ANGULARIDAD EN LA ESFERA. UNA EXPLORACIÓN DIDÁCTICA

Melvin Cruz-Amaya, **Gisela Montiel Espinosa**

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN)

melvin.cruz@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

Se le atribuye a la geometría escolar la función de desarrollar un pensamiento que permita describir y representar nuestro entorno, y como la Geometría Euclidiana resulta un buen modelo de él, no es común cuestionarla. Sin embargo, las geometrías no euclidianas permiten significar a la geometría euclidiana, cuestionando su estatus universal y su relación con el entorno. Presentamos los resultados de una investigación, sustentada teóricamente en la Teoría Socioepistemológica, cuyo objetivo fue caracterizar procesos de significación progresiva relativos al ángulo, mediante una exploración didáctica en geometría esférica. Se acepta de esta noción la variedad y la complejidad de significados tanto en la esfera como en el plano.

INTRODUCCIÓN

A la geometría escolar se le atribuye la tarea de desarrollar un pensamiento que permite describir, comprender y representar el espacio en el que vivimos. Localmente, la Geometría Euclidiana —GE— potencia una buena descripción de nuestro entorno. Además de enfocarnos en el entorno local, también podemos describirlo de manera molecular y astronómica; en estos casos las Geometrías No Euclidianas —GNE— permiten una explicación más precisa (García, 2016). Las GNE, además de favorecer el propósito atribuido a la geometría, potencian la significación de la GE. Junius (2008) expone que, si los estudiantes pueden transferir ideas geométricas del plano a la superficie de la esfera y de la superficie de la esfera al plano, descubrirán que muchas de esas ideas no funcionan en la esfera y se preguntarán por qué funcionan en el plano. Dado el interés en el desarrollo del pensamiento matemático y, en específico, la significación de la geometría, resulta una fuente importante de información la idea de atender una vieja noción geométrica en un nuevo escenario (Cruz-Amaya, 2019).

Cruz, M. y Montiel, G. (2019). Angularidad en la esfera. Una exploración didáctica. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 107-115). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Entre otros, los argumentos anteriores permitieron plantear una investigación en el proceso de significación progresiva de la línea recta y el ángulo en la geometría esférica, un caso particular de la geometría elíptica, una de las GNE. En busca de la caracterización de dicho proceso mediante una exploración didáctica, esta investigación se pregunta, qué significados de la línea y el ángulo se construyen a partir de su uso en la esfera. En este documento, se reporta el proceso de investigación y los resultados obtenidos relativos al ángulo.

De la revisión de literatura

De las consideraciones históricas-epistemológicas, cognitivas y didácticas de las investigaciones en la disciplina sobre el ángulo y otras nociones geométricas trabajadas en el plano y en la esfera, se destaca la falta de una caracterización general de ángulo que contemple sus diferentes contextos de aplicación y sus distintas representaciones. Por ello, se acepta que el concepto de ángulo tiene naturaleza polifacética; es decir, múltiples significados que dependen de la variedad de contextos de aplicación y representaciones. Para Aristóteles (384-322 a. C.) un ángulo era una cualidad, visto como la deflexión o la fractura de una línea (por su forma), era una relación (debido a cómo se define) y una cantidad (por su medida) (Rotaeche y Montiel, 2011).

En términos cognitivos, Mitchelmore y White (2000) presentan una teoría para el desarrollo del ángulo, la cual se centra en relacionar los conceptos angulares con experiencias físicas; busca, en su etapa final, explicaciones abstractas del ángulo (ángulo abstracto), que emergen de relacionar diferentes contextos angulares (ángulo contextual). Estos contextos son clasificaciones de situaciones en las que se involucra el ángulo (ángulo situado). Mediante esta teoría, se lograron describir siete categorías de contexto angulares (giro, líneas que se cruzan, pendientes, esquinas, objetos y caminos doblados, direcciones y aperturas). A través de experiencias didácticas, se ha logrado describir al ángulo según la cantidad de lados visibles, las categorías aristotélicas y las propiedades estáticas y dinámicas del propio concepto (Rotaeche y Montiel, 2011).

Elementos teóricos

Dado el interés por los procesos de significación de las nociones matemáticas, este proyecto de investigación se cimenta teóricamente en la Socioepistemología. Esta pretende la teorización de formas de pensamiento matemático, estudiando la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional, siendo una teoría contextualizada, relativista, pragmática y funcional (Cantoral, 2013). Se plantea un cambio de focalización al estudiar los fenómenos didácticos, "dejar de analizar exclusivamente a los conceptos matemáticos para empezar a analizarse juntamente con las prácticas que acompañan a su producción" (Cantoral, 2013, p. 46), considerando a la matemática como una producción humana situada cultural, histórica e institucionalmente.

El saber matemático es construido cuando se pone en uso el conocimiento matemático. En otras palabras, ese conocimiento adquiere un sentido mediante su uso y se convierte en un saber. Desde la Socioepistemología, se contemplan cuatro dimensiones del saber —didáctica, cognitiva, epistemológica y social—. Este proyecto profundiza en las dimensiones cognitiva y social. La dimensión cognitiva trata las formas en las cuales se construyen y se apropian significados, aceptando que la significación se da a través de los *usos* de las nociones matemáticas. En esta investigación, entendemos los *usos* como "las formas en que es empleada o adoptada determinada noción en un contexto específico" (Cabañas-Sánchez, y Cantoral, 2012, p. 98). Estas formas pueden ser conscientes e inconscientes, presentes de manera implícita o explicita mediante representaciones típicamente escolares o del contexto (Rotaeche, 2012). Por medio de la dimensión social se reconoce *lo social* no solo a nivel de interacción social, sino como el elemento que muestra, explica y justifica la construcción del saber.

A través de la interacción del sujeto con el objeto en un contexto específico, se caracterizan evoluciones de prácticas que constituyen el Modelo de Anidación de Prácticas (MAP), modelo que propone la Socioepistemología para explicar la construcción del conocimiento matemático. En su evolución es posible inferir los usos de las nociones matemáticas, y, con ellos, caracterizar significados asociados a dichas nociones. En esta investigación se utilizaron para el análisis, los dos primeros niveles del MAP: i) *las acciones*, emergentes de la primera interacción del sujeto con el medio, buscando una adaptación en el entorno y una organización interna; para identificarlas y caracterizarlas las asociamos a las preguntas ¿qué hace? y ¿cómo lo hace?; y ii) *las actividades*, la cuales son prácticas instrumentales con intencionalidad, mediadas y situadas socioculturalmente, asociadas a la pregunta ¿para qué lo hace?

Dada la naturaleza geométrica de las nociones matemáticas tratadas y la búsqueda de sus usos en la evolución de prácticas, se retoma como una de las herramientas teóricas-metodológicas, el

Modelo de Trabajo Geométrico (MTG). Este emerge de un estudio sistémico de la naturaleza de la geometría desde diferentes esferas de conocimiento y sus convergencias (Rubio-Pizzorno, y Montiel, 2017). El modelo es propuesto y caracterizado por Rubio-Pizzorno (2018). Se construye desde una epistemológica pluralista; es decir, considera la construcción del conocimiento geométrico desde diferentes esferas del conocimiento, y permite el reconocimiento de lo geométrico en la experiencia. Ambas consideraciones nos permitieron adaptarlo y hacer del MTG una herramienta en función de nuestro posicionamiento teórico general y nuestro interés particular (Cruz-Amaya, 2019).

El MTG explica el trabajo geométrico —manera de hacer/estudiar geometría—, mediante un esquema con dos polos: lo concreto y lo teórico. Se describe un mecanismo de tránsito entre los dos polos. Para pasar de lo concreto a lo abstracto, se requiere la *práctica geométrica de abstracción*. Esta demanda una intuición empírica —permite caracterizar propiedades gráfico-espaciales de los *diagramas* (representaciones gráficas)— coordinada con una intuición sofisticada —permite caracterizar propiedades teóricas—, para interpretar los símbolos, reconocer e identificar propiedades antes construidas en los diagramas concretos. Para pasar de las propiedades teóricas a los diagramas de dichas propiedades, se requiere la *práctica geométrica de representación*. Esta puede generar dos tipos de diagramas: el bosquejo —con escasa precisión— y la construcción —tiene un grado aceptable de precisión—.

METODOLOGÍA

Este es un estudio cualitativo-interpretativo. La naturaleza del contenido matemático tratado, el propósito, la estructura y la fundamentación del proyecto de investigación permitieron la constitución de un método de investigación que se denominó *exploración didáctica*. Este método está enmarcado en tres grandes categorías: recolección, organización y análisis de los datos. Para lograr estos tres procesos se requiere pasar por 5 pasos —planeación del instrumento de investigación (una experiencia didáctica de tipo laboratorio de matemáticas), protocolo previo a la puesta en escena, puesta en escena, organización de los datos y análisis de los datos—. Se busca con ello cumplir un ciclo de la Investigación Basada en el Diseño (IBD) —preparación y diseño, experimento de enseñanza y análisis retrospectivo—.

En esta experiencia participaron 6 estudiantes (5 mujeres y 1 hombre) de último año de bachillerato (entre 16 y 18 años), de la Escuela Preparatoria Oficial Anexa a la Normal Núm. 3 de Nezahualcóyotl, Estado de México, México. Desde un plano didáctico llamamos a la experiencia *laboratorio de matemática,* con un diseño fundamentado por nuestro posicionamiento teórico y elementos históricos-epistemológicos, cognitivos y didácticos de la revisión de la literatura. El laboratorio se diseñó con una estructura general que pretende la construcción de una noción geométrica en la superficie de la esfera y después una relación con una noción de geografía, trastocando la interdisciplinariedad. Se buscó que los participantes exploraran, describieran y resignificaran las nociones de línea y de ángulo en la esfera, al pasar por las siguientes fases: concepción de la esfera de forma intrínseca, caracterización de la línea recta esférica, caracterización del ángulo esférico y caracterización de polígonos esféricos. Cada fase está compuesta por situaciones problemas, y cada situación problema por tareas.

ANÁLISIS

De la tercera fase del laboratorio —caracterización del ángulo esférico—, se retoma una situación problema (cuarta situación problema) y de ella una tarea en particular (segunda tarea), con el fin de ejemplificar el proceso de análisis. En esta, se presentan algunas rutas de avión en el globo terráqueo. Primero se solicita a los estudiantes que relacionen dichas rutas y dibujen en una esfera de unicel en blanco; después se muestran tres modelos que relacionan segmentos de línea recta en el plano (ver Figura 1); luego, utilizando una regla plana, se les pide que dibujen dichos modelos en un globo desinflado y seguidamente inflen el globo; posteriormente, se les solicita que clasifiquen sus relaciones de rutas en los tres modelos y los caractericen en la superficie esférica.

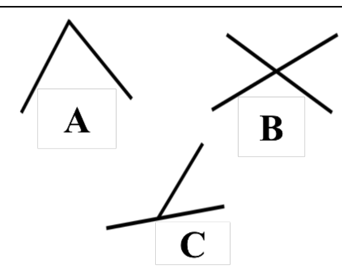

Figura 1. Modelos que relacionan dos segmentos en el plano.

Fuente: Elaboración propia.

Por medio del MTG, se describe la *práctica geométrica de representación*, en los dibujos de relaciones de rutas y modelos en el globo, y la *práctica geométrica de abstracción* al interpretar representaciones, reconocer elementos geométricos e identificar diferencias en los modelos. A través de la matriz de la Figura 2, se logró caracterizar las siguientes ***acciones*** del MAP: *relacionar* rutas, modelos y medidas; *interpretar* relaciones, modelos y ángulos; *establecer* elementos de referencia; *trazar* elementos geométricos; *clasificar* relaciones; entre otras. Por medio de los argumentos geométricos de los estudiantes, caracterizados a través del MTG y de las acciones, se plantea la pregunta *para qué hace lo que hace*, para identificar la práctica en el nivel de ***actividad***. En esta tarea, reconocemos que los estudiantes relacionan rutas, interpretan dicha relación como la intercepción de dos rutas, establecen referentes, para finalmente *representar* esa relación.

Momento e hipótesis didáctica –HD–	**Construcción social del conocimiento matemático desde la Socioepistemología**		
	Argumentos, reflexiones y confrontaciones presentados mediante los procedimientos, construcciones y explicaciones en forma escrita, icónica, corporal o verbal.	**Práctica en el nivel de acción**	
		¿Qué hacen?	**¿Cómo lo hacen?**
I. Momento: **confrontación** al representar lo observado**.**			

Figura 2. Matriz para identificar y caracterizar acciones.
Fuente: Elaboración propia.

En esta evolución de prácticas y considerando los argumentos geométricos, se describieron las formas en que es empleado y adoptado el ángulo en los argumentos, reflexiones y confrontaciones presentadas por los estudiantes, es decir, los usos del ángulo en el desarrollo del laboratorio, para explicar a partir de ellos, procesos de significación progresiva asociada a dicha noción. Entre los usos del ángulo se destaca *el ángulo como líneas que se cruzan en un punto —incidencia y cruce—*, caracterizado entre otras, por las siguientes intervenciones de los participantes: cuando Luna —seudónimo de una de las participantes— explica los modelos: "no tienen las mismas medidas, no tienen la misma abertura, el modelo B está cruzado en su totalidad, el A solo se une y el C es una línea recta con un cachito"; o cuando Beka habla del ángulo como: “la unión de dos segmentos de recta en un punto, en cualquier superficie”.

ALGUNOS RESULTADOS

Del análisis de cada una de las tareas sobre el ángulo, se lograron caracterizar cuatro actividades: *representar* ángulos, *reconocer* elementos del ángulo, *identificar* ángulos, y *comparar* unidades de medida o medidas de ángulos. Las primeras tres se asocian al ángulo como cualidad y como relación, y la última se vincula al ángulo como cantidad. Con lo que se identifica la naturaleza polifacética del ángulo, también en la superficie de la esfera. Se reconoce mayor evidencia de confrontación entre el plano y la superficie esférica, en el significado del ángulo como cantidad estática y dinámica. Esta evidencia se da en la construcción —en la que se divide una línea recta en partes iguales y se trazan segmentos, considerando el papel de la superficie— y uso de un instrumento para medir ángulos.

Mediante la evolución de prácticas en los niveles de acción y actividad, se caracterizaron catorce usos del ángulo: el ángulo como figura compuesta; como una relación; como la abertura entre dos lados; como elemento de composición de otra figura; como líneas que se cruzan en un punto; como giro; como indicador de dirección; como inclinación de líneas; como unidad de medida; como argumento en propiedades, nombres y clasificaciones de polígonos —al reconocer la cantidad de ángulos en el polígono y sus medidas—; como consecuencia de propiedades de polígonos; ángulo emergente de un punto, es decir, el ángulo centrado en el punto de intercepción de dos líneas; el ángulo recto como unidad referente de medida de ángulos; y el ángulo en la medición de distancias.

CONCLUSIONES

Los usos del ángulo nos refieren a su razón de ser en tareas particulares, pero a medida que se desligan de la situación problema, nos refieren a significados propios del ángulo. Rotaeche (2012) llama *angularidad* al ángulo como saber matemático; es decir, al uso del ángulo en diferentes contextos. Este constructo lo retomamos, dada la caracterización presentada del proceso de significación del ángulo a partir de su uso. El buscar significar al ángulo en la superficie de la esfera provocó que los estudiantes lo cuestionaran en el plano y valoraran el papel de la superficie en la representación de nociones geométricas; esto permitió que se cuestionaran las características propias del ángulo.

Durante el laboratorio de matemáticas, se caracterizaba una noción geométrica y luego se potenciaba una comparación con una noción de geografía, por ejemplo: puntos con coordenadas geográficas, puntos opuestos con los polos norte y sur, líneas rectas con el ecuador y los meridianos, y ángulo con los husos horarios. En las primeras tareas los estudiantes trasladaban ideas de la esfera al plano y viceversa. En cambio, en las últimas tareas se mantenían en el escenario esférico, al trasladar ideas de geometría esférica a geografía y de geografía a geometría esférica; en ese sentido, reconocemos en la geografía un escenario fructífero para tratar la geometría esférica.

Referencias

Cabañas-Sánchez, G. y Cantoral, R. (2012). El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 1031-1040.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cruz-Amaya, M. (2019). Linealidad y angularidad en la esfera. Un nuevo escenario de tra-bajo geométrico (Tesis de maestría inédita). Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados (Cinvestav), Ciudad de México, México. doi: 10.13140/RG.2.2.25114.49604

García, A. (2016). Las Teorías No Euclidianas y su influencia en la filosofía de las ciencias del siglo XX. *Journal of Education and science, 1*(1), 21-27

Junius, P. (2008). A case example of insect gymnastics: how is non-Euclidean geometry learned? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39*(8), 987-1002. doi:10.1080/00207390802136529

Mitchelmore, M., y White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstractions and generalization. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 209-238.

Rotaeche, A. (2012). Construcción de conocimiento matemático en escenarios escolares. El caso de la angularidad en el nivel básico (Memoria predoctoral no publicada). CICATA-IPN, México.

Rotaeche, A. y Montiel, G. (2011). Desarrollo histórico como mirador de conocimientos para la enseñanza del concepto de ángulo. En G. Buendía (ed.), *Reflexión e investigación en Matemática Educativa* (págs. 191-218). Ciudad de México, México: Lectorum.

Rubio-Pizzorno, S. (2018). Integración digital a la práctica del docente de geometría (Tesis de Maestría no publicada). Cinvestav-IPN, México. doi: 10.13140/RG.2.2.15488.94728/1

Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017). Geometría dinámica como actualización didáctica de la evolución conceptual de la geometría. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus* Aplicaciones, 23 (pp. 143-148). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.