

# TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS A PARTIR DE LA SEMEJANZA Y LA CONGRUENCIA

**Gisel Yuranny Cuero Banguera, Ana Marven Manyoma Torres**

*Universidad del Valle*

gisel.cuero@correounivalle.edu.co, ana.manyoma@correounivalle.edu.co

La siguiente propuesta de indagación nace con el propósito de analizar las dificultades que presentan los estudiantes de grado 7° cuando, al darse una relación de semejanza o congruencia entre una figura geométrica y su imagen bajo una transformación geométrica, no logran reconocer las propiedades que permiten determinar qué transformación se ha aplicado. Como soporte a la investigación, se tienen en cuenta a Julio (2014), Montes (2012), y lo establecido por el MEN (2006), entre otros, respecto a la enseñanza de los objetos geométricos semejanza, congruencia y transformaciones geométricas.

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el currículo escolar, la semejanza y la congruencia constituyen uno de los temas de gran relevancia en el ámbito geométrico. Esto requiere reconocer las unidades de una figura plana, sus características y propiedades, lo cual es necesario para establecer las relaciones entre una figura y su imagen bajo una transformación geométrica, que además requiere tener en cuenta la forma, el tamaño, la posición y las propiedades que se mantiene invariantes bajo la transformación (Julio, 2014).

Algunas investigaciones identifican dificultades en el proceso de aprendizaje de las transformaciones geométricas. Julio (2014) y Montes (2012) manifiestan que los estudiantes presentan dificultad para comprender los efectos que las distintas transformaciones en el plano tienen sobre las figuras. Además, respecto a la naturaleza de las transformaciones, es decir, las características invariantes que permiten distinguir una transformación de otra, Montes dice:

[...] una de las principales dificultades que generan errores en los estudiantes al momento de trabajar con movimientos en el plano, radica en la naturaleza de las transformaciones geométricas. (Montes, 2012, p. 26)

Generalmente, los profesores de grado 7° enseñan las transformaciones geométricas mediante el reconocimiento del cambio de posición de una figura. No se detienen a analizar las propiedades de la figura y su imagen para determinar si son congruentes o semejantes, y por ello, a reconocer que algunas transformaciones conservan medidas de lados y de ángulos, y otras solo de ángulos. Por ello, el estudiante no logra reconocer las características y propiedades de la transformación geométrica aplicada a una figura geométrica. No ven la relación entre la congruencia y semejanza con las propiedades de las transformaciones.

Dicho lo anterior, surge la siguiente pregunta: ¿a qué están asociadas las dificultades que presentan los estudiantes de grado 7° cuando, al encontrar una relación de semejanza o congruencia entre una figura geométrica y su imagen bajo una transformación, no logran reconocer las propiedades que permiten establecer el movimiento en particular que se ha aplicado?

## CONGRUENCIA, SEMEJANZA Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

### **Aportes de algunas investigaciones**

Para encontrar una respuesta a la pregunta de investigación, se tendrán en cuenta las investigaciones de Julio (2014), Montes (2012), Cárdenas (2013) y lo establecido por el Ministerio de Educación Nacional (2006), en adelante MEN, con respecto a la enseñanza de las matemáticas, específicamente, de los objetos geométricos, semejanza, congruencia y transformaciones geométricas.

En relación con los conceptos de semejanza y congruencia, Cárdenas (2013) enuncia que dos figuras geométricas planas son congruentes, si una de ellas se puede cambiar de posición, rotándola sobre un punto, reflejándola sobre un eje o punto, o trasladándola, de tal manera que coincida con la otra. Para ello, se deben tener en cuenta algunas propiedades que permiten comprender el concepto de congruencia: congruencia de segmentos y congruencia de ángulos.

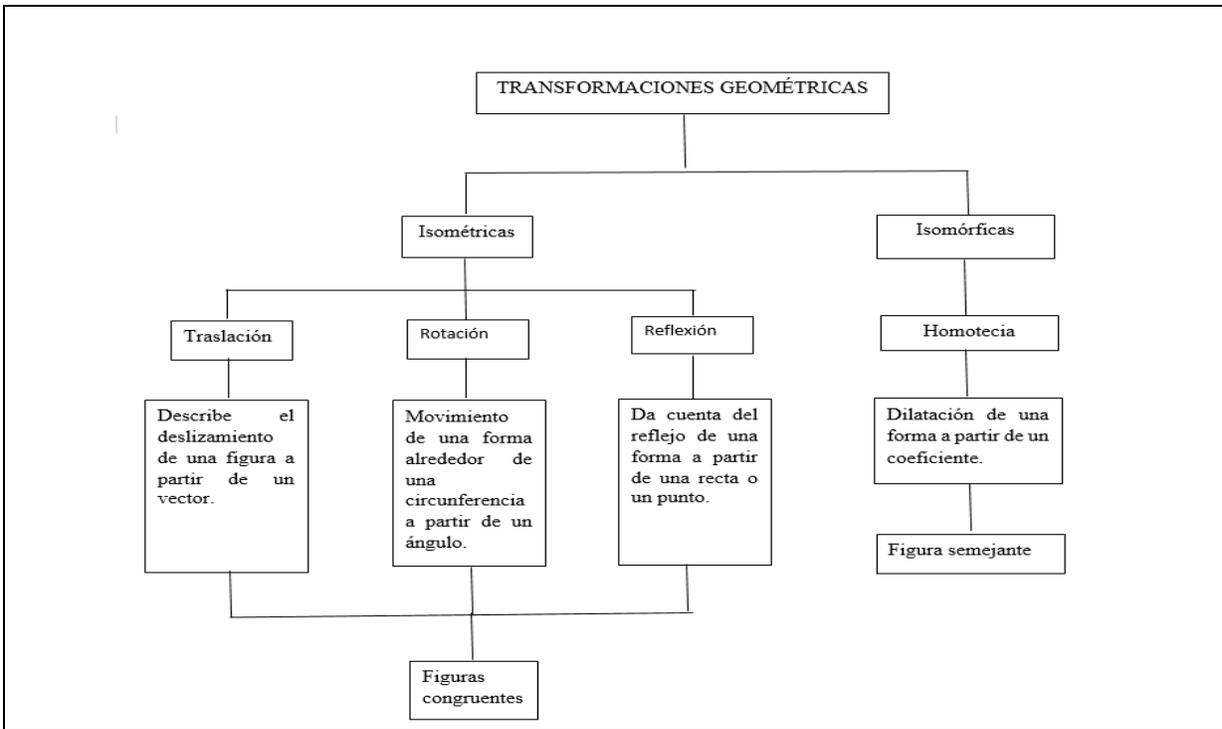
De manera análoga, Cárdenas (2013) expresa que la relación de semejanza entre polígonos se establece relacionando los lados y ángulos de las figuras. Dos polígonos son semejantes cuando las medidas de los lados correspondientes guardan la misma proporción, y sus ángulos respectivos son congruentes. Intuitivamente, dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma, aunque su tamaño sea diferente. Resumiendo,

[...] dos polígonos son congruentes, si y solamente si, existe una isometría que envía uno en el otro, y dos polígonos son semejantes, si y solamente si, existe una transformación que envía uno en el otro. En este caso la transformación puede ser una homotecia o la composición de una homotecia con una isometría. (Julio, 2014, p. 9)

El MEN (2006) plantea que los conceptos de semejanza, congruencia y transformaciones geométricas deben ser abordadas en el grado séptimo para así fortalecer el desarrollo del pensamiento espacial. La aplicación de transformaciones rígidas sobre figuras bidimensionales genera la necesidad de identificar las relaciones y propiedades de semejanza y congruencia a partir de representaciones visuales. De lo anterior, la importancia de abordar estos objetos de conocimiento, pues permiten establecer relaciones entre formas de las figuras y los movimientos.

### **Transformaciones geométricas**

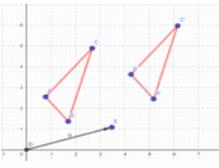
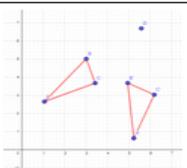
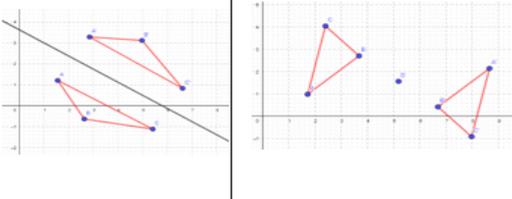
Las transformaciones geométricas se pueden clasificar en dos grupos: isométricas e isomórficas. Son isométricas, si se conserva la forma y tamaño de la figura, mientras que son isomórficas, si solo se conserva la forma. A continuación, se muestra un diagrama que sintetiza las propiedades de las transformaciones.



**Figura 1.** Diagrama explicativo de las transformaciones geométricas abordadas en la investigación.

Fuente: Elaboración propia.

Se tiene que la congruencia entre figuras puede ser el resultado de una de las siguientes transformaciones geométricas: rotación, traslación, simetría y una homotecia, cuando esta es la identidad, mientras que la semejanza es el resultado de una homotecia. Por ello, es necesario cuestionarse sobre la forma de cómo abordar las transformaciones geométricas a partir de la semejanza o congruencia de figuras planas. Se podría hacer a través del reconocimiento de qué hace que una figura plana sea congruente con otra, y así, establecer la correspondencia entre los vértices. Esto permite determinar el vector director, el ángulo de rotación, el eje o el centro de simetría, para identificar la transformación que subyace. Mientras que a través del reconocimiento de lo que hace que una figura plana sea semejante a otra, el estudiante podrá establecer una homotecia, y determinar el coeficiente  $k$  correspondiente a dicha transformación.

TIPO DE RELACIÓN	REPRESENTACIÓN	TRANSFORMACIÓN GEOMÉTRICA
SEMEJANZA		Traslación
		Rotación
		Reflexión
CONGRUENCIA		Homotecia

**Figura 2.** Diagrama comparativo de la relación de congruencia y el tipo de transformación geométrica.

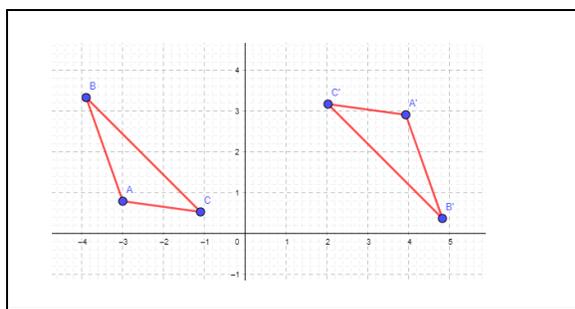
Fuente: Elaboración propia.

Para el reconocimiento de una transformación geométrica, inicialmente se determina qué tipo de relación ( semejanza o congruencia) se puede dar (Figura 2). Para establecer la relación, se debe identificar visualmente la correspondencia entre los vértices para establecer, también visualmente, si los ángulos correspondientes son congruentes y si los lados correspondientes son congruentes o proporcionales. Seguido de ello, se deben precisar las propiedades que permanecen invariantes en la aplicación de la transformación, para poder identificarla. De acuerdo con esto, se puede orientar el acercamiento a la semejanza, la congruencia y las transformaciones, usando el plano cartesiano como herramienta. Esto ayuda a que el estudiante desarrolle procesos de visualización y ubicación en el espacio.

Por tanto, es pertinente tener en cuenta los elementos que caracterizan a cada transformación (ángulo, longitudes de segmentos, colinealidad y equidistancia de puntos, semejanza y congruencia entre dos figuras, etc.) pues, es lo que permite identificar el movimiento que se ha generado.

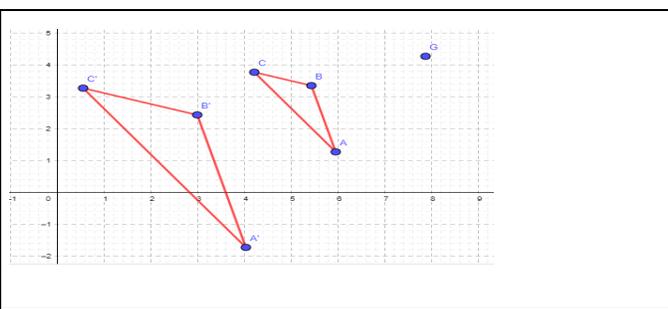
## Ejemplos

En lo que sigue, se presentan ejemplos que ilustran el proceso que se puede seguir para identificar una transformación geométrica a partir de la relación de semejanza y congruencia en triángulos.



**Figura 3.** Reconocimiento del movimiento en el plano a partir de la congruencia de figuras.

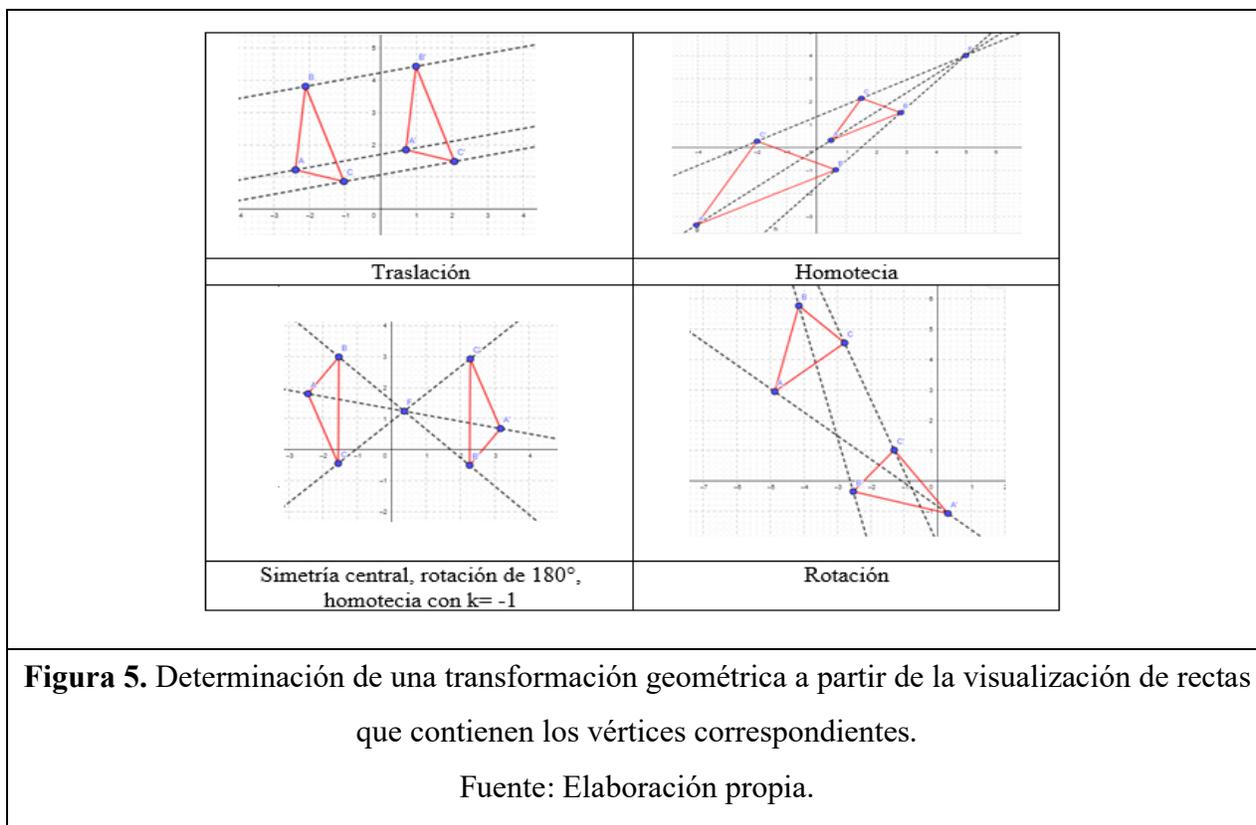
Fuente: Elaboración propia.



**Figura 4.** Reconocimiento del movimiento en el plano a partir de la semejanza de figuras.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 3, el estudiante podrá reconocer, a través de la comparación de los triángulos, que la transformación aplicada puede ser una rotación de  $180^\circ$ , una reflexión central o una homotecia con  $k = -1$ . Mediante la identificación de algunos elementos, tales como: tamaño y forma de las figuras, posición inicial y final, punto medio del segmento con extremos un vértice y su correspondiente, entre otros, se podrá reconocer el movimiento aplicado a una figura para obtener su imagen. Para ello, se toman las rectas que contienen vértices correspondientes y se determina que, si se intersecan, se tendría una rotación, una simetría o una homotecia, pero si son paralelos, se estaría presentando una traslación. Si se intersecan y las figuras son semejantes, se estaría presentando una homotecia; pero si son congruentes, se estaría dando una simetría o rotación. Ver Figura 5.



Respecto a la Figura 4, para identificar el movimiento que subyace en la representación, el estudiante debe, inicialmente, identificar las propiedades que caracterizan a la figura inicial y final. Luego debe tener en cuenta si ha habido alteración de la forma o del tamaño de la imagen, y si cada vértice de la figura inicial, el correspondiente de la figura final, y el centro homotético están alineados. Con ello sabrá si se trata de una homotecia.

## METODOLOGÍA

La propuesta de investigación es de tipo cualitativo. Se desarrollará con estudiantes de una institución oficial del Distrito de Buenaventura. Inicialmente se diseñará un conjunto de situaciones que permitan describir la forma como acceden los estudiantes de 7° grado al reconocimiento de la aplicación de las transformaciones geométricas, a partir de la relación de semejanza y congruencia de figuras planas. Además, se realizarán consultas y análisis de algunas investigaciones que se han enfocado en la relación entre semejanza, congruencia y transformaciones geométricas, con la finalidad de conocer las posibles dificultades encontradas

en la comprensión de los conceptos anteriores. Así mismo, se tendrán en cuenta los estándares básicos de competencia planteados por el MEN (2006), debido a que propone una relación entre los objetos de conocimientos a trabajar y el desempeño que los estudiantes deben alcanzar sobre ese objeto.

#### EXPECTATIVAS

Se espera diseñar tareas en las que el estudiante pueda establecer conjeturas por medio de la interpretación de dos figuras en el plano, predecir resultados y, por último, corroborarlas, teniendo en cuenta las características que distinguen a una transformación geométrica de otra. A partir de la aplicación de las situaciones diseñadas, se espera que los estudiantes tengan los siguientes desempeños:

- Reconozcan algunas propiedades implícitas (correspondencia entre ángulos y lados correspondientes) en cada par de triángulos, para así poder establecer las relaciones de semejanza o congruencia entre ellos.
- Identifiquen los elementos propios que caracterizan una transformación geométrica, tales como vectores, eje de simetría, coeficiente de dilatación, entre otros, de tal forma que permita reconocerla al comparar dos imágenes (lo que posibilita ahondar sobre procesos de visualización), y a su vez determinar el tipo de relación (semejanza o congruencia) que están inmersas en ellas.

#### INQUIETUDES

Surgen las preguntas: ¿Por qué resulta valioso trabajar el reconocimiento de las transformaciones geométricas a partir de los procesos de visualización? ¿Qué pautas pedagógicas y disciplinares debe considerar el profesor para que el estudiante reconozca los distintos movimientos aplicados a una figura en el plano, teniendo en cuenta su posición inicial y final? ¿Cuáles son las características que debe tener una tarea para que los estudiantes puedan reconocer las propiedades que se cumplen en las figuras después de haber aplicado una transformación geométrica?

## AVANCES DE LA INVESTIGACIÓN

En el desarrollo de la propuesta de investigación, se han observado, a través de la implementación de situaciones didácticas, algunos factores que inciden en las dificultades que tienen los estudiantes para establecer la relación de semejanza o congruencia entre una figura geométrica y su imagen bajo una transformación. Sin ello, no podrán reconocer las propiedades que permiten establecer la transformación particular que se ha aplicado. Dichos factores están asociados a la falta de comprensión de los conceptos (transformaciones geométricas, congruencia y semejanza de figuras) y de las propiedades que permiten diferenciar una transformación de otra. Dado que la visualización juega un papel importante en el proceso para interpretar las construcciones (figuras) y establecer correspondencia de ángulos y lados correspondientes, vemos como pertinente desarrollar esa habilidad.

## REFERENCIAS

- Cárdenas, D. (2013). *Las relaciones de semejanza y congruencia en geometría plana, una propuesta didáctica para la educación básica* (Tesis de posgrado). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
- Julio, L. (2014). *Las transformaciones en el plano y la noción de semejanza* (Tesis de posgrado). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
- MEN (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanías*. Bogotá: Autor.
- Montes, S. (2012). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de transformaciones geométricas en el plano con estudiantes de grado séptimo haciendo uso del entorno visual del juego pac-man* (Tesis de posgrado). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.