

- British Medical Journal*. BMJ 1996; 312 (13 enero): 71-2. Recuperable el 5 de noviembre de 2014 en la URL: <http://www.infodoctor.org/rafabravo/mbe3.html#definicion>
- Sackett, D., Rosenberg, W., Muir, J., Brian, R. y Richardson, W. (1996). *Medicina Basada en la Evidencia: Lo qué es y lo qué no*. Basado en un editorial de *British Medical Journal*. BMJ 1996; 312 (13 enero): 71-2. Recuperable el 5 de noviembre de 2014 en la URL: <http://www.infodoctor.org/rafabravo/mbe3.html#definicion>
- Sahai, H. (1992). Teaching Bayes Theorem using Examples in Medical Diagnosis. *Theachin Mathematics and its Applications*, Volume 11 No. 4 1992.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problems Solving*, Academic Press.
- Schoenfeld, A. (1994). *Reflections on doing and teaching mathematics*. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sigarreta, J. (2001). *Incidencia del tratamiento de los problemas matemáticos en la formación de valores*. Tesis en opción al Grado Científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la Luz y Caballero, Cuba, p. 78
- Silva, L. y Benavides, A. (2001). El enfoque bayesiano: otra manera de inferir. *Gac Sanit* 2001; 15: 341, 6.
- Snee, R. (1990). "Statistical thinking and its contribution to quality" *The American Statistician*, 44, 116-121.
- Sriraman, B. y English, L. (2010). *Theories of Mathematics Education*. New York: Springer.
- Tosleson, D. (1990). *New pathways in general medical*. The New England *Journal of Medicine*, Massachusetts Medical Society.
- Villarroel, Dos Santos y Hinojosa (2014). Razonamiento clínico: Su déficit actual y la importancia del aprendizaje de un método durante la formación de la competencia clínica del futuro médico. *Revista Científica de Ciencias Médicas* 2014; 17(1): 29-36
- Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review*, 67(3), 223- 265.
- Zilberstein, J. (2004). Curso de postgrado: aprendizaje desarrollador. Universidad de Matanzas. Matanzas, Cuba
- Zilberstein, J. et al. (2003) Preparación pedagógica integral para profesores universitarios. Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría". La Habana.

MODELO DIDÁCTICO PARA LA FORMACIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN DE VARIABLE COMPLEJA MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

BEATRIZ AVELINA VILLARRAGA BAQUERO

Universidad de Los Llanos, Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.
beatrizave@gmail.com

JOSE SIGARRETA ALMIRA

Director de Tesis
Universidad Autónoma de Guerrero, Acapulco, México
josemariasigarretaalmira@hotmail.com

OSVALDO ROJAS VELÁZQUEZ

Co Director de Tesis
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
orojasv69@uan.edu.co

Resumen

La enseñanza aprendizaje de los números complejos, en su mayoría, se trabaja desde enfoques puramente deductivos, partiendo en muchos casos de su definición o presentado su contenido como un conocimiento ya acabado, sin permitir al estudiante la construcción y aplicación de los conceptos subyacentes al de función de variable compleja. Dicha situación no es ajena al programa de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de los Llanos.

Esta investigación presenta un modelo didáctico para la enseñanza-aprendizaje del concepto de función de variable compleja mediante la resolución de problemas, que imbrica dichas teorías con base en tres categorías fundamentales del proceso de enseñanza-aprendizaje, determinadas por Leontiev en su teoría de la actividad: Fase de Orientación, Fase de Ejecución y Fase de Control. Cada una de ellas posee diferentes momentos que constituyen una metodología de carácter dinámico que sigue 4 pasos a saber: motivación, adquisición, elaboración y fijación-aplicación. Cada una de estas etapas contiene problemas que permiten el acercamiento a los conceptos por aproximaciones sucesivas.

En el mismo sentido la metodología propuesta establece el uso de diferentes tipos de software que facilita la visualización de puntos, rectas y subconjuntos, situaciones usadas por los estudiantes participantes. La implementación de la metodología sustentada en el modelo didáctico propicia darle herramientas a los futuros docentes para ejercer su labor, pues pueden poner en juego ideas abstractas y resolver problemas, además de poder caracterizar representaciones, operaciones, con el fin de mejorar sus formas de pensamiento y actuación profesional.

Abstract

Most complex numbers teaching learning is done from purely deductive approaches, in many cases starting with definitions or presenting its content as finished knowledge, withholding from the student the opportunity to build-on and apply the underlying concepts to the complex variable function. This situation is not foreign to the Mathematics and Physics Bachelor's degree at Universidad de los Llanos.

This research presents an innovative model for teaching learning of the complex variable complex through problem solving, which

interlays these theories using three fundamental categories of the teaching-learning process, as proposed by Leontiev in his Activity Theory: Orientation Phase, Execution Phase, and Control Phase. Each one has different moments that constitute a dynamic methodology that follows four steps to know: motivation, acquisition, elaboration, and fixation-application. Each of these stages has different problems that allow the approach to the concepts through successive approximations.

In the same sense, the proposed methodology establishes the use of different types of software that facilitates the visualization of points, lines and subsets, situations used by the participating students. The implementation of the methodology based on the didactic model provides the tools for future teachers to carry out their work, since they can put into play abstract ideas and solve problems, besides being able to characterize representations and operations, in order to improve their thinking and professional performance.

INTRODUCCIÓN

Aprender a conocer, a hacer, a convivir y a ser, constituyen pilares básicos del aprendizaje que la educación debe crear y desarrollar (Delors, et. al, 1997). Son múltiples los factores que dificultan el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, entre ellos: la falta de estrategias didácticas, metodologías, currículos no retadores, modelos educativos poco prácticos, políticas sociales con escasa efectividad, concepciones y creencias erróneas, entre otras.

Las investigaciones en educación matemática, hace más de 50 años, han centrado sus esfuerzos en determinar cómo debe desarrollarse el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, en función de lograr la aprehensión y asimilación de los conceptos matemáticos y favorecer el proceso de resolución de problemas matemáticos.

Investigaciones como las de Vinner y Hershkowitz (1980), Tall y Vinner (1981), Grenier (1985), Sfard (1991), Balacheff (1997), Duval (1999), entre otros, han sentado las bases para una *teoría de los conceptos matemáticos*, basados en la relación entre la definición de concepto y su imagen. En esa misma dirección, Duval (1999) y Hitt (2001), establecen que para la construcción de conceptos matemáticos no sólo se deben presentar actividades con un único sistema de representación, sino que además, se debe plantear el paso contrario entre los distintos sistemas, reiterando que es de esta manera se favorece la construcción de los conceptos matemáticos.

En relación a la resolución de problemas, Polya (1965), Falk (1980), Kilpatrick (1985), Schoenfeld (1985, 1987, 1994), Mayer (1986), Krulik, S. y Rudnik, J. (1987), Vergnaud (1990), Fridman (1991), De Guzmán (1991, 2001), Garret (1995), Puig (1996), Campistrous y Rizo (1996), Lester y Kehle (2003), Cruz (2006), Sigarreta (2006), Lesh y de Zawojewski (2007), Sriraman y English (2010), Pochulu y Rodríguez (2012), entre otros, enriquecen la investigación, ya que establecen que el uso iterativo de tecnicismos, como algoritmos, palabras claves, procedimientos, definiciones y memoria del estudiante, predomina sobre el tratamiento de los conceptos, hecho que impide el planteamiento, análisis y solución de problemas.

Adicional a ello, en dichas investigaciones, se declaran las dificultades que presentan los estudiantes a la hora de enfrentar un determinado problema y se proponen estrategias, fases y modelos para favorecer el proceso de resolución de problemas matemáticos; sin embargo, las dificultades dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática persisten. Colombia, no es ajena a esta problemática, situación que se refleja en los resultados de las pruebas externas (LLECE, PISA, TIMMS, ver Anexo A) e internas (Saber 3°, 5°, 9°, Saber 11° y Saber Pro, ver Anexo A).

Dichos resultados se deben a distintos factores entre ellos, la poca habilidad de los estudiantes para analizar y solucionar problemas (ICFES, 2014). Situación que pone de manifiesto la necesidad de

asumir e involucrar la resolución de problemas como método integral en la enseñanza-aprendizaje de la matemática; es decir, la resolución de problemas debe ser considerada como transversal a todo el diseño curricular.

Adicional a ello se debe generar un contexto, en el cual los conceptos y las actitudes hacia la matemática puedan ser favorecidos; de modo que los estudiantes sean activos en la asimilación de los conocimientos y el desarrollo de habilidades y capacidades, en palabras de Ernest (1989) "*... la resolución de problemas es la visión de las matemáticas como un campo en continua expansión dinámica de la creación y la invención humana, un producto cultural... En esta misma medida la resolución de problemas para la enseñanza de las matemáticas, mejora las actitudes, comprensión y flexibilidad de pensamiento*"¹⁷.

Fischbein (1990) establece algunas líneas generales que se pueden desarrollar en torno a la formación de conceptos, en particular, expone un conjunto de indicaciones para el tratamiento de problemas relacionados con conceptos matemáticos, tales como: el infinito actual y potencial, Teoría de números especificando los irracionales y complejos, entre otros. Se coincide con Falk (2015), cuando asevera: "*...en lo concerniente a un concepto matemático el aprendizaje es un proceso de construcción de significado del concepto. El proceso de construcción pasa por etapas donde el significado es construido.... El proceso de construcción de significado se desarrolla en la actividad de la solución de problemas, cada problema nuevo contribuye a mirar el concepto en un nuevo contexto que enriquece su significado... permite establecer las relaciones que cumple el concepto con otros conceptos...*"¹⁸.

En particular, el porqué del tratamiento del concepto de función de variable compleja, se fundamenta en las siguientes razones:

- El tratamiento de los números complejos, determina la continuidad natural de los dominios numéricos; después de los reales, (Kline, 1972; Sigarreta, 2000).
- Crea las bases sobre el tratamiento de conceptos integradores para la comprensión de la matemática, como los hiperreales e hipercomplejos.
- Las funciones de variable compleja están presentes en las bases teóricas de toda la matemática superior y en sus aplicaciones prácticas.

De lo antes expuesto se infiere la importancia y necesidad de formar nuevos maestros, que conozcan los fundamentos teóricos que permitan relacionar, de manera exitosa, la resolución de problemas matemáticos y la formación de conceptos y, en particular, aquellos específicos asociados con el concepto de función de variable compleja. La importancia teórico-práctica del tema tratado, se corrobora ya que estas temáticas han sido abordadas en eventos científicos tales como: International Congress on Mathematical Education (ICME), en el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), en la Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), en las reuniones latinoamericanas de matemática educativa (RELME), las Conferencias Interamericanas de Educación Matemática (CIAEM), en Encuentros Colombianos de Matemática Educativa (ECME), entre otros.

Específicamente, en el ICME (1990), Vergnaud, definió los *campos conceptuales* como conjuntos de situaciones cuyo análisis y

¹⁷ Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. *Mathematics teaching: The state of the art*, p. 249

¹⁸ Falk, M. (2015). Mathematics and Cognition. Seminario Pensamiento Matemática y Educación Matemática. Universidad Antonio Nariño. 28 de marzo de 2015, p. 6

tratamiento requieren de varios tipos de conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas; concluye que los maestros requieren de una mejor comprensión de la interconexión entre los conceptos, las competencias, los símbolos y situaciones para el desarrollo del conocimiento matemático a largo plazo.

En el CERME 2013, los trabajos de Fernández, Rico y Ruiz, indagan sobre los significados del concepto de límite finito de una función en un punto. Mota, Rada y Estarada (2013), resaltan la enseñanza del concepto de línea tangente. Hausberger, trabaja sobre el concepto de Homomorfismo. Por último, Schlarman, se refiere a la comprensión conceptual. Se considera que el aporte de estos trabajos científicos, se dirige a caracterizar diferentes conceptos matemáticos, desde la práctica en el aula, sin establecer una metodología o modelo didáctico específico para el tratamiento de estos tópicos.

Buehler (2014) presenta como Girolamo Cardano, adquiere el concepto de números complejos, haciendo una fuerte crítica a la teoría del desarrollo conceptual de Christopher Peacocke, estableciendo la necesidad de enfrentar contraejemplos, tomando la construcción social del conocimiento, como un marco para la comprensión en la adquisición de conceptos.

Pardo y Gómez (2007) presentan un estudio sobre la problemática de la enseñanza-aprendizaje de los números complejos, tomando como modelo el de Filloy (1999), denominado Modelos Teóricos Locales (MTL). Sus resultados establecen que los estudiantes universitarios presentan dificultades e inconsistencias al responder a diferentes tareas planteadas, mostrando que es aconsejable el uso de la historia como un elemento para el aprendizaje del número complejo.

De Vleeschouwer, Gueudet y Lebaud (2013) realizan una investigación acerca de la enseñanza-aprendizaje de los números complejos en los primeros cursos universitarios. Presentan diferentes tareas haciendo uso de diferentes representaciones; concluyen, que existen dificultades en el tránsito por estos sistemas y en particular con la representación geométrica, sugieren que esta última requiere de una enseñanza específica. En el artículo no se ofrece ningún modelo didáctico para solventar o enfrentar las dificultades encontradas.

Gray y Tall (2001) determinan tres formas de construir conceptos matemáticos que han sido utilizadas en teorías axiomáticas formales: desde la percepción de objetos y sus propiedades; desde las acciones que se simbolizan y sus propiedades; y desde esquemas de actividades y sus propiedades. Sin embargo, estas tres diferentes formas de construcción del concepto, tienen en común su tratamiento, esencialmente, inductivo. Se considera que dichas formas pueden ser integradas, desde el punto de vista metodológico, a través de un tratamiento dentro del proceso de resolución de problemas.

En la literatura revisada, se carece de un modelo didáctico para la formación de conceptos de la teoría de funciones de variable compleja, a través de la resolución de problemas matemáticos. Igualmente en las investigaciones desarrolladas sobre la enseñanza-aprendizaje de los números complejos, en su mayoría, se trabaja desde enfoques puramente deductivos, partiendo en muchos casos de su definición o presentado su contenido como un conocimiento ya acabado, sin permitir al estudiante la construcción y aplicación de los conceptos subyacentes al de función de variable compleja.

Dicha situación no es ajena al programa de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de los Llanos; por lo tanto, en ésta investigación, se realiza un estudio para la elaboración y aplicación de un modelo didáctico que favorezca el proceso de formación del concepto de función de variable compleja, a través de la resolución de problemas, con estudiantes de quinto semestre de dicha licenciatura. El modelo, está sustentado en los aportes que desde el punto de vista teórico ha desarrollado la concepción dialéctica y que

en la práctica ha potencializado el Enfoque Histórico Cultural de Vygotsky (1988).

En la literatura científica, son limitados los antecedentes; sin embargo, se han ubicado estudios acerca de la formación de conceptos, la resolución de problemas y la enseñanza-aprendizaje del número complejo y de las funciones de variable compleja. A través de la aplicación de métodos empíricos como la observación en clase, encuestas a los estudiantes y profesores y la experiencia de la investigadora, se pudo constatar como insuficiencias las siguientes:

- Son limitados los conocimientos previos que poseen los estudiantes acerca del número complejo y por ende de la función de variable compleja.
- Son escasos los sistemas de representación, para la construcción del concepto de número complejo y en consecuencia de la función de variable compleja.
- Es limitado, en general, el empleo de métodos que induzcan a la actuación productiva de los estudiantes para el dominio de conceptos matemáticos.
- Las actividades asignadas en el aula no propician la experimentación, búsqueda y exploración en el estudio del número complejo y el de función de variable compleja, donde se logren procesos metacognitivos.
- La construcción del concepto de función de variable compleja, no se introduce a partir de los conocimientos existentes y de las experiencias en la vida, relacionada con la temática.
- Se carece de una adecuada integración, entre la resolución de problemas y la formación de conceptos para el tratamiento del concepto de función de variable compleja.

Las valoraciones anteriores y el estudio teórico inicialmente realizado, permiten determinar la contradicción en su manifestación externa, entre las prácticas de aula para la formación del concepto de función de variable compleja y la aplicación de un modelo didáctico que integre la resolución de problemas y la formación de conceptos en el tratamiento de dicho concepto. La contradicción conduce al siguiente **problema científico** de la investigación: ¿Cómo utilizar las potencialidades de la resolución de problemas para favorecer el proceso de formación del concepto de función de variable compleja?

El **objeto de estudio** de la investigación es el siguiente: el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de función de variable compleja en el nivel universitario. En función de resolver el problema planteado se propone como **objetivo general**: elaborar un modelo didáctico para favorecer la formación del concepto de función de variable compleja, a través de la resolución de problemas. Se precisa como **campo de acción**: el proceso de formación del concepto de función de variable compleja a través de la resolución de problemas en el nivel universitario. Para el cumplimiento del objetivo, se formulan las siguientes **preguntas científicas**:

- ¿Qué fundamentos teóricos son necesarios para elaborar una metodología para favorecer la formación del concepto de función de variable compleja, a través de la resolución de problemas?
- ¿Qué elementos matemáticos y metodológicos de la resolución de problemas y el tratamiento de conceptos matemáticos, son necesarios para elaborar un modelo didáctico para favorecer la formación del concepto de función de variable compleja a través de la resolución de problemas?
- ¿Qué modelo didáctico favorece el proceso de formación del concepto de función de variable compleja a través del proceso de resolución de problemas?

- ¿Cómo analizar la viabilidad de dicho modelo didáctico en la práctica docente?

En aras de dar cumplimiento al objetivo y, en particular, a las preguntas planteadas fueron propuestas las siguientes **tareas de investigación**:

1. Determinar el estado del arte asociado al proceso de enseñanza y aprendizaje de la función de variable compleja.
2. Determinar el mapa conceptual asociado al concepto de función de variable compleja, que serán tratados a través del modelo didáctico.
3. Fundamentar epistemológicamente y matemáticamente los procesos de evolución y de enseñanza-aprendizaje de la función de variable compleja.
4. Determinar elementos metodológicos asociados a la imbricación entre la resolución de problemas y el tratamiento de los conceptos matemáticos.
5. Elaborar un modelo didáctico para la enseñanza-aprendizaje del concepto de función de variable compleja, a través de la resolución de problemas.
6. Determinar la viabilidad de un modelo didáctico por medio de una metodología sustentada a través de un sistema de actividades, que permita la formación del concepto de función de variable compleja, a través de la resolución de problemas.

El **aporte práctico** radica en una metodología sustentada en el modelo didáctico, que permite la formación del concepto de función de variable compleja, a través de la resolución de problemas matemáticos. La constitución de herramientas y estrategias para la recolección de información y validación de la propuesta. Adicional a ello, se aporta un sistema de actividades dirigido a la formación del concepto de función de variable compleja a través de la resolución de problemas.

El **aporte teórico** consiste en un modelo didáctico de carácter holístico para la enseñanza-aprendizaje del concepto de función de variable compleja mediante la resolución de problemas matemáticos. Es de destacar el carácter integrador del modelo propuesto, debido a que desde el punto de vista teórico ofrece los fundamentos básicos para el desarrollo de futuras investigaciones enfocadas a la formación de conceptos matemáticos a través de la resolución de problemas y viceversa.

La tesis consta de introducción, cinco capítulos, conclusiones, recomendaciones y anexos. En el primer capítulo se realiza un análisis del estado del arte. En el segundo, se explicitan los fundamentos teóricos. En el tercer capítulo, se expone la metodología de la investigación. En el cuarto capítulo se presenta y explica el modelo didáctico y una metodología a partir de un sistema de actividades. En el quinto capítulo se valida el modelo didáctico generado y se realiza una valoración de la implementación del sistema de actividades en la práctica.

En el **CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE** se abordan temas relacionados con las relaciones entre: formación de conceptos y la resolución de problemas. En las investigaciones consultadas se encuentra amplia bibliografía sobre la resolución de problemas, la formación de conceptos, teoría de la actividad, procesos de enseñanza-aprendizaje de los números complejos, variable compleja y funciones de variable compleja. Estas investigaciones establecen un marco de referencia en el desarrollo de la investigación; dichas investigaciones se centran en primera instancia a la formación de conceptos; entre ellos Rubinstein (1967) da importancia a los sistemas de representación y el uso de ejemplos y los no ejemplos, situación a la que D' Amore (2001) establece que no sólo a través de múltiples representaciones se logra el

aprendizaje de un concepto, sino que además se necesita de la lógica; de igual manera Falk (2015), determina la importancia del proceso de construcción del significado del concepto y de los problemas retadores.

Otros se centran en la formación de conceptos de diferentes tópicos matemáticos entre ellos, Velázquez, y otros (2004), González (2005); de otra parte investigaciones como las de Schoenfeld (1992), Rodríguez, Sigarreta y Ruesga (2006), permiten determinar la importancia de la resolución de problemas como eje fundamental de las matemáticas. En esa misma dirección Morales, y otros (2014), exponen que la actividad matemática se centra en la resolución de problemas, tomando los aportes del enfoque histórico-cultural, desarrollados dentro de la teoría de la actividad

En adición, autores como Ángel, Polola, Fernández y Bortolotto (2004), Mena, Rojas y Vindas (2011), Bueno, Mora, Álvarez y Nardín (2012) y otros establecen métodos de trabajo en el aula, a través de unidades didácticas o sistemas de actividades que según exponen, permiten facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje haciendo uso de la resolución de problemas para la formación de conceptos. Para ellos la resolución de problemas es un proceso transversal que proporciona de contexto a los conceptos, con el fin de favorecer el aprendizaje significativo de estos.

De otra parte investigaciones relacionadas con la enseñanza-aprendizaje del concepto de función de variable compleja, realizadas por Pochulu (2012), Duke, y otros (2008) y Yan, y otros (2011), entre otros, se enfocan en el significado de los conceptos, sus dificultades, solución de problemas y representaciones.

Cabe destacar que en la revisión de la literatura científica realizada, se carece de un modelo didáctico que permita la formación de conceptos de la función de variable compleja mediante la resolución de problemas; pero aportan en gran medida al planteamiento y puesta en marcha del modelo didáctico propuesto.

En el **CAPÍTULO 2. MARCO TEORICO** están dado por los fundamentos filosóficos que la concepción dialéctica ofrece, el enfoque histórico-cultural de Vygotsky (1995) en sus fundamentos psicopedagógicos. Metodológicamente por la teoría de la actividad de Leontiev (1983) y la formación de conceptos de Galperin (1995); las cuales permiten enriquecer y determinar la estructura y puesta en escena del modelo en la práctica. Cabe destacar, que en cuanto a la resolución de problemas, se toma como base el trabajo realizado por Polya (1965) y De Guzmán (2001), con quienes la autora concuerda en la definición de problema, categorización y resolución. Los fundamentos matemáticos tienen en cuenta no sólo el concepto y definición de función de variable compleja sino además, los conceptos subordinados, colaterales y superiores, subyacentes a este.

En el **CAPÍTULO 3. METODOLOGIA DE INVESTIGACION**, se asume el paradigma de investigación que sustenta la tesis, además es donde se precisa la población y la muestra. También se valoran los diferentes métodos a nivel teórico y empírico (Instrumentos y técnicas aplicadas), así como los métodos estadísticos, utilizados en el análisis de los resultados.

La presente investigación se ubica en el paradigma de investigación cualitativo interpretativo, mediante un estudio de caso único descriptivo teniendo en cuenta que se describe la situación observada dentro de un grupo de estudiantes de quinto semestre de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de los Llanos perteneciente, al curso electivo variable compleja del periodo II del año 2016.

Dentro de los métodos y técnicas de investigación se tienen las siguientes: a nivel teórico; el histórico-lógico, análisis-síntesis, la modelación y el método sistémico-estructural. A nivel empírico; la observación participante, encuestas, entrevistas y los métodos matemáticos estadísticos.

Estos instrumentos y métodos propios de la investigación, permiten establecer el modelo, la metodología y el sistema de actividades.

El **CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS**; en la consecución del modelo didáctico se tiene en cuenta en primera instancia, los fundamentos filosóficos, psicológicos y matemáticos descritos en el Capítulo 2, además de los referentes teóricos que se tienen acerca de los modelos didácticos y se plantea como modelo didáctico, “*la estructuración sistémico-práctica del proceso de enseñanza-aprendizaje, para incidir en la formación integral del estudiante*”. En la elaboración de este modelo se tuvo en cuenta: como basamento teórico la concepción dialéctica, los fundamentos psicopedagógicos y matemáticos, que constituyen elementos valiosos, donde se sustenta el modelo. En segundo lugar, la estructuración del proceso de enseñanza-aprendizaje de la función de variable compleja hacia la búsqueda activa y dinámica del conocimiento en el estudiante, a través de un sistema de actividades, desde posiciones reflexivas que estimulan el desarrollo del pensamiento y la independencia cognoscitiva. En tercer lugar, la metodología sustentada en el modelo didáctico favorece la formación de conceptos sobre función de variable compleja, a través de la resolución de problemas y propicia el desarrollo de los procesos lógicos del pensamiento y el dominio de los contenidos teóricos necesarios, en la medida en que se produce el aprendizaje de los conocimientos matemáticos. En cuarto lugar el tránsito del nivel actual o inicial que poseen los estudiantes, hasta el nivel que se aspira; así como la estimulación de la necesidad de aprender función de variable compleja, teniendo en cuenta los intereses. Además, el vínculo del contenido función de variable compleja con la práctica social. De igual forma, el elemento dinamizador del modelo se desarrolla en la etapa de ejecución, al interactuar las cuatro categorías presentes en la metodología propicia la construcción de un robusto concepto de función de variable compleja, contribuyendo a la solución del problema científico planteado.

La propuesta de modelo didáctico que se presenta, considera las tres categorías fundamentales del proceso de enseñanza-aprendizaje, determinadas por Leontiev en su teoría de la actividad, a saber: Fase de Orientación, Fase de Ejecución y Fase de Control. Cada una de ellas posee diferentes momentos que constituyen parte de la metodología y por ende del modelo a desarrollar.

Desde este punto de vista la aproximación a un concepto superior, se hace de manera paulatina y permanente en forma de “espiral”, donde cada concepto subordinado, colateral y superior, alcanza grados de complejidad cada vez más avanzados.

En la Figura 1, se puede observar los diferentes niveles de comprensión de un concepto y cómo a través de aproximaciones sucesivas y cada vez más complejas el estudiante va acercándose al concepto de variable compleja.

Cada uno de estos niveles deja observar el paso de las diferentes ZDP, además del uso del diagnóstico como parte del proceso metodológico; el sistema de actividades como un eje que traspasa de manera ascendente a la metodología; el sistema de evaluación y control que brinda información para el mejoramiento y seguimiento de los conceptos. De igual forma esta metodología posee como eje central el modelo didáctico diseñado, al cual pertenece también la metodología (ver Figura 1).

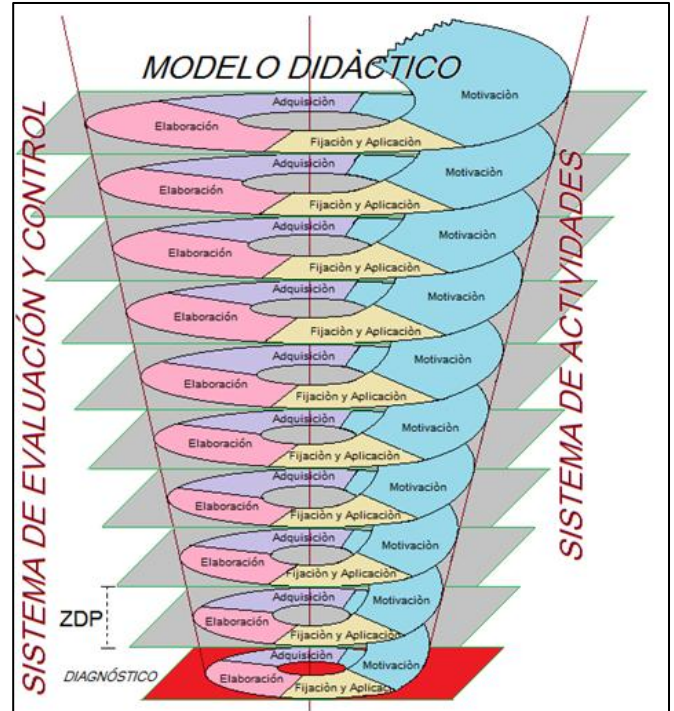


Figura 1. Relación metodológica para la construcción de conceptos por aproximaciones sucesivas.

Las actividades desarrolladas se encuentran directamente relacionadas con la metodología, es decir, dichas actividades se formulan de la siguiente manera: título de la actividad, objetivo, sugerencia metodológica, motivación, adquisición, elaboración, fijación-aplicación y unas conclusiones de la actividad. La actividad 1 llamada Unidad imaginaria, la actividad 2. Representaciones, la actividad 3. Operaciones, la actividad 4. Potencias, la actividad 5. Raíces la actividad 6. Conjunto de puntos en el plano \mathbb{C} y la actividad 7. Funciones de variable compleja.

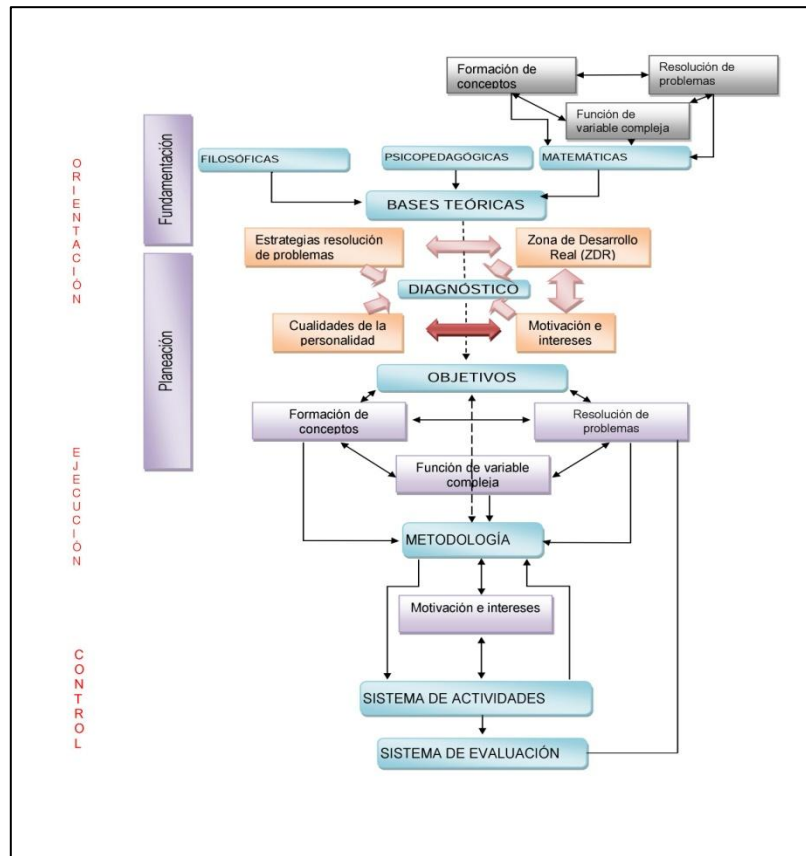


Figura 2. Modelo didáctico para la formación del concepto de variable compleja.

En el **CAPÍTULO 5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS** se presentan los resultados de las actividades realizadas a la luz del modelo didáctico y su metodología; para estructurar la información proveniente del análisis se procedió a enumerar a los estudiantes participantes de (E1, E2, E3, ..., E10) y se crearon escalas de valoración cualitativas basadas en la clasificación que realizan Ballester y otros (1992), sobre los niveles de desarrollo de los conceptos, haciendo un aporte sobre las características de éste frente a la resolución de problemas como se muestra a continuación en la tabla 1.

De igual forma se nombraron los problemas como P.M.n, donde M corresponde a la motivación, P.A.n a problemas de adquisición, P.E.n a los de elaboración y P.F.n a los problemas que corresponden a la etapa de fijación-aplicación, la n es el número del problema en cada etapa de la actividad.

Tabla 1. Escalas de valoración cualitativas basadas la caracterización de los niveles de desarrollo de los conceptos mediante la resolución de problemas.

NIVEL DE SOLUCIÓN	CARACTERIZACIÓN
Análisis-Abstracción (A-A).	El estudiante analiza los grupos o conjuntos de objetos en función de sus propiedades comunes; luego determina cuales de esas características son esenciales, forma conjuntos más complejos y elaborados, basándose en las propiedades. La caracterización permite que el estudiante determine la presencia o no del concepto superior y las relaciones existentes con otros conceptos (colaterales y subordinados) en los problemas propuestos.

Discriminación-Identificación
(D-I).

El estudiante determina qué propiedades del nivel anterior, pueden extenderse al resto de los elementos de un conjunto, se deducen e inducen las propiedades fundamentales a la totalidad de los elementos del conjunto.

Identifica el concepto como parte de la solución de un problema, donde se puede apreciar características necesarias y suficientes o aquellas en donde algunas características sean modificadas de tal manera que el estudiante compara y establece similitudes en cuanto a cada problema y la relación con el concepto.

Síntesis-Concreción
(S-C).

El estudiante determina las características esenciales, la estructura o el sistema de la totalidad de los elementos se sintetiza el proceso y puede construir una definición.

Aplica el concepto frente a problemas en nuevos contextos, donde el uso de diferentes sistemas de representación permite que el estudiante establezca las relaciones entre los conceptos superiores con los subordinados o colaterales, conduciendo a nuevos problemas en donde se pone a prueba el concepto.

Como se puede observar, en cada actividad hubo una serie de problemas que llevaron al estudiante bajo un hilo conductor a la comprensión de diferentes conceptos asociados al de función de variable compleja como es: unidad imaginaria, representaciones de los números complejos, operaciones con números complejos, potencias, raíces, lugares geométricos y función de variable compleja; todas ellas introducidas desde el punto de vista geométrico y en algunos casos, haciendo uso de videos y diferentes software que permitieron la visualización de la situación.

Durante el desarrollo de las actividades se logró establecer que los estudiantes a medida que resolvían los problemas en cada actividad, mejoraban la comprensión de dos conceptos indispensables, el de número complejo y función de variable compleja, es así, que en el desarrollo de las actividades se preguntaba al final como control, qué

concepto tiene sobre número complejo y cuál es el concepto que tiene sobre función de variable compleja. Se pudo observar que el 70% de los estudiantes tuvo una mejoría frente a los conceptos, a partir no sólo de sus escritos sino de sus expresiones verbales y no verbales en el desarrollo de los problemas, solo 3 estudiantes no lograron pasar del nivel de análisis abstracción al de síntesis- concreción, esto debido al bajo compromiso que tenían y a los niveles básicos de matemáticas con los que cuentan. Un análisis de las encuestas realizadas en la etapa de diagnóstico, muestra que estos 3 estudiantes expresaron no dedicar mucho tiempo a la resolución de un problema y ser poco responsables; situaciones que no ayudan al desarrollo de las actividades.

Por otra parte, al analizar las actividades con la aplicación de la estrategia, se identificó que se alcanza a comprender mejor el concepto, pues en cada etapa del proceso de asimilación se trabajaron actividades específicas. Algunos resultados son los siguientes: En la etapa de *motivación*: aunque los estudiantes mostraron gran dinamismo en el desarrollo de las actividades, es en esta etapa donde la mayoría de los estudiantes obtuvieron un nivel de análisis – abstracción, esto debido a que era la primera aproximación al concepto a tratar.

En la etapa de *adquisición*: en esta etapa se orientó el trabajo hacia temas conocidos para la resolución de problemas, que permitieron la discusión sobre las características esenciales del conjunto de los números complejos, en esta etapa se logra alcanzar niveles de síntesis – concreción, debido a que permiten hacer aseveraciones y conclusiones sobre algunos conceptos.

En la etapa de *elaboración*: los 10 estudiantes logran identificar las soluciones a los problemas propuestos, debido a que muchos de ellos permitían establecer comparaciones entre los números complejos y los reales, sin embargo, para algunos es tan arraigado el tema de las funciones en variable real que 3 de ellos en un primer instante no logran comprender el mapeo de muchas funciones, dificultándose las actividades.

En la etapa de *fijación-aplicación*: en esta etapa la mayoría de los estudiantes tuvieron éxito en la solución y justificación de los problemas propuestos, como situaciones dentro de la misma matemática y con problemas que relacionaban los números complejos y la física.

De acuerdo a lo establecido, podemos afirmar, que hacer el tratamiento mediante la puesta en práctica de la estrategia, se arrojan elementos que garantizan favorecer los procesos de asimilación, además, las etapas comprendidas en dicho proceso, permiten la evaluación durante el proceso y en caso de ser necesario, reorientar la actividad. De esta manera, podemos afirmar que al llevar a cabo el modelo didáctico, mediante la metodología propuesta, se han encontrado elementos que permiten concluir que la estrategia metodológica, favorece los procesos de asimilación de los conceptos, en específico aquellos asociados a las funciones de variable compleja.

CONCLUSIONES

El proceso investigativo sobre la formación del concepto de función de variable compleja mediante la resolución de problemas, en estudiantes del quinto semestre de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de los Llanos, corrobora la hipótesis planteada en la tesis y ofrece una respuesta al problema objeto de investigación. Los resultados obtenidos propician destacar algunos elementos que resultan esenciales en éste trabajo, ellos son: que el proceso de enseñanza- aprendizaje del concepto de función de variable compleja, ha sido abordado por diferentes autores desde tres perspectivas:

1. Teórica: la formación de conceptos.
2. Resolutiva-procedimental: la resolución de problemas.

3. Analítico funcional; el estudio de la función de variable compleja desde la Variable Compleja.

Adicional a ello en la literatura revisada se pudo constatar las siguientes regularidades: que el aprendizaje de un concepto se logra a través de múltiples representaciones y de la lógica; se brindan importancia al proceso de construcción del significado del concepto y de los problemas retadores, además de ello se proponen actividades que favorecen la formación de conceptos mediante la resolución de problemas y se centran su atención en el significado de los conceptos, sus dificultades, solución de problemas y representaciones.

Las investigaciones valoradas en el estado del arte sirvieron como base y referentes, pues se toman elementos que imbrican las tres aristas para la presente tesis. También se concluye que son escasos los trabajos que tienen en cuenta las relaciones existentes entre resolución de problemas y formación de conceptos, y se carece desde la teoría de un modelo didáctico para la formación del concepto de función de variable compleja a través de la resolución de problemas.

La tesis se sustenta desde el punto de vista filosófico en la concepción dialéctica, pues esta ofrece la teoría, que a través del dialogo y la discusión, permite descubrir el contenido matemático mediante la exposición y confrontación de razonamientos y argumentaciones. Los sustentos psicopedagógicos están dados por el enfoque Histórico-Cultural de Vygotsky y sus seguidores, asumiéndose de este la zona de desarrollo próximo, la ley de la doble formación de las funciones psicológicas y la teoría de la actividad. Ambos fundamentos son básicos en la construcción del modelo didáctico y le brindan robustez.

El trabajo con la formación de conceptos matemáticos es importante para lograr un proceso de enseñanza - aprendizaje robusto de la matemática, en particular de las funciones de variable compleja, pues éste le propicia tratar los conceptos de objeto, de relación y de operaciones, asociados esencialmente al pensamiento abstracto, el cual está basado en conceptos, juicios y razonamientos. Los conceptos en el estudiante no se forman de manera inmediata, son el resultado de un proceso que puede estructurarse, en tres niveles: Análisis-Abstracción, Discriminación-Identificación y Síntesis-Concreción.

La teoría de la resolución de problemas, en particular los problemas retadores constituyen uno de los pilares básicos para el trabajo con la formación del concepto de función de variable compleja. La implementación de la estrategia de Polya (1965) en el momento de resolución de cada uno de los problemas: orientación hacia el problema, trabajo en el problema, solución del problema, y la evaluación de la solución y de la vía; centrada en el apoyo de la heurística, propicia la construcción robusta de dicho concepto.

La investigación se sustenta en el paradigma cualitativo interpretativo. Los instrumentos y métodos utilizados durante el desarrollo de la investigación, permiten establecer el modelo didáctico, elaborar la metodología sustentada en el modelo y elaborar e implementar un sistema de actividades, para favorecer la formación del concepto de función de variable compleja.

El modelo didáctico propuesto se ha estructurado en función del aprendizaje del alumno, es decir, en ella se prioriza el proceso de asimilación por etapas de los conceptos asociados al de función de variable compleja y se concibe que él mismo, ha asimilado los conceptos si logra establecer una solución a los diferentes problemas propuestos en las etapas de: motivación, adquisición, elaboración y fijación- aplicación. Cada una de las propuestas de solución se analizaron según tres niveles de formación del concepto: Análisis-Abstracción, Discriminación – Identificación o Síntesis- Concreción.

El modelo permite estructurar la formación del concepto de función de variable compleja hacia la búsqueda activa, dinámica y transformadora del conocimiento en el estudiante, mediante un sistema de actividades, donde fundamentalmente se utiliza la

tecnología, la historia de las matemáticas como recurso didáctico, la representación geométrica y procedimientos heurísticos, desde posiciones reflexivas que propician el desarrollo del pensamiento matemático y de la independencia cognoscitiva.

El principal resultado alcanzado en esta investigación es la elaboración de un modelo didáctico, para tal fin se diseñó una metodología que permite dinamizar el modelo y un sistema de actividades estructurado en 4 etapas: motivación, adquisición, elaboración y fijación-aplicación, que conjuntamente con la metodología posibilitaron la concreción del modelo en la práctica, a través de la resolución de problemas para la formación de conceptos.

La realización de cada una de las etapas permite favorecer los procesos de internalización del conocimiento sobre los conceptos asociados al de función de variable compleja. Por esta razón en cada etapa se propusieron actividades que a la vez se corresponden con la elaboración por etapas de las acciones mentales, y para su desarrollo se utilizó una estrategia integradora de resolución de problemas que se apoya en los postulados de la formación de conceptos mediante tres niveles.

La estrategia metodológica acierta frente al diagnóstico realizado, el cual permitió establecer el tipo de problemas frente al contenido matemático del concepto, en él se propone una nueva estructura para el tratamiento del concepto de función de variable compleja, desde el punto de vista geométrico, atendiendo a las relaciones conceptuales de los conceptos asociados (colaterales, subyacentes y superiores) al de función de variable compleja

Las actividades están estructuradas en cuatro etapas, que establecen un orden para la puesta en práctica, de manera que el proceso se hace más estructurado, situación que es necesaria para un buen aprendizaje; además de ello incluye herramientas tecnológicas para la puesta en escena de las representaciones visuales de los problemas, situaciones problema que ponen en juego conocimientos anteriores para la construcción de nuevos conceptos, aplicaciones para facilitar la fijación y la generalización de conceptos y una serie de preguntas que permiten llevar un hilo conductor.

Por otra parte, es necesaria una formación sólida sobre el contenido matemático del concepto, lo que permite entender el sentido de cada una de las actividades que se han propuesto e identificar qué se logra con cada una de ellas, y cómo la resolución de problemas finalmente permite al alumno la formación de conceptos por aproximaciones sucesivas.

Luego de llevar a cabo el desarrollo de las actividades, se arrojaron elementos que permiten determinar situaciones sobre los procesos de asimilación del concepto de función de variable compleja a través de la puesta en escena de la estrategia metodológica, donde se identificó en los alumnos los siguientes resultados: los procesos de motivación son esenciales cuando se abarcan temas relacionados con la matemática, la incorporación de una vía mixta permite al docente tener diferentes perspectivas frente a cómo abarcar el contenido, el uso de situaciones problema ayuda a los estudiantes a una mejor comprensión de los conceptos, aproximadamente un 70% alcanzó un nivel óptimo frente a la comprensión no solo del concepto de función de variable compleja, sino de los conceptos asociados a este, la evaluación frente al concepto de número complejo, representación y función de variable compleja se puede apreciar a medida que las actividades abarcan problemas de mayor complejidad.

El empleo de las TICs en la formación de conceptos y en especial en los procesos de enseñanza-aprendizaje en el nivel universitario, ofrece múltiples ventajas en el mejoramiento de los diferentes procesos de asimilación de conceptos, procedimientos que se tratan en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, debido a que permiten la

visualización y por ende la asimilación de conceptos abstractos sobre la base de imágenes o representaciones que las TICs proporcionan.

El aprendizaje de propiedades geométricas de las funciones en variable compleja, conlleva serias dificultades en la enseñanza tradicional, por lo cual, el uso de diferentes software facilita la visualización de puntos, rectas y subconjuntos, situaciones usadas por los estudiantes participantes. En el aprendizaje de la matemática universitaria, la tecnología juega un papel importante y más aún en programas de licenciatura, porque permiten darle herramientas a los futuros docentes para ejercer su labor, pues pueden poner en juego ideas abstractas y resolver problemas, además de poder caracterizar representaciones, operaciones, con el fin de mejorar sus formas de pensamiento.

El uso de un modelo didáctico y una metodología acorde a esta, como la propuesta en esta tesis, mejora los procesos de enseñanza-aprendizaje de conceptos mediante la resolución de problemas, no sólo de temas relacionados con las funciones de variable compleja, sino otros temas de las matemáticas, se deja al lector, la posibilidad de aplicar dichas actividades y poner en práctica el modelo propuesto mediante su metodología.

RECOMENDACIONES

La implementación de la metodología y del sistema de actividades sustentado en el modelo didáctico para fortalecer la formación del concepto de función de variable compleja mediante la resolución de problemas, en estudiantes del quinto semestre de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de los Llanos, requiere considerar y poner en práctica las siguientes recomendaciones: se debe favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de función de variable compleja, como por ejemplo el tratamiento que se le da en los textos, requiere tener en cuenta la relación entre los objetos matemáticos y sus aplicaciones utilizando, esencialmente, una determinada definición.

Para lograr mayor éxito al llevar a la práctica la metodología, es necesario un cambio casi total de los paradigmas que prevalecen en los profesores de Matemáticas y más aún de las licenciaturas, pues la metodología tiene varios componentes y elementos que van fundamentalmente, dirigidos al profesor, los cuales deben ser asimilados como requisito fundamental.

El Integrar las TIC en los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas al nivel de educación superior, pues coadyuvan en la comprensión y formación de conceptos, también favorece el proceso de la visualización en la resolución de problema, que en el caso del trabajo con variable compleja es necesario debido a su carácter un poco abstracto.

El desarrollo de trabajos conjuntos y el uso de la dialéctica como eje fundamental de los procesos de enseñanza-aprendizaje permiten la formación integral del estudiante y el mejoramiento de aspectos esenciales en la personalidad, tanto del maestro como del alumno, es así, que la responsabilidad, el comunicarse con el otro, el respeto por las opiniones y el conocimiento matemático, se hacen presentes en el desarrollo de las actividades que proponga el maestro.

De igual forma quedan abiertos temas relacionados con la teoría de funciones en variable compleja, el uso de modelos didácticos en los procesos de enseñanza aprendizaje en el nivel universitario, el diseño de modelos de formación docente que permitan a los futuros docentes tener herramientas no sólo matemáticas, sino pedagógicas y didácticas que les permitan desenvolverse como maestros del área.

BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS

- Ángel, M., Polola, L., Fernández, G. y Bortolotto, M. (2004). Aprendiendo matemática desde los conceptos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Volumen 17*.
- Balacheff, N., Brousseau, G., Cooper, M., Sutherland, R. y Warfield, V. (1997). Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990. *Mathematics education library*, 19.
- Ballester, S. y otros. (1992). *Metodología de la enseñanza de la matemática*. Tomo I y II. La Habana: Pueblo y educación.
- Buehler, D. (2014). Incomplete understanding of complex numbers Girolamo Cardano: a case study in the acquisition of mathematical concepts. *Synthese*, 191(17), 4231-4252. Recuperado de: <http://bibliotecasenlinea.unillanos.edu.co:2093/ejemplar/378825>.
- Bueno, S., Mora, J., Nardín, A., Álvarez, A. y Blanco, R. (2012). Registros semióticos y enseñanza del tema integrales.
- Campistrous, L. y C. Rizo. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. Proyecto TEDI. La Habana: Pueblo y Educación.
- Cruz, M. (2006). *La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas*. Tomo 1. La Habana: Educación Cubana.
- D'Amore B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno*. [Barcelona, España]. 27, 51-76. Recuperable el 11 de febrero de 2015 de la URL: <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/402%20contribucion%20al%20debate%20sobre%20conceptos%20y%20objetos.pdf>
- De Guzmán M. (1991). *Para pensar mejor*. Barcelona: Labor.
- De Guzmán, M. (2001). La actividad subconsciente en la resolución de problemas. Red Científica. Recuperable el 15 de octubre de 2014 de la URL: <http://www.redcientifica.com/doc/doc200112010001.html>.
- De Vleeschouwer, M., Gueudet, G., Lebaud, M. y Britain, U. (2013). Teaching and learning complex numbers in the beginning of the university cursus. Recuperable el 15 de octubre de 2014 de la URL: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG14/WG14Posters/WG14_P_%20DeVleeschouwerGueudet_Lebaud.pdf.
- Delors, J., Amagi, I., Carneiro, R., Chung, F., Geremek, B., Gorham, W. y Nanzhao, Z. (1997). *La educación encierra un tesoro: informe para la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo Veintiuno*. Unesco.
- Duke, B., Dwyer, J., Wilhelm, J. y Moskal, B. (2008). Complex variables in junior high school: the role and potential impact of an outreach mathematician. *Teaching Mathematics and its Applications*, 27(1).
- Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. *Registros semióticos y aprendizajes*.
- Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. *Mathematics teaching: The state of the art*.
- Falk, M. (1980). *La enseñanza a través de problemas*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.
- Falk, M. (2015). Mathematics and Cognition. Seminario Pensamiento Matemática y Educación Matemática. Universidad Antonio Nariño. 28 de marzo de 2015.
- Fernández, J., Rico, L. y Ruiz, J. (2013). Meanings of the concept of finite limit of a function at one point: background and advances. *En Proceedings of the VIII CERME*. Antalya, Turquía.
- Fillooy, E. (1999). Modelos Teóricos Locales (MTL): Un marco teórico y metodológico para la observación experimental en matemática educativa. *Aspectos teóricos del álgebra educativa*.
- Fischbein, E. (1990). *Introduction (Mathematics and Cognition)*. En: P. Neshery J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Flores, C., García, G., Gómez, E., Gutiérrez, M., Hesiquio, H. y Velázquez, S. (2004). La formación del concepto de función en alumnos de educación media superior.
- Fridman, L. (1991). Metodología para enseñar a resolver problemas matemáticos. *La matemática en la escuela* (5).
- Galperin P. (1995). *Introducción a la Psicología*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Garret, R. (1995). Resolver problemas en la enseñanza de las Ciencias. En *Revista Didáctica de las Ciencias Experimentales # 5*, julio, p. 16-26. Alambique, Universidad de Bristol. Gran Bretaña.
- González, F. (2005). Algunas cuestiones básicas acerca de la enseñanza de conceptos matemáticos. *Fundamentos en humanidades*, (11).
- Gray, E. y Tall, D. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: An explanatory theory of success and failure in mathematics. In *PME CONFERENCE* (Vol. 3).
- Grenier, D. (1985). Middle school pupils. Conceptions about reflections according to the task of construction. Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Educations. Noordwijkerhout.
- Hausberger, T. (2013). On the concept of (homo) morphism: a key notion in the learning of abstract algebra. En *Proceedings of the VIII CERME*. Antalya, Turquía.
- Hitt, F. (2001). El papel de los Esquemas, las Conexiones y representaciones Internas y Externas Dentro de un Proyecto de Investigación en Educación Matemática. *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*.
- ICFES, Informe Pruebas Saber –Matemáticas. Bogotá, D.C., Noviembre de 2014. Recuperable el Marzo 9 de 2015 en la URL: www.icfes.edu.co.
- Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty–five years of research on teaching mathematical problem solving. In E. Silver (Ed.): *Teaching and learning mathematical problema solving: Multiple research perspectives*.
- Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Nueva York, EE. UU.:Oxford University Press.
- Krulik, S. y Rudnick, J. (1987). *Problem solving: A handbook for teachers*. Allyn and Bacon, Inc., 7 Wells Avenue, Newton, Massachusetts 02159.
- Leontiev, A. (1981). *La actividad en Psicología*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación
- Leontiev, A. N. (1983). *Teoría psicológica de la actividad*. Selección de Obras de Psicología, 2, 94-261.
- Lesh, R. y Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester, Jr. (Ed.). *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. National Council of Teachers of Mathematics*. Charlotte, NC: InformationAge Publishing.
- Lester, F. y Kehle, P. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*.
- Mayer, R. (1986). *Pensamiento, Resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Editorial Paidós.
- Mena, D., Rojas, L. y Vindas, A. (2011). Introducción a los conceptos básicos de funciones mediante el uso de la Resolución de Problemas. En *Memorias del VII Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora*, Cartago, Costa Rica.
- Morales A., Dolores C., Nolasco H., Hernández J. y Sigarreta J., (2014). Methodology based on problem solving in the treatment of the concept of limit to infinity. En *International Journal of Research in Education Methodology.Volumen 5, N° 1*.
- Mota, Rada y Estarada, (2013). The teaching of the concept of tangent line using original sources En *Proceedings of the VIII CERME*. Antalya, Turquía.

- Pardo, T. y Gómez, B. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos: un estudio en el nivel universitario. *PNA*, 2(1).
- Pochulu, M. y Rodríguez M. (2012). *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Buenos Aires, Argentina: Eduvim.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ciudad México: Editorial Trillas.
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. España. Editorial Comares.
- Rubinstein, J. (1967). *Principios de Psicología General*. Edición Revolucionaria. Cuba.
- Schlarmann, K. (2013). Conceptual Understanding In Linear Algebra - Reconstruction Of Mathematics Students' Mental Structures Of The Concept 'Basis'. En *Proceedings of the VIII CERME*. Antalya, Turquía.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problems Solving*. Academic Press.
- Schoenfeld, A. (1987). A brief and biased history of problem solving. In: F. R. Curcio (Ed.) *Teaching and Learning: A problem Solving Focus*. Reston, VA: NCTM.
- Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1).
- Sigarreta, J. y Palacio, J. (2000). La contextualización de los problemas matemáticos. En *Revista Matemática y Educación*. Editorial Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.
- Sigarreta, J., Rodríguez, J. y Ruesga, P. (2006). La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 13(1).
- Sriraman, B. y English, L. (2010). *Theories of Mathematics Education*. New York: Springer.
- Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2).
- Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(2).
- Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1980, August). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In *Proceedings of the fourth international conference for the psychology of mathematics education*.
- Vygotsky, L. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. México: Grijalbo.
- Vygotsky, L. S. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. A. Kozulin (Ed.). Buenos Aires: Paidós.
- Yan, Y., Jin, D., Li, Y., Zhao, H. y Li, X. (2011). Application of Simple Examples in Experiment Teaching about Complex Function and Integral Transform. In *International Conference on Information Computing and Applications*. Springer Berlin Heidelberg.

EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMATICO A TRAVES DE LA HEURISTICA DE LAKATOS EN LA CONSTRUCCION DE DEMOSTRACIONES Y EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE LA MATEMÁTICA DISCRETA

JADER WILSON CORTES AMAYA
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.
shalom7_43@hotmail.com

MARY FALK DE LOSADA
Directora de tesis
Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
rectoria.uan@gmail.com

Resumen

El presente estudio tuvo como objetivo analizar el impacto que genera el método heurístico de Lakatos en la educación matemática. Concretamente, se obtuvieron resultados importantes al considerar dicha heurística junto con la resolución de problemas retadores como metodología en un curso de matemáticas discretas para estudiantes de ingeniería de sistemas y licenciatura en matemáticas. Se lograron resultados en cuanto a la implicación de la heurística en el desarrollo del pensamiento matemático, en la actitud del estudiante, en la construcción de demostraciones matemáticas y como herramienta eficaz para la resolución de problemas.

Por otra parte, la investigación permitió aportar, en el contexto de la educación matemática, al importante debate acerca de si las matemáticas es resolver problemas o demostrar teoremas que

considera tanto la postura filosófica de Celucci acerca de la naturaleza de la matemática y la postura científica de Gowers acerca de las dos culturas inmersas en matemáticas, la que prioriza la resolución de problemas y la que privilegia la construcción de teoría, y con ello aclarar el papel que desempeñan y cómo se interrelacionan el entendimiento de teoría, la construcción de demostraciones matemáticas y la resolución de problemas singulares en el ámbito de la educación matemática.

Abstract

This study had as objective analyzing the impact that causes the Lakatos heuristic method in the math education. Specifically, it offered important results when considering this heuristic with the resolution of challenging problems as the methodology used in discrete math for system engineering students and math degree.