall (2013), y si, por el contrario, se basa directamente en la aritmética y las fórmulas, el aprendizaje es precaria y carece de profundidad, tanto así, que los estudiantes apenas identifican las palabras perímetro y área con fórmulas aritmético – algebraicas y hasta las confunden. Se concluye que los conceptos geométricos cuyo significado robusto se construye con base en transformaciones y propiedades geométricas facilita la adquisición del concepto de área y la solución de problemas no rutinarios, además, podemos afirmar con certeza que la utilización del enfoque y abordaje euclidiano potencia y desarrolla el pensamiento geométrico.

#### Esquema del proceso para la construcción del concepto de área

Teniendo en cuenta la clasificación planteada en esta investigación para la construcción de significado del concepto de área para estudiantes de aproximadamente 12 años de edad, se propone el esquema o mapa conceptual que se muestra en la Figura 3.

Como puede apreciarse en el esquema, se parte de observar que una figura geométrica o región del plano puede descomponerse en partes iguales, trazando líneas de subdivisión. Esto permite comparar el área de la figura geométrica con la de otras figuras por medio de unidades de referencia.

De otra parte, en el mapa conceptual se muestra que es posible recomponer estas partes teniendo en cuenta la conservación de área y las propiedades de las figuras, para obtener otras figuras geométricas equivalentes y, a partir de estas, buscar fórmulas aritméticas para calcular el área de la figura o región geométrica inicial.

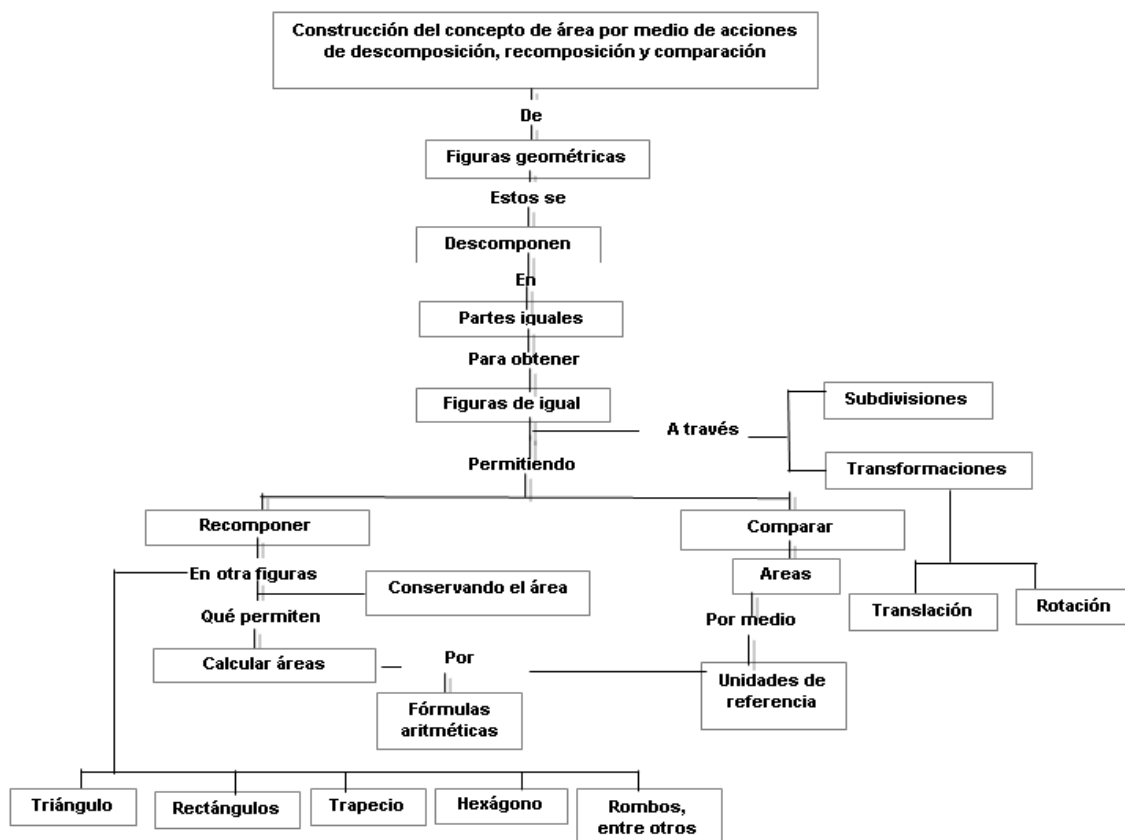


Figura 3. Esquema del proceso para la construcción de área

### RECOMENDACIONES

A través del tiempo se ha demostrado que la construcción del concepto de área en la geometría escolar colombiana se continúa enseñando bajo los mismos planteamientos de la educación tradicional, donde el estudiante se considera un individuo que capta información y memoriza fórmulas para dar respuestas a ejercicios sin saber el por qué lo está haciendo. Con base en estos cuestionamientos los estudiantes no están aprendiendo a razonar ni mucho menos construyen significado apropiado para el concepto, por lo que esta investigación propone una transformación del enfoque que incide en el modo de pensar de los estudiantes, con respecto a la construcción de significado robusto del concepto de área, en la cual se conviertan en individuos más activos, más creativos y más analíticos.

Para el diseño de cada una de las actividades propuestas dirigidas a la construcción del concepto de área, se tuvo en cuenta cada uno de los componentes desarrollados en el enfoque euclidiano. En este proceso se muestra con claridad que el dar solución a problemas de área está íntimamente relacionado, no apenas con la medición práctica por medio de procedimientos aritméticos y numéricos como lo propone Tall (2013), sino con un conocimiento operativo de las propiedades de las figuras que permite buscar diferentes subdivisiones y descomposiciones, para luego recomponer las partes obtenidas a sabiendas que, por sus propiedades, “calzaran” perfectamente, utilizando acciones físicas y mentales de comparación que dan lugar a enunciar razones entre sus áreas y desarrollar formulas aritméticas para el cálculo de éstas, y a poder abordar con éxito la resolución de problemas retadores relacionados con el concepto de área.

Es de esta forma, si las escuelas llevan una práctica diferente de enseñar por medio de solución de problemas no rutinarios y teniendo en cuenta el legado histórico de las matemáticas, los estudiantes

inician sus procesos de razonamiento y construyen su conocimiento en lugar de reducirse a memorizar sin comprender. Por lo cual se recomienda, que en las instituciones educativas se plantee el trabajo escolar en términos de promover el pensamiento geométrico, por medio de actividades que reten al aprendizaje autónomo. Además, esto podría lograrse difundiendo las actividades y los resultados de la investigación en los diferentes centros educativos del país para hacer conocer este método de enseñanza y de esta forma comenzar a replantear las orientaciones del currículo frente a los conceptos de medición.

Se sugiere explorar la posibilidad de extender los planteamientos expuestos en esta tesis para la construcción de significado de otros conceptos geométricos y métricos.

En esta investigación se realizó un estudio puntual acerca de la posición de Tall (2013) con respecto a la caracterización del pensamiento para la construcción del concepto de área. Queda abierto el espacio de investigación y discusión para otros aspectos matemáticos que este autor trata en su libro.

### CONTRIBUCIONES DE LA AUTORA

Pérez, D. & Falk, M. (2016). Construcción de significado robusto para el concepto de área y caracterización del pensamiento geométrico involucrado en los estudiantes de sexto grado (niños entre 10 y 13 años).

Pérez, D., Falk, M. (2016). Cuestionando las orientaciones del Currículo. Un enfoque alternativo para el concepto de área. *Revista Vidya*, (36)1, 79-92.

Pérez, D. (2015). Una propuesta para la construcción de significado del concepto de área, basado en las formas de razonamiento de Euclides en una comunidad de práctica para sexto grado. MEM 2015.

Pérez, D. (2013). Una propuesta para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para sexto grado. *Revista Papeles*, 5(9), 87-95.

## REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA

- Abdullah, A. Z. (2011). Students' perceptions towards the Van Hiele's phases of learning geometry using geometer's sketchpad software. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*.
- Batista, L. M. (2008). La adquisición de los primeros conceptos científicos en el niño según Piaget. Recuperable: 23 de Junio del 2014. Obtenido de <http://www.sinewton.org/numeros/Boletines/08/Articulos09.pdf>
- Berthelot, R. S. (1999). L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N*, nº65, pp. 37-59.
- Bordonaba, P. (2007). *El nacimiento de la Inteligencia en el niño. Jean Piaget*. Barcelona: Ares y Mares.
- Byrne, O. (1847). *Los primeros seis libros de los elementos de Euclides*. Falkland Island: Taschen.
- Camargo, L. (2012). Investigaciones en Educación geométrica. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Corberan, R. (1996). El área, recursos didácticos para su enseñanza en la geometría. Recuperable: 9 de abril del 2014. Obtenido de [www.uv.es/gutierre/apregeom/archivos2/Corberan96.pdf](http://www.uv.es/gutierre/apregeom/archivos2/Corberan96.pdf)
- Crowley, M. (1987). The Van Hiele model of the development of geometric thought. In Do, T.V. and Lee, J.-W. (2009). A multiple-level 3D-LEGO Game in augmented reality for improving spatial ability. *Proceedings of the International Conference on Human-Computer Interaction*, 296-303. San Diego, CA
- Del Grande, J. (1987). Spatial perception and primary geometry. In M. Lindquist & A.P. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry K-12* (pp.126-135). Reston, VA: National Council of Teachers of mathematics.
- Ferreiro, E. (1975). *Introducción a la Epistemología Genética. Jean Piaget*. Buenos Aires: Paidós.
- Garcá, E. (2006). *La formación de la inteligencia*. Piaget. México: Trillas.
- Guzman, M. (2006). El rincón de la pizarra. Recuperable: 25 de marzo del 2014. Obtenido de <http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/educacion/visualizacion>
- Hanna, G. (1991). Mathematical proof. En Tall, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. University of Warwick: Kluwer Academic Publishers, 54-61.
- Hershkowitz, R. (1991). *Memorias del tercer Congreso Internacional sobre investigaciones de Educación Matemática*. Valencia.
- Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Educación Matemática*, 10(2), 23-45.
- Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. la lógica del descubrimiento matemático*. Versión Española de Carlos Solís.
- Malloy, C. (1999). Perimeter and Area through the Van Hiele Model. *Mathematics Teaching in the Middle School*. 87-90.
- Pandiscio, E. (2002). *Geometry*. Mathematics Teacher, tomo 95, 1 - 32.
- Paz, A. (2013). Cómo funciona la mente: algunas tesis de Steven Pinker. Recuperable: 20 de Agosto del 2014. Obtenido de <http://soyandrespaz.wordpress.com/2013/05/18/como-funciona-la-mente-algunas-tesis-de-steven-pinker/>
- Pérez, D. (2011). *Diseño, Aplicación y Evaluación de un sistema de Actividades para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para sexto grado*. Bogotá.
- Philip, D. (1923). *Experiencia Matemática*. Barcelona.
- Rizo, C. C. (2003). Aprendizaje y geometría dinámica en la Escuela Básica. Ciencia y Sociedad. Volumen XXVII, Número 4, Octubre-Diciembre 2003. Recuperable: 5 de marzo del 2014. Obtenido de <file:///G:/Tareas%20de%20Orlando/celia.pdf>
- Rojas, O. (2009). *Una concepción Didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador en el preuniversitario diversificado* (Tesis doctoral). Cuba.
- Stockton, R. (2009). Mathematics Teacher, Enero, tomo 32, No. 7, 1-12.
- Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically*. Cambridge.
- Wenger, E. (2007). *Communities of practice: learning, meaning, and identity*. Cambridge: University Press.

## EL TEOREMA DE BAYES EN EL PROCESO DE FORMACIÓN DE LOS ESTUDIANTES DE MEDICINA. UNA HERRAMIENTA PARA SU ACTUACIÓN PROFESIONAL

LUIS FERNANDO PÉREZ DUARTE  
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia  
lufepedu@hotmail.com

PEDRO MONTERREY GUTIÉRREZ  
Director de Tesis  
Universidad del Rosario, Bogotá, Colombia  
pedro.monterrey@urosario.edu.co

OSVALDO ROJAS VELÁZQUEZ  
Co Director de Tesis  
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia  
orojasv69@uan.edu.co

### Resumen

El teorema de Bayes es tratado en los cursos de Bioestadística en las Carreras de Medicina, pero su presentación sigue las pautas de los libros de Estadística y en general no se vincula con los problemas de la práctica médica en el contexto de la Medicina Basada en la Evidencia. En este sentido se impone el perfeccionamiento del tema

de Probabilidades, en el curso de Bioestadística en Medicina. En la investigación se implementa un modelo didáctico para fortalecer el proceso de enseñanza aprendizaje del teorema de Bayes, en los estudiantes de medicina de la Universidad Antonio Nariño, en el marco de las aplicaciones a las pruebas de diagnóstico en el contexto de la Medicina Basada en la Evidencia. Con la propuesta didáctica sustentada en el modelo se logra: aumentar la cantidad de estudiantes