

MÚSICA: UNA DANZA GEOMÉTRICA; GEOMETRÍA: UNA ABSTRACCIÓN MUSICAL

Juan Sebastián Arias Valero
Universidad Nacional de Colombia
jsariasv1@gmail.com

Proponemos una dualidad entre *música* y *geometría* en la cual contrastamos a las piezas musicales, entendidas como *variaciones* de patrones geométricos, con las geometrías, entendidas como colecciones de propiedades *invariantes* respecto a grupos de transformaciones (con posible significado musical). Bajo esta dualidad, presentamos varios ejemplos, en armonía, contrapunto e interpretación musical, donde superficies geométricas básicas ganan cierto *movimiento* y dan *cuerpo* y *estructura* a las piezas musicales.

INTRODUCCIÓN

Una de las unificaciones más importantes en la historia de las matemáticas es la definición de una geometría dada por Klein (1893) en su *Programa de Erlangen*. Para Klein, una geometría es el estudio de las propiedades *invariantes* respecto a un grupo¹ de transformaciones de un espacio. En la geometría euclidiana distancias, áreas y ángulos son invariantes respecto a rotaciones y traslaciones en el plano. En la *geometría afín*, la cual generaliza la geometría euclidiana, el paralelismo entre rectas es preservado bajo transformaciones afines, las cuales son transformaciones lineales invertibles del plano combinadas con traslaciones (véase la Figura 1).

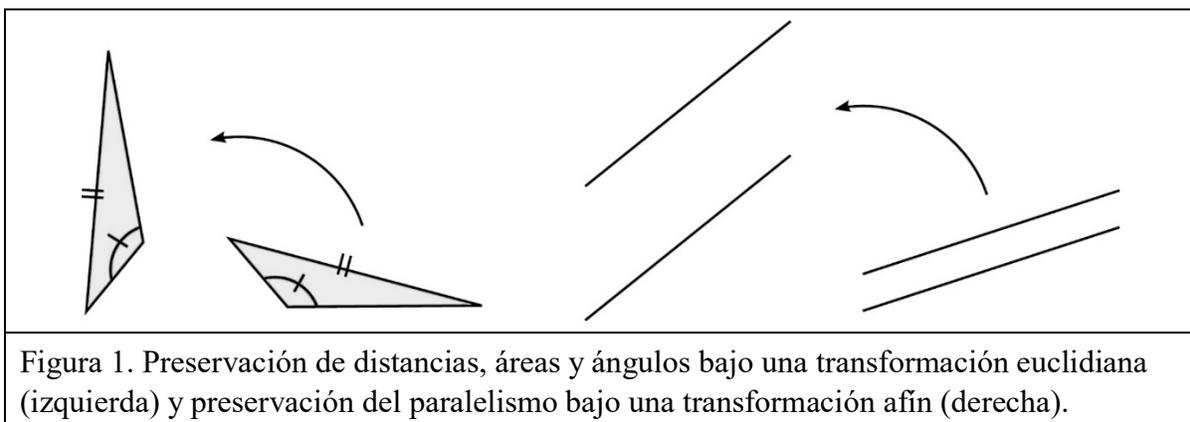
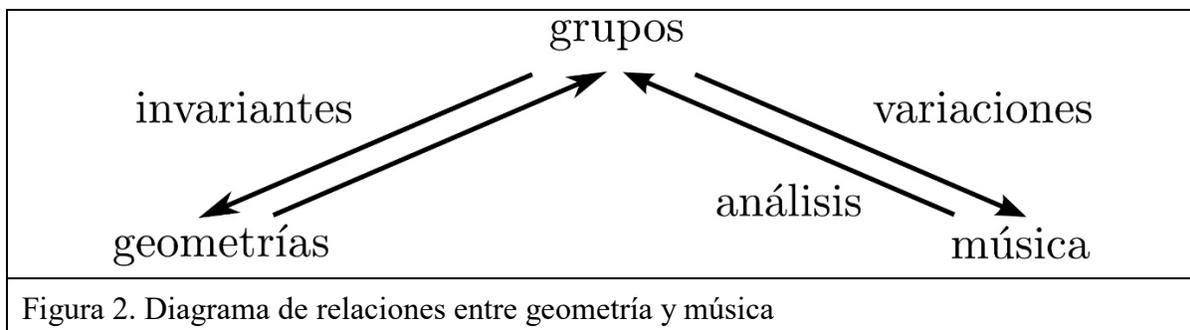


Figura 1. Preservación de distancias, áreas y ángulos bajo una transformación euclidiana (izquierda) y preservación del paralelismo bajo una transformación afín (derecha).

¹Informalmente, los axiomas de grupo son los requerimientos mínimos que se le deben colocar a un conjunto G con una operación binaria $*$ de tal manera que las ecuaciones lineales de la forma $a * x = b$ (lineales) tengan solución. Estos requerimientos son: 1. Existencia de un elemento neutro; 2. Asociatividad de la operación, 3. Existencia de inversos.

Por otro lado, en la *música occidental*, los grupos de transformaciones se manifiestan de una manera *opuesta*. En primer lugar, el uso de *simetrías* en música se origina probablemente por la necesidad *práctica* de componer una partitura de manera efectiva en corto tiempo.² No es extraño, entonces, que las construcciones básicas del contrapunto y la armonía (inversión, retrogrado, transposición, aumentación) correspondan a simetrías básicas de la geometría afín. Sin embargo, en música no estudiamos los invariantes respecto a simetrías, sino que por el contrario, en las piezas musicales, a partir de esas simetrías variamos los objetos musicales (notas, acordes, melodías, escalas, duraciones) para plasmarlos en una obra.

De acuerdo a lo anterior, esquematizamos³ la relación entre música y geometría mediante el diagrama de la Figura 2. En la izquierda del diagrama tenemos una correspondencia (*invariantes*) de grupos a geometrías que asocia a cada grupo de transformaciones de un espacio su geometría según Klein. En la derecha, tenemos una correspondencia (*variaciones*) que produce variaciones de material musical bajo la acción de un grupo de simetrías dado. Estas correspondencias poseen correspondencias que van justamente en las direcciones contrarias. Por un lado, a cada geometría le podemos asociar el grupo de todas las transformaciones que preservan cada una de las propiedades de la geometría. Por otro lado, el proceso que a una pieza musical le asocia el grupo de simetrías en juego es el análisis musical. De esta manera, tenemos un movimiento de vaivén conceptual que oscila entre las piezas musicales y las geometrías.



En este escrito mostramos dos ejemplos de cómo pasar de la geometría a la música y dos ejemplos de cómo pasar de la música a la geometría, en el ámbito de la armonía y el contrapunto occidentales. Veremos que los vaivenes asociados con esos movimientos pueden generar procesos creativos tanto en música como en matemáticas. Para finalizar, observamos cómo gracias a la *gestualidad* (a medio camino entre música y geometría) es posible recobrar el movimiento corporal intrínseco que existe en las transformaciones y en las piezas musicales, lo cual permite la interpretación corporal e instrumental de estas últimas. De allí nuestra visión de la

² Véase Mazzola, Mannone y Pang (2016, p. 11).

³ Este esquema no pretende ser estrictamente formal, sino presentar una orientación conceptual para el artículo. Probablemente, una formalización pueda lograrse usando adjunciones categóricas.

música como una danza geométrica, en la cual figuras geométricas sencillas ganan movimiento y se desenvuelven en el tiempo.

ESPACIOS MUSICALES Y CONSTRUCCIONES BÁSICAS

Antes de abordar los ejemplos centrales de este escrito, necesitamos algunos modelos matemáticos básicos que ocurren en música.

La *partitura* tradicional de la música occidental puede situarse en el plano \mathbb{R}^2 , donde cada pareja (t, a) representa un evento sonoro con *altura* o *tono* a que ocurre en un instante de tiempo t (véase la Figura 3). Las unidades que se toman para las alturas y el tiempo se escogen a conveniencia. Usualmente, las alturas pueden estar dadas por frecuencias o nombres de notas y los tiempos pueden estar en segundos o unidades de pulso.

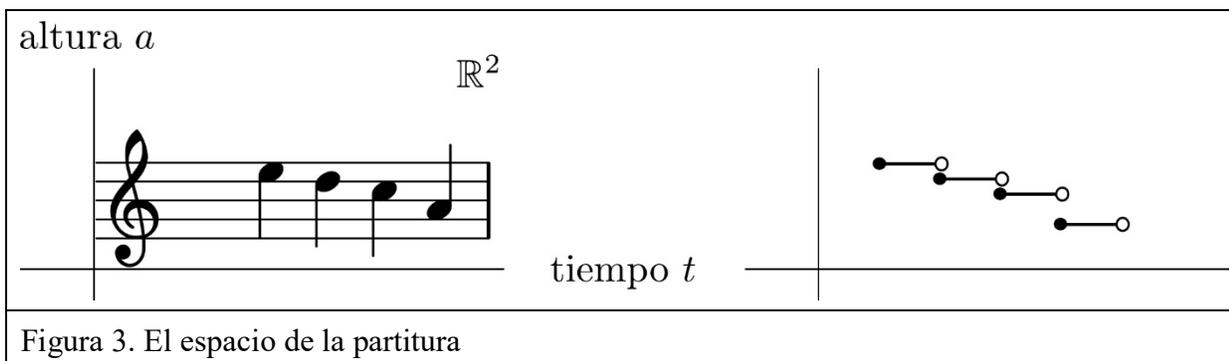


Figura 3. El espacio de la partitura

El *espacio de tonos* de la escala equitemperada⁴ es el anillo \mathbb{Z}_{12} , en el cual identificamos números con tonos como sigue:

$$0=c, 1=\text{do}\sharp=\text{re}\flat, 2=\text{re}, 3=\text{re}\sharp=\text{mi}\flat, 4=\text{mi}, 5=\text{fa}, 6=\text{fa}\sharp=\text{sol}\flat$$

$$7=\text{sol}, 8=\text{sol}\sharp=\text{la}\flat, 9=\text{la}, 10=\text{la}\sharp=\text{si}\flat, 11=\text{si}.$$

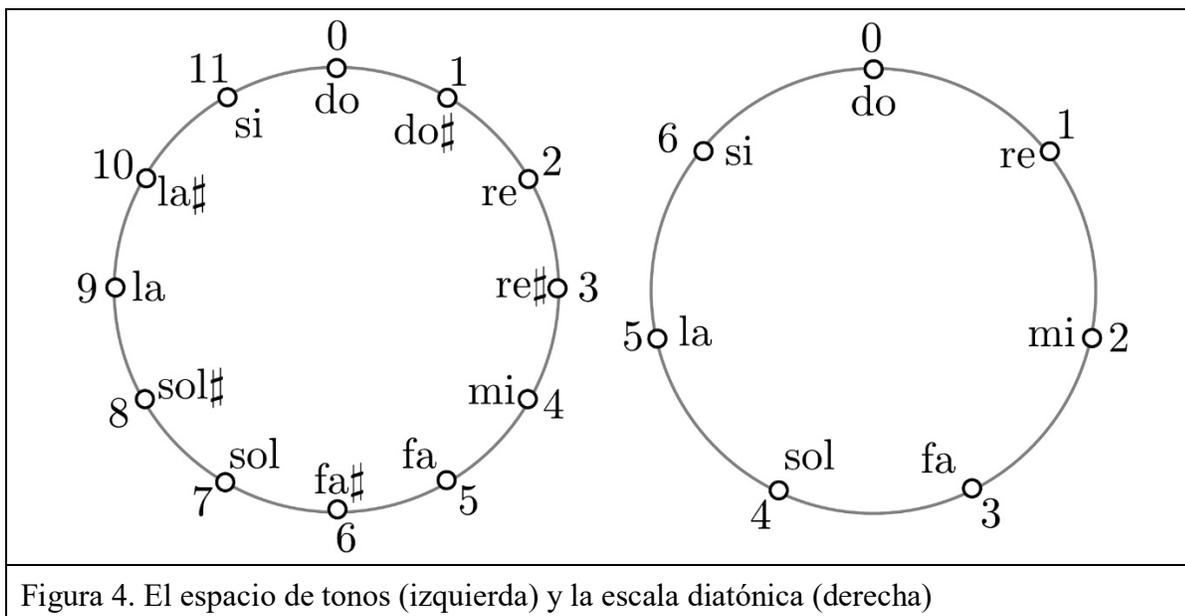
De la misma manera, la escala diatónica

Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si,

⁴ La escala equitemperada es aquella donde las notas están distribuidas en 12 intervalos iguales a lo largo de una octava.

la cual corresponde a las teclas blancas del piano, suele identificarse con el anillo \mathbb{Z}_7 . Esto permite simplificar toda la gama de tonos representada por \mathbb{R} (eje vertical en la Figura 3) usando los anillos \mathbb{Z}_{12} y \mathbb{Z}_7 , utilizando el más conveniente en cada situación.

Por su carácter cíclico, el espacio de tonos y la escala diatónica suelen representarse sumergidos en el círculo unitario como se muestra en la Figura 4.



Ahora, necesitamos construir las simetrías del espacio de la partitura (Figura 3) y de los espacios de tonos (Figura 4), las cuales están inspiradas en las transformaciones euclidianas y afines del plano.

Dado un R -módulo⁵ M sobre un anillo conmutativo⁶ con unidad R , una *simetría (afín) de M* es aquella de la forma $T^x \circ f$, donde f es un R -automorfismo⁷ de M , $x \in M$ y

$$T^x: M \rightarrow M: a \mapsto a + x.$$

La colección de todas las simetrías de M forman un grupo respecto a la composición de funciones.

En el caso del \mathbb{R} -módulo \mathbb{R}^2 , es decir, cuando consideramos a \mathbb{R}^2 como un espacio vectorial sobre los reales, una simetría tiene la forma $T^{(x,y)} \circ f$, donde $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal correspondiente a una matriz invertible (determinante no nulo) de tamaño 2×2 . Estas

⁵ Véase la definición en Atiyah y Macdonald (1969, p. 17).

⁶ Véase la definición en Atiyah y Macdonald (1969, p. 1)

⁷ Véase la definición en Atiyah y Macdonald (1969, p. 18). Un automorfismo es un isomorfismo de un módulo en sí mismo.

simetrías son precisamente las *simetrías del espacio de la partitura*. Al considerar todas las simetrías de la forma $T^{(x,y)} \circ f$, donde f está asociada a una matriz de rotación (es decir, ortogonal con determinante igual a uno), obtenemos el grupo de transformaciones euclidianas del plano.

Por otro lado, si al anillo \mathbb{Z}_n lo consideramos como un \mathbb{Z}_n -módulo, entonces una simetría típica de \mathbb{Z}_n suele denotarse $T^x b$ para $x \in \mathbb{Z}_n$ y b invertible en \mathbb{Z}_n , donde $T^x b$ se define por $T^x b(a) = ba + x$. En efecto, se puede probar que un R -automorfismo de un anillo R conmutativo corresponde a multiplicar a izquierda por un elemento invertible del anillo. Las simetrías de \mathbb{Z}_n son una herramienta *imprescindible* en teoría matemática de la música y constituyen una *simplificación* de las simetrías del espacio de la partitura.

Finalmente, un *acorde tríada* es un subconjunto de \mathbb{Z}_{12} con exactamente tres elementos. Los acordes suelen dibujarse como triángulos cuyos vértices son los elementos del acorde, en el espacio de tonos. En la Figura 5, observamos dos acordes básicos: Do mayor y La menor. Los demás acordes mayores y menores pueden ser obtenidos por *transposición*, es decir, aplicando una simetría de \mathbb{Z}_{12} de la forma T^x .

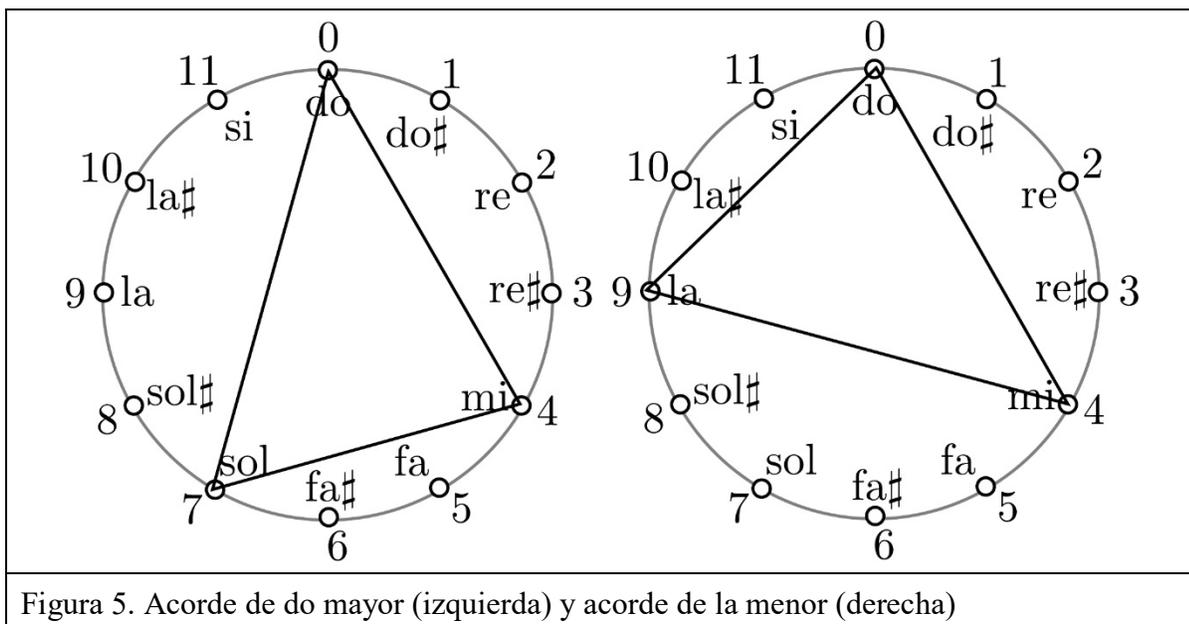


Figura 5. Acorde de do mayor (izquierda) y acorde de la menor (derecha)

J. S. BACH: DE LA GEOMETRÍA AFÍN EN EL PLANO AL CONTRAPUNTO

Las transformaciones básicas del contrapunto, usadas por Bach, están dadas por transformaciones del plano en sí mismo definidas como en la Figura 6.

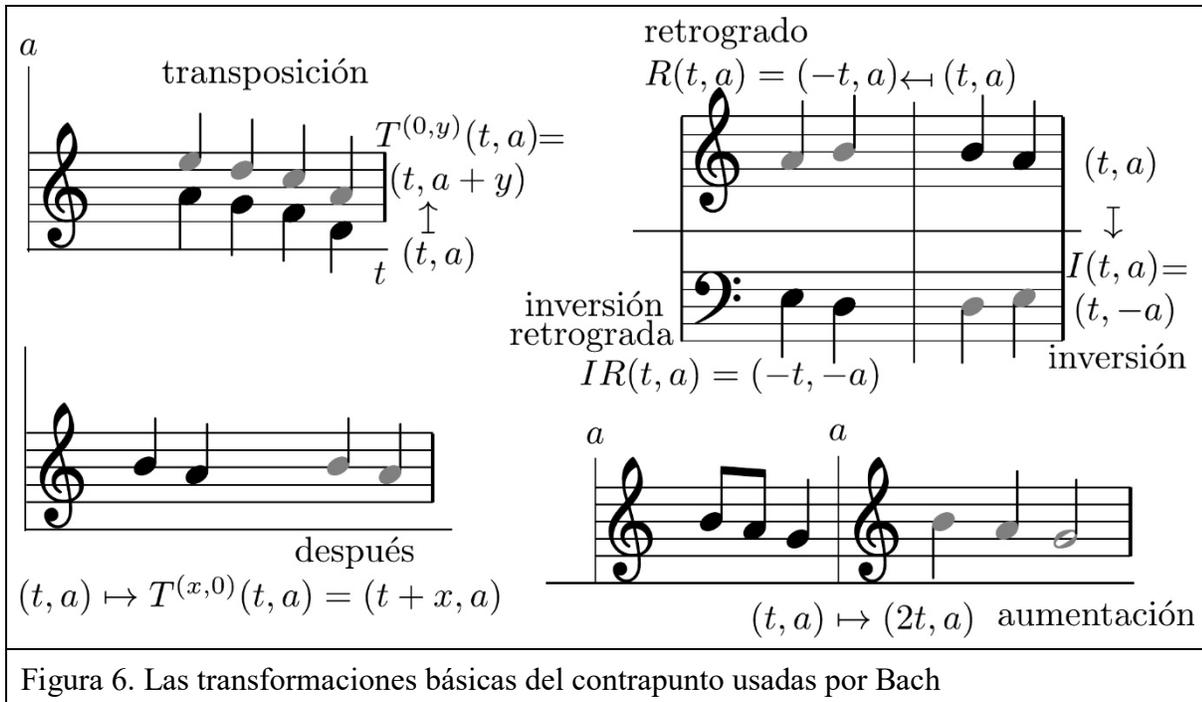


Figura 6. Las transformaciones básicas del contrapunto usadas por Bach

Todas las transformaciones en la Figura 6 son simetrías afines, tal como las definimos en la sección anterior. Podemos destacar que las simetrías de la derecha de la Figura 6, con excepción de la inversión retrograda, no son transformaciones euclidianas pues ellas involucran matrices con determinante distinto de 1.

Un ejemplo de cómo podemos hacer música a partir de estas simetrías es el *No. 7* de los *Catorce Cánones BWV 1087* de Bach. Todos los cánones de esta obra están basados en las primeras ocho notas del bajo del *Aria* de las *Variaciones Goldberg* del mismo autor.



Figura 7. Canon 7: Canon simple sobre el sujeto. A tres voces.

En la Figura 7, encontramos el canon como fue escrito por Bach. En el pentagrama inferior, encontramos el bajo fundamental (*sujeto S*) y, en el pentagrama superior, un contrapunto (*C*) escrito por Bach. El canon debe resolverse a tres voces, donde la tercera voz (*C'*) es obtenida por *inversión* del contrapunto con respecto a la nota *si* en la escala {sol, la, si, do, re, mi, fa#} de sol

mayor.⁸ Si identificamos la escala de sol mayor con el anillo \mathbb{Z}_7 , de tal manera que la nota *si* corresponda al número 2, entonces esta inversión está dada por la simetría $T^4(-1)$ de \mathbb{Z}_7 . En la Figura 8 apreciamos esta inversión.

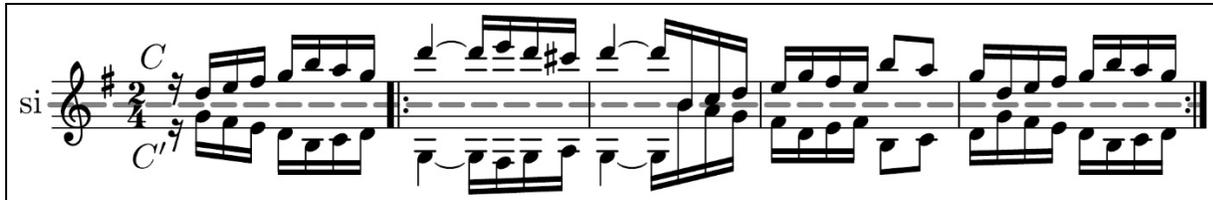


Figura 8. Inversión del contrapunto *C* con respecto a *si* (una octava arriba para facilitar la visualización)

Una vez la tercera voz es obtenida (*C'* en la Figura 8), ella debe comenzar justo donde está puesto el signo sobre la nota *sol* del primer compás en la Figura 7. Esto implica el uso de una simetría del tipo *después* (Figura 6).

El contrapunto *C* tiene la particularidad de que está escrito por *disminución e inversión* del sujeto *S*. Como se muestra en la Figura 9, las primeras ocho notas del contrapunto corresponden a la disminución del sujeto (un cuarto de la duración original) y su posterior inversión. A partir de esta construcción, se pueden obtener las ocho notas a partir del *si* en el tercer compás, por transposición en la escala de sol mayor, aplicando la simetría T^{-2} de \mathbb{Z}_7 .

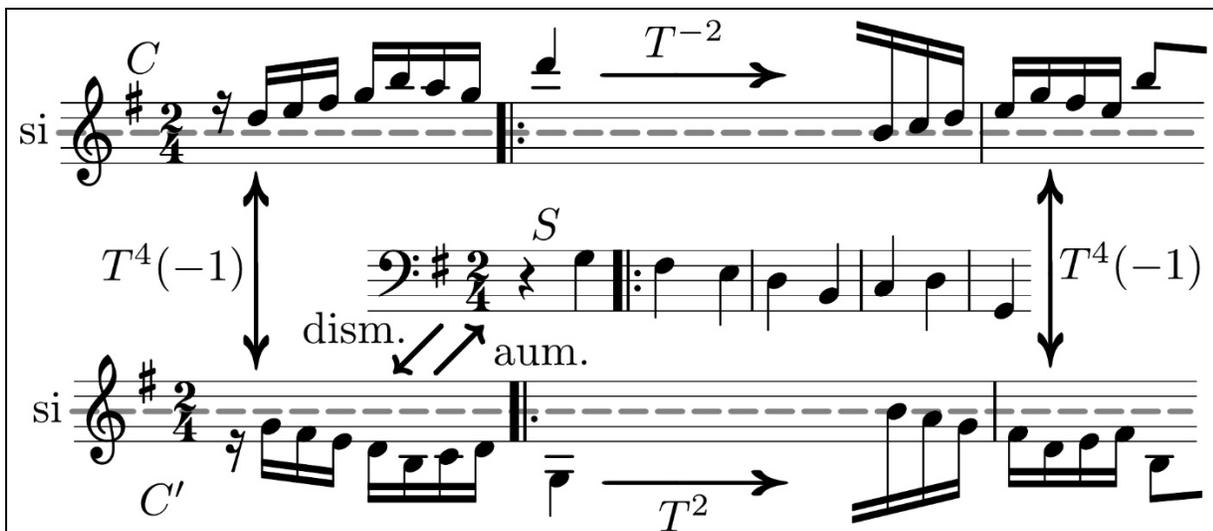


Figura 9. Diagrama conmutativo del *Canon 7*, relación entre las voces

Podemos apreciar el canon resultante en la Figura 10.

⁸ La alteración $\text{do}\sharp$ en el segundo compás se trata como do para efectos de la inversión.



Figura 10. Realización del canon 7

Aún no hemos mencionado la simetría *retrogrado*. Aunque Bach no especifica su uso para este canon, podemos aplicar esta simetría al *canon perpetuo* que se forma entre los compases 2 y 5. El resultado es perfectamente lícito: los intervalos entre voces se preservan (R es una isometría) y los paralelismos entre voces son evitados,⁹ de la misma manera que en el canon original. Además, en los cánones Nos. 1-4, Bach ya había demostrado la viabilidad del retrogrado del sujeto. Para obtener la pieza resultante, léase la Figura 10 de derecha a izquierda, siguiendo las barras de repetición.

MAZZOLA: DEL SISTEMA TONAL A LA CINTA DE MÖBIUS

La armonía básica del sistema tonal se obtiene construyendo una tríada a partir de cada nota de la escala do mayor, como se muestra a continuación:

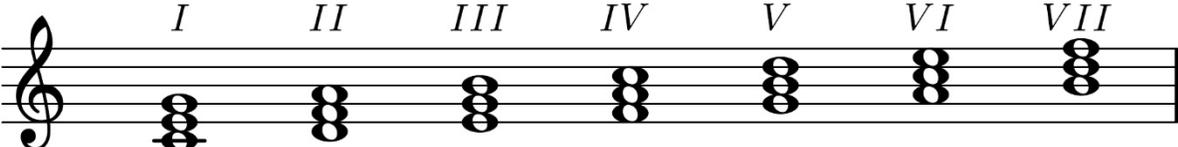
	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>	<i>VI</i>	<i>VII</i>
							
	{do, mi, sol}	{re, fa, la}	{mi, sol, si}	{fa, la, do}	{sol, si, re}	{la, do, mi}	{si, re, fa}

Figura 11. Tríadas de la escala do mayor

Formalmente, la tonalidad *do mayor* (denotada por CM) es el conjunto formado por las tríadas I, II, III, \dots, VII , las cuales llamamos *grados* de la tonalidad. Las demás tonalidades pueden ser obtenidas transponiendo la situación.

En armonía (Schoenberg, 2010, p. 39) es importante saber qué notas comparten dos grados de la tonalidad y, especialmente, qué notas comparte un grado dado con los grados distinguidos I (*tónica*), IV (*subdominante*) y V (*dominante*). Estos tres acordes están relacionados con

⁹ En efecto, los paralelismos son *evitados* en el contrapunto y la armonía clásicos. Una nueva oposición respecto a la geometría afin: lo que en ella se *preserva*, se *evita* en la música.

sensaciones de *reposo*, *preparación* y *tensión*, respectivamente, y constituyen la base del sistema tonal.

Consideremos entonces la colección $N(\text{CM})$ de subconjuntos de CM con intersección no vacía. Podemos dibujar a $N(\text{CM})$ como un grafo cuyos *vértices* son los grados de CM, con una *arista* por cada dos grados diferentes con intersección no vacía y una *cara* triangular por cada tres grados diferentes con intersección no vacía, como en la Figura 12 (derecha). Al identificar las líneas que unen V y VII en este dibujo, obtenemos una cinta de Möbius (Figura 12, izquierda).

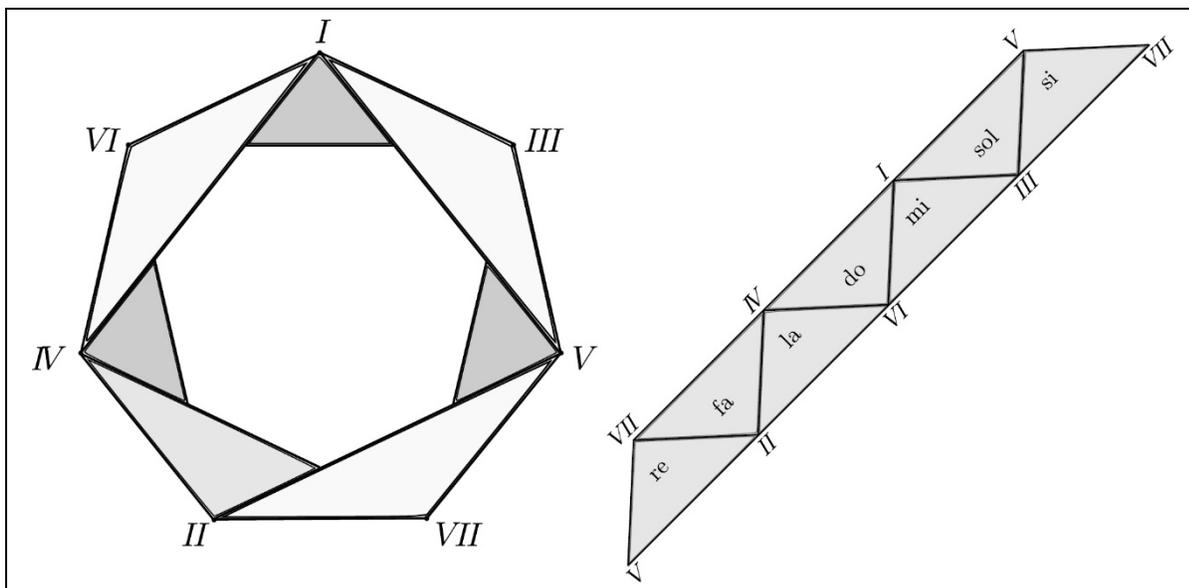


Figura 12. La banda armónica de Mazzola (Agustín y Lluís, 2011)

La obtención de la *banda armónica* no es una mera curiosidad. En efecto, la no orientabilidad de la cinta de Möbius (superficie de una cara) implica que no se pueda definir una función que a cada grado de la tonalidad le asigne un valor de tónica, subdominante o dominante, según la teoría de Hugo Riemann (véase Mazzola et al., 2016, pp. 130-131).

EULER: LA RED DE TONOS

Más allá de si una lista finita de acordes mayores y menores (*progresión armónica*) ocurre dentro del ámbito de la teoría tonal, podemos estudiarla mediante las notas que comparten acordes sucesivos. La razón es que, entre más notas compartan dos acordes, existe una tendencia a una mayor sensación de suavidad en los enlaces armónicos (*conducción de voces*).

La *red de tonos* (*Tonnetz*) fue inventada por Euler¹⁰ y puede construirse como sigue.¹¹ Consideremos el grafo cuyos *vértices* son los doce tonos, con una *arista* por cada intervalo de *tercera mayor*, *tercera menor* o *quinta justa* entre tonos (diferencia de 3, 4 o 7 en \mathbb{Z}_{12} , respectivamente), y una *cara triangular* por cada *tríada mayor* o *tríada menor* (recuérdense las construcciones de la Figura 5). Estrictamente, la superficie obtenida es un *toro*, aunque suele representarse proyectada sobre el plano (véase la Figura 13).

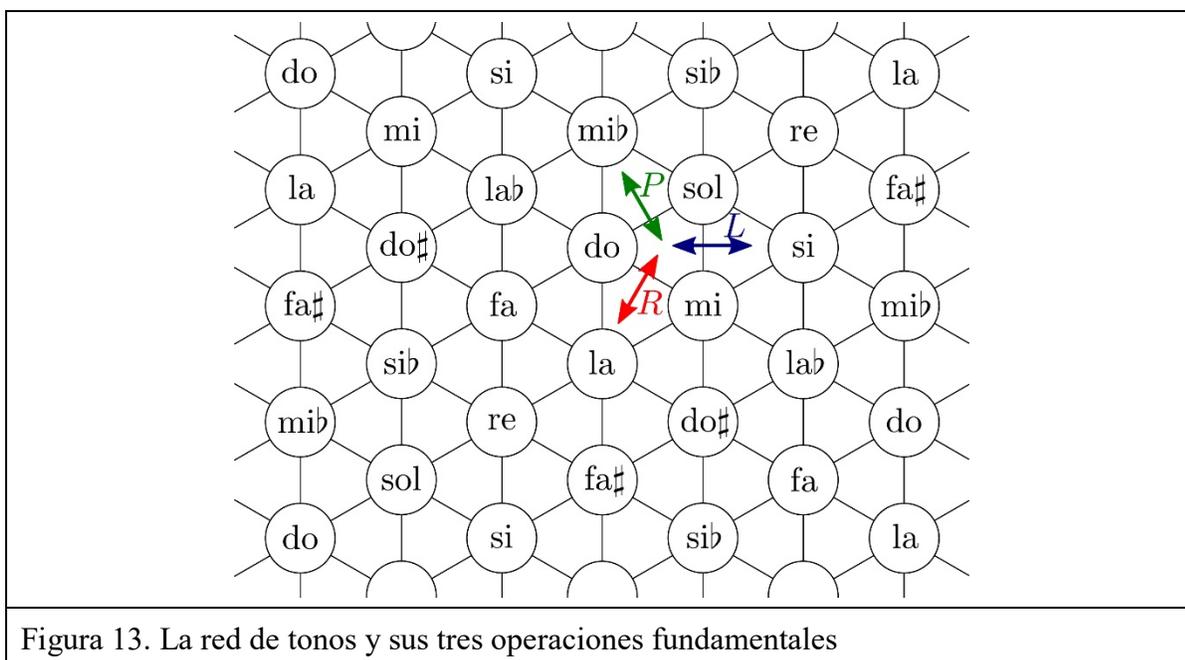


Figura 13. La red de tonos y sus tres operaciones fundamentales

Sobre los acordes (triángulos) de la red de tonos podemos realizar tres operaciones fundamentales, las cuales corresponden a las posibles maneras de enlazar dos tríadas distintas preservando dos notas. La operación P asigna a todo acorde mayor el acorde menor que tiene la misma nota *fundamental*¹² y viceversa. La operación R asigna a todo acorde mayor el acorde menor obtenido al sumar un tono (2 en \mathbb{Z}_{12}) a la *quinta*¹³ del acorde original, y asigna a todo acorde menor el acorde mayor obtenido al restar un tono a la fundamental del acorde original. Finalmente, la operación L asigna a todo acorde mayor el acorde menor obtenido al restar un semitono (1 en \mathbb{Z}_{12}) a la nota fundamental del acorde original, y asigna a todo acorde menor el acorde mayor obtenido al sumar un semitono a la quinta del acorde original. En la Figura 13 se observan estas operaciones aplicadas al acorde do mayor.

¹⁰ Véanse Mazzola et al. (2016, p. 18) y Andreatta (2014).

¹¹ Existen varias versiones de la red de tonos. Aquí, usaremos aquella en Andreatta (2014).

¹² La nota fundamental del acorde do mayor (menor) es Do.

¹³ La quinta del acorde do mayor es sol (intervalo de quinta entre do y sol).

La red de tonos es especialmente útil para explicar progresiones armónicas del romanticismo, en las cuales la experimentación armónica se aparta de la tonalidad y se aprecian ciertos *ciclos* formados con las operaciones fundamentales. A continuación veremos dos ejemplos musicales de ciclos.

MÚSICA DE LA RED DE TONOS

Como señala Cohn (1997), en el segundo movimiento de la *Novena Sinfonía* de Beethoven, compases 143-176, podemos encontrar la progresión de 19 acordes obtenida a partir del acorde Do mayor, aplicando las transformaciones *R* y *L* sucesivamente (véase la Figura 14). El ciclo total recorre los 24 acordes de la red de tonos.

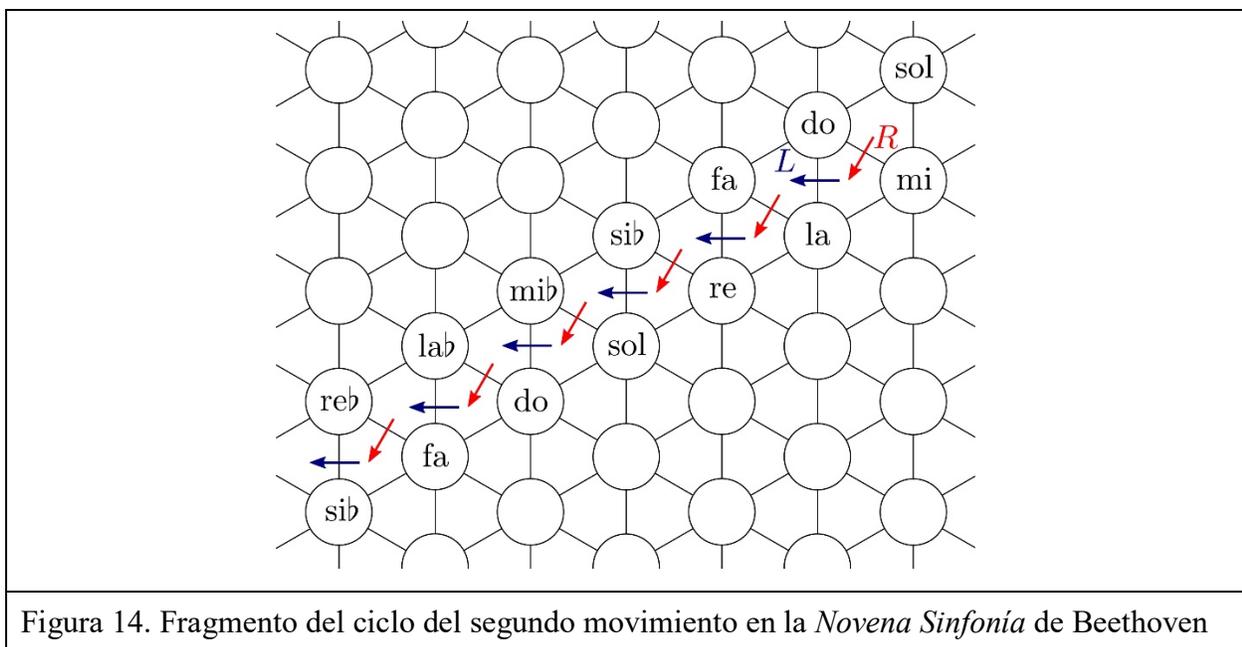


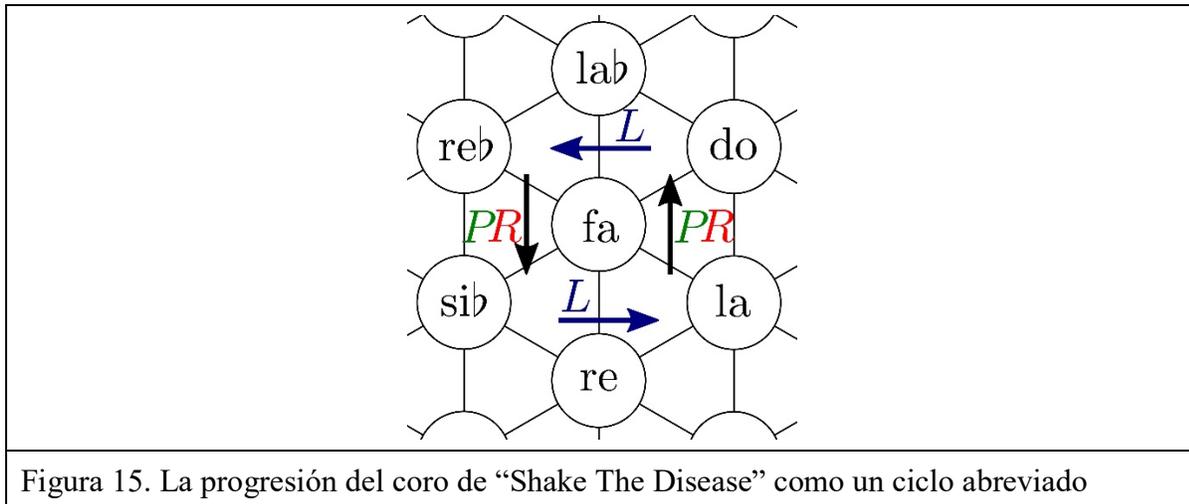
Figura 14. Fragmento del ciclo del segundo movimiento en la *Novena Sinfonía* de Beethoven

Por otro lado, la canción “Shake The Disease”, de la banda Depeche Mode, es un ejemplo sencillo e interesante de la utilidad de las operaciones *P*, *L* y *R* para explicar la unidad de algunas progresiones armónicas en la música *pop*. El coro de esta canción está formado por la progresión de acordes

Re menor, Fa menor, Re \flat mayor, Si \flat mayor.

Esta progresión, como señala Capuzzo (2004), no se puede explicar bajo una lógica tonal. Sin embargo, ella tiene dos características fundamentales: la nota fa pertenece a todas las tríadas y hay un movimiento del bajo por terceras. Esto sugiere un buen comportamiento en la conducción de voces y, por lo tanto, en la red de tonos. En efecto, como se muestra en la Figura 15, esta

progresión es una abreviación (*elisión*) de un ciclo obtenido al aplicar las operaciones *R*, *P* y *L*, sucesivamente, partiendo de la tríada Re menor.



FINAL: PERSPECTIVAS GESTUALES Y CONCLUSIONES

En toda la discusión anterior, hemos obviado lo que quizá es el aspecto fundamental de la música: *su realización en términos corporales*. Sin embargo, las interpretaciones geométricas que hemos hecho en contrapunto y armonía apuntan hacia la *gestualidad*. Todas las simetrías del contrapunto de la Figura 6 pueden interpretarse en términos de gestos: *transposición* y *después* son gestos de trasladar con las manos; la *inversión* y el *retrogrado* corresponden a gestos de rotación espacial de 180 grados; y la *aumentación/disminución* es un gesto de *estiramiento/contracción*. En armonía, la banda armónica y la red de tonos fueron obtenidas *encarnando* y *configurando* simples abstractos en el espacio \mathbb{R}^3 . Más aún, los acompañamientos armónicos fueron obtenidos mediante caminos en la red de tonos, los cuales también corresponden a gestos humanos. Estas perspectivas gestuales son de ayuda en la interpretación musical para explicar a la audiencia conceptos abstractos subyacentes a las composiciones musicales, que pueden ser difícilmente identificables al oído, para facilitar su apreciación. Por otro lado, el intérprete puede traducir esta gestualidad en su propio movimiento corporal al ejecutar una pieza.

Los gestos, a su vez, tienen un modelo geométrico (balance interesante entre geometría y música) basado en la topología y la teoría de categorías. Este modelo fue inicialmente formulado por Mazzola y Andreatta (2007). Luego fue generalizado y unificado por Arias (2018), gracias a la teoría de productos cotensoriales de funtores, dual de la teoría de productos cotensoriales de funtores, los cuáles son una base importante en la teoría de *topos* de Grothendieck.

Finalmente, es importante resaltar las implicaciones para la creatividad musical y matemática de nuestra dialéctica inicial *geometrías/música*, en la cual, como ya observamos, se encuentran los gestos y los grupos como mediadores. Por un lado, gracias a las simetrías podemos variar los objetos musicales para crear nuevos, como en el retrogrado del *Canon No. 7* de Bach o en los ciclos de la red de tonos. Por otro lado, los hechos musicales, como la tonalidad, la conducción de voces y la gestualidad son inspiración para *crear* o *recrear* nociones matemáticas como la geometría afín, la cinta de Möbius, el toro y la teoría de productos cotensoriales de funtores.

REFERENCIAS

- Agustín, O. A. y Lluís, E. E. (2011). Una invitación a la teoría matemática de la música. II. Armonía y contrapunto. *Ciencias*, 102, abril-junio, 68-77.
- Andreatta, M. (2014). Math'n'pop: géométrie et symétrie au service de la chanson. *Bibliothèque tangente*, 5, 92-97.
- Arias, J. S. (2018). *Gesture theory: topos-theoretic perspectives and philosophical framework* (PhD thesis). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
- Atiyah, M. F., y Macdonald I. G. (1969). *Introduction to commutative algebra*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.
- Capuzzo, G. (2004). Neo-Riemannian theory and the analysis of pop-rock music. *Music Theory Spectrum*, 26(2), 177-200.
- Cohn, R. (1997). Neo-Riemannian operations, parsimonious trichords, and their ‘Tonnetz’ representations. *Journal of Music Theory*, 41(1), 1-66.
- Klein, F. (1893). A comparative review of recent researches in geometry. *Bull. New York Math. Soc.*, 2(10), 215-249.
- Mazzola, G., Mannone, M., y Pang, Y. (2016). *Cool math for hot music*. Cham, Switzerland: Springer.
- Mazzola, G. y Andreatta M. (2007). Diagrams, gestures and formulae in music. *Journal of Mathematics and Music*, 1(1): 23-46.
- Schoenberg, A. (2010). *Theory of harmony*. Berkeley, California: University of California Press.