ESTUDIO DEL PERÍMETRO DEL TRIÁNGULO ÓRTICO EN EL MARCO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA Y CON HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

Nicolás Carvajal

Colegio Gimnasio Vermont

nc0593@gimnasiovermont.edu.co

El presente documento describe una experiencia de indagación matemática a partir del desarrollo de una monografía en la asignatura de Matemáticas en el Gimnasio Vermont de Bogotá. En esta se investigaron relaciones entre el perímetro del triángulo órtico y el perímetro del triángulo en el que está contenido. Para ello, se desarrolló un método de caracterización de triángulos acutángulos en el plano, utilizando álgebra vectorial. Lo anterior se hizo con apoyo de un programa de elaboración propia en Python 3 y GeoGebra 5, para representar gráficamente las relaciones entre los triángulos descritos.

INTRODUCCIÓN

El estudio que se describe en esta ponencia surge del desarrollo de una monografía en la asignatura de Matemáticas en el Gimnasio Vermont de Bogotá. En esta se quiso contestar la pregunta ¿cuáles son las relaciones entre el perímetro del triángulo órtico y el triángulo que lo contiene? Para ello, primero se desarrolló un método basado en álgebra vectorial para caracterizar triángulos acutángulos en el plano; el estudio se restringió a estos triángulos debido a que con geometría analítica hay que considerar la orientación en la que abren lo ángulos, sea a favor o en contra de las manecillas del reloj, lo que dificulta generalizar para todos los triángulos. Posteriormente, se usó la geometría analítica para encontrar relaciones geométricas en triángulos equiláteros, particularmente en el triángulo órtico. Finalmente, se escribió un programa para verificar los resultados sobre las relaciones entre sus perímetros, utilizando el lenguaje de programación Python 3 y se propusieron conjeturas sobre otros tipos de triángulos.

Carvajal, N. (2019). Estudio del perímetro del triángulo órtico en el marco de la geometría analítica y con herramientas tecnológicas. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 235-242). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

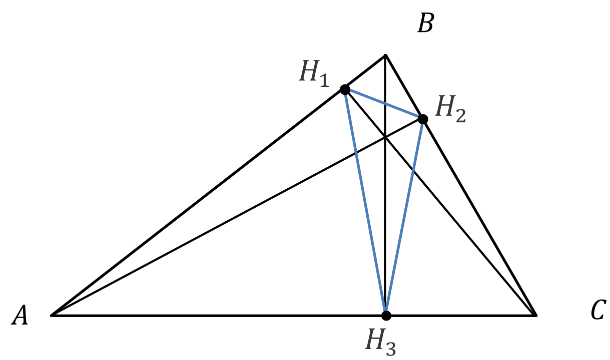

Figura 1. $\Delta \mathrm{ABC}$ y su triángulo órtico $\Delta \mathrm{H_1H_2H_3}$

El triángulo órtico de un triángulo ABC es el que tiene por vértices los pies[24] H_1, H_2 y H_3 de las alturas de ΔABC (Guirnalda Matemática, 2012). Para que los pies de las alturas pertenezcan a los respectivos lados de ΔABC, es necesario que este sea un triángulo acutángulo, por lo que se tuvo que encontrar un método para determinar cualquier triángulo acutángulo en el espacio bidimensional.

El triángulo acutángulo en el plano cartesiano

Para verificar que ΔABC es acutángulo se hizo uso del álgebra vectorial para encontrar los ángulos de este.

El ΔABC (*Figura 1*) puede representarse en términos de vectores tales que:

$$AB = u$$

$$AC = v$$

$$BC = v - u$$

La representación gráfica se muestra en la *Figura 2*.

[24] Entiéndase pie de la altura del triángulo como el punto de intersección entre la altura y el segmento del triángulo.

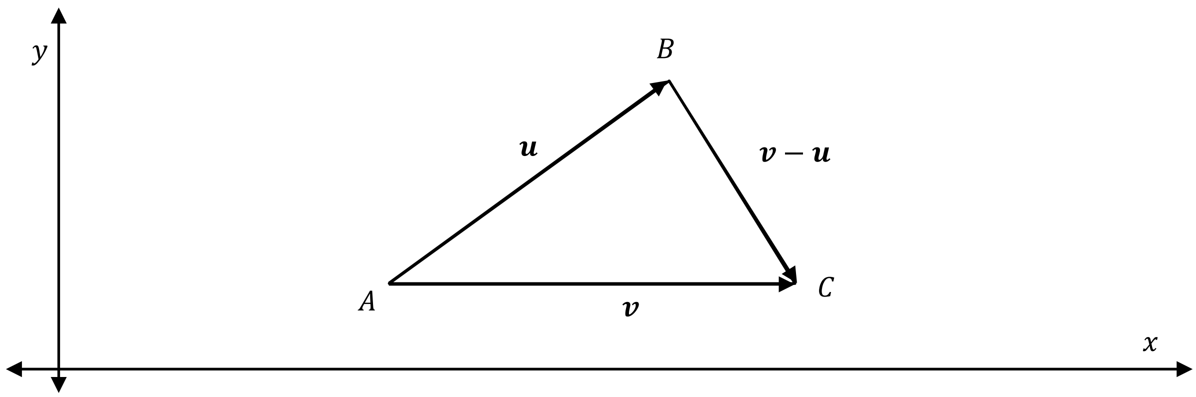

Figura 2. ΔABC en el plano representado en vectores

Si se quiere determinar que ΔABC es un triángulo acutángulo, el producto punto entre todos los vectores debe ser positivo, por lo que se tiene que cumplir que:

$$u \cdot v > 0$$

$$-(v-u) \cdot -v > 0$$

$$-u \cdot (v-u) > 0$$

EL TRIÁNGULO ÓRTICO EN EL PLANO CARTESIANO

Las coordenadas del ΔABC y su triángulo órtico pueden hallarse en términos de los puntos de intersección de las rectas que contienen a los segmentos de los triángulos. De esta forma, para hallar sus respectivos perímetros, se tiene que:

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} + \sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2} + \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}$$

Y:

$$P_{\Delta H_1H_2H_3} = \sqrt{(H_{1x}-H_{2x})^2+(H_{1y}-H_{2y})^2} + \sqrt{(H_{1x}-H_{3x})^2+\left(H_{1y}-H_{3y}\right)^2} + \sqrt{(H_{2x}-H_{3x})^2+(H_{2y}-H_{3y})^2}$$

El perímetro del triángulo órtico en un triángulo equilátero

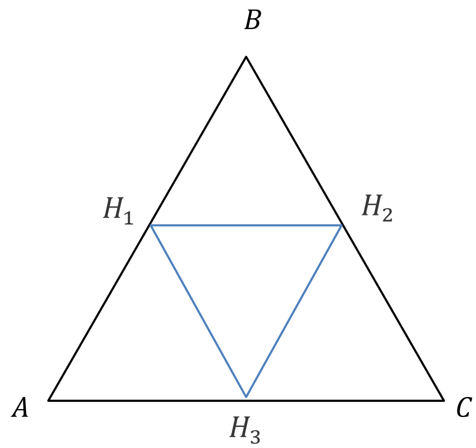

Figura 3. ΔABC equilatero y su triángulo órtico $\Delta H_1H_2H_3$

Las anteriores ecuaciones se pueden simplificar por ser ΔABC equilátero de tal modo que:

$$P_{\Delta ABC} = 3\left(\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}\right)$$

Además, los pies de las alturas de un triángulo equilátero corresponden al punto medio de cada uno de los segmentos ya que la altura corresponde a la bisectriz del triángulo (Torres, 2018). Por esta razón, las coordenadas para H_1 cuando ΔABC es equilátero pueden hallarse de la siguiente manera:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Al encontrar las distancias entre H_1 y H_2 se obtiene que:

$$d(H_1, H_2) = \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - \frac{y_2 + y_3}{2}\right)^2}$$

Que se puede simplificar a:

$$d(H_1, H_2) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}\right)$$

Y como estas distancias son iguales para todos los segmentos, se puede concluir que:

$$P_{\Delta H_1 H_2 H_3} = \frac{3}{2}\left(\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}\right)$$

Así, finalmente:

$$P_{\Delta H_1 H_2 H_3} : P_{\Delta ABC} = 1 : 2$$

USO DE LA TECNOLOGÍA PARA ENCONTRAR CONJETURAS

Lo encontrado anteriormente se pudo plasmar en un programa de elaboración propia, en Python 3. Al ingresar las coordenadas de cualquier triángulo acutángulo, este permite calcular las coordenadas de su triángulo órtico y la relación entre los perímetros de los dos triángulos. El programa, además, permite generar triángulos aleatorios para analizar sus comportamientos. Este se muestra a continuación:

```python
from math import sqrt
from random import randint


def ortico(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3):

    ang1 = (x_2-x_1)*(x_3-x_1) + (y_2-y_1)*(y_3-y_1)
    ang2 = (-x_3+x_2)*(-x_3+x_1) + (-y_3+y_2)*(-y_3+y_1)
    ang3 = (-x_2+x_1)*(x_3-x_2) + (-y_2+y_1)*(y_3-y_2)
     if ang1 > 0 and ang2 > 0 and ang3 > 0:

         h1x = (y_1**2*x_2 - y_1*y_2*x_1 - y_1*y_2*x_2 + y_1*x_1*y_3 -
                y_1*x_2*y_3 + y_2**2*x_1 - y_2*x_1*y_3 + y_2*x_2*y_3 +
                x_1**2*x_3 - 2*x_1*x_2*x_3 + x_2**2*x_3)/((y_1-y_2)**2+(x_1-x_2)
                                                    ** 2)
         h1y = (y_1**2*y_3 - 2*y_1*y_2*y_3 - y_1*x_1*x_2 + y_1*x_1*x_3 +
                y_1*x_2**2 - y_1*x_2*x_3 + y_2**2*y_3 + y_2*x_1**2 - y_2*x_1*x_2
                - y_2*x_1*x_3 + y_2*x_2*x_3)/((y_1-y_2)**2+(x_1-x_2)**2)

         h2x = (y_1*y_2*x_2 - y_1*y_2*x_3 - y_1*x_2*y_3 + y_1*y_3*x_3 +
                y_2**2*x_3 - y_2*x_2*y_3 - y_2*y_3*x_3 + x_1*x_2**2 -
                2*x_1*x_2*x_3 + x_1*x_3**2 + x_2*y_3**2)/((y_2-y_3)**2+(x_2-x_3)
                                                    ** 2)
         h2y = (y_1*y_2**2 - 2*y_1*y_2*y_3 + y_1*y_3**2 + y_2*x_1*x_2 -
                y_2*x_1*x_3 - y_2*x_2*x_3 + y_2*x_3**2 - x_1*x_2*y_3 +
                x_1*y_3*x_3 + x_2**2*y_3 - x_2*y_3*x_3)/((y_2-y_3)**2+(x_2-x_3)
                                                   ** 2)

         h3x = (y_1**2*x_3 + y_1*y_2*x_1 - y_1*y_2*x_3 - y_1*x_1*y_3 -
                y_1*y_3*x_3 - y_2*x_1*y_3 + y_2*y_3*x_3 + x_1**2*x_2 -
                2*x_1*x_2*x_3 + x_1*y_3**2 + x_2*x_3**2)/((y_1-y_3)**2+(x_1-x_3)
                                                    ** 2)
         h3y = (y_1**2*y_2 - 2*y_1*y_2*y_3 + y_1*x_1*x_2 - y_1*x_1*x_3 -
                y_1*x_2*x_3 + y_1*x_3**2 + y_2*y_3**2 + x_1**2*y_3 - x_1*x_2*y_3
                - x_1*y_3*x_3 + x_2*y_3*x_3)/((y_1-y_3)**2+(x_1-x_3)**2)

         perimetro_original = sqrt((x_1-x_2)**2 + (y_1-y_2)**2) + sqrt((x_1-x_3)
                                                                  ** 2
                                                                  +
                                                                  (y_1-y_3)
                                                                  ** 2) + \
             sqrt((x_2-x_3)**2 + (y_2-y_3)**2)

         perimetro_ortico = sqrt((h1x-h2x)**2 + (h1y-h2y)**2) + sqrt((h1x-h3x)
                                                                ** 2
                                                                + (h1y-h3y)
                                                                ** 2) + \
             sqrt((h2x-h3x)**2 + (h2y-h3y)**2)

         print("Relacion entre perimetros = " + str(perimetro_original /
                                                    perimetro_ortico) +
               " | " + str((x_1, y_1)) + str((x_2, y_2)) + str((x_3, y_3)))


x1 = 0
y1 = 0
x2 = 0
y2 = 0
x3 = 0
y3 = 0
for i in range(500):
    x1 = randint(-1000, 1000)
    y1 = randint(-1000, 1000)
    x2 = randint(-1000, 1000)
    y2 = randint(-1000, 1000)
    x3 = randint(-1000, 1000)
```

Figura 4. Programa en Python 3 para triángulos órticos

Por el número de variables utilizadas para triángulos isósceles, se hizo uso de este programa y de GeoGebra 5 y se conjeturó que cuando:

$$\lim_{h\to\infty} P_{\Delta H_1 H_2 H_3} = 2b$$

Donde h es la altura del ΔABC isósceles, b la base de ΔABC y $P_{\Delta H_1 H_2 H_3}$ el perímetro del triángulo órtico de ΔABC. Un ejemplo se muestra en la Figura 5.

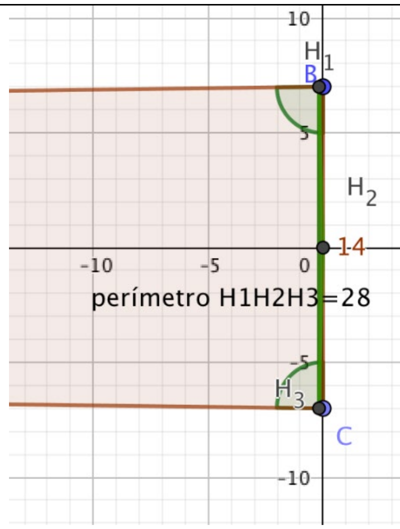

Figura 5. Medida de la base de un triángulo isósceles (14) y perímetro de su triángulo órtico (28)

Además, se conjeturó que en un triángulo que no es equilátero, la proporción entre los perímetros de $\Delta H_1 H_2 H_3$ y ΔABC ya no era de 1:2, como se demostró para triángulos equiláteros, sino que disminuye a medida que la altura de ΔABC crece, con base fija.

Conclusiones

Fue posible, a través del álgebra vectorial, caracterizar triángulos acutángulos en el espacio. Usando la geometría analítica, se pudo demostrar que, para todo triángulo equilátero, el perímetro de su triángulo órtico es la mitad del perímetro del triángulo dado. Finalmente, para triángulos isósceles específicamente, se obtuvo que, al mantener la base del triángulo fija y aumentar su altura, el perímetro de su triángulo órtico tiende a tener 2 veces la medida de la base del triángulo isósceles.

En suma, el uso de herramientas computacionales facilitó la conjetura de relaciones entre el perímetro del triángulo órtico y el triángulo que lo contiene a partir de la geometría analítica. El lenguaje de programación Python 3 y el software matemático GeoGebra 5 permitieron conjeturar resultados de manera ágil y práctica, dando solución a la pregunta de investigación desarrollada durante la monografía.

Finalmente, quedaron abiertas inquietudes tales como ¿qué pasará con los triángulos escalenos? y ¿cuáles son las relaciones entre el área del triángulo órtico y el triángulo que lo contiene? Estas pueden ser abordadas en futuras investigaciones.

REFERENCIAS

Guirnalda Matemática (2012). *El triángulo órtico.* Recuperado de http://apolonio.es/guirnalda/el-triangulo-ortico/

Torres, V. J. D. (2018). *Triángulo equilátero: características, propiedades, fórmulas y área.* Recuperado de https://www.lifeder.com/triangulo-equilatero/#La_bisectriz_y_la_altura_son_coincidentes.