

# UNA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE QUE INTEGRA GEOGEBRA PARA LA ENSEÑANZA DE LA TRANSFORMACIÓN DE TRASLACIÓN CON ESTUDIANTES DE GRADO 6.º

**Leidy Cristina Cumbal Acosta, Andrea Cárcamo**

*Universidad del Valle*

cumbal.leidy@correounivalle.edu.co, andreacarcamob@gmail.com

Se presenta una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) para apoyar la enseñanza de la transformación de traslación en un curso con estudiantes de grado 6. La THA se diseñó considerando la heurística de los modelos emergentes y los estudios previos sobre la enseñanza y el aprendizaje de la transformación de traslación. En esta ponencia se pretende describir los elementos que configuran una THA, que se utiliza como instrumento para el estudio de las prácticas de profesores noveles en la integración de recursos digitales. La THA consta de cuatro tareas y se caracteriza porque involucran situaciones en las que se utiliza el ambiente de geometría dinámica GeoGebra.

## INTRODUCCIÓN

Este estudio se centra en la caracterización de las prácticas de enseñanza de profesores noveles en la integración de recursos digitales. Es relevante porque los estudios evidencian la importancia de cambiar la comprensión de prácticas de los profesores en el aula de clases cuando usan recursos digitales. Además, los estudios muestran la necesidad de dar cuenta de la eficacia en la utilización de los recursos digitales en el aula, a partir de la investigación sobre el desarrollo profesional de los profesores (Sinclair y Yerushalmy, 2016). Los antecedentes de esta investigación se organizan en cuatro temáticas. La primera hace referencia al papel del profesor en la integración de las TIC para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Autores como los siguientes son representativos: Ruthven y Hennessy (2002); Artigue, Drijvers, Lagrange, Mariotti y Ruthven, (2009); Trouche, (2004); Drijvers, Doorman, Boon y Reed, (2010). La segunda temática se

refiere a trabajos de investigación que tienen por objeto de estudio los profesores noveles en la integración de recursos digitales; son representativos en esta tendencia Tabach (2011) y Drijvers et al., (2014). En la tercera temática se encuentran trabajos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría con Ambientes de Geometría Dinámica (AGD), como los de los autores siguientes Santacruz (2012); Obando y Morales (2014) y Morera, (2013). La cuarta temática tiene en cuenta que en el estudio se usa la THA (Trayectoria Hipotética de Aprendizaje) como instrumento de enseñanza, por lo que se consideran trabajos que las integran con recursos digitales. Por ejemplo, se contemplan los estudios de Dos Santos (2013); Aranda y Callejo (2017) ; Luque, Gutiérrez y Diaz (2018) y Suárez y León (2018).

Teniendo en cuenta los antecedentes, se plantean dos preguntas de investigación: 1) ¿de qué manera los profesores noveles en la integración de recursos digitales desarrollan sus prácticas de enseñanza usando una THA? 2) ¿Cómo cambia el repertorio de orquestaciones y las correspondientes habilidades de Conocimiento del Contenido Tecnológico Pedagógico (TPACK por sus siglas en ingles) de los profesores noveles, durante un proceso de integración de recursos digitales utilizando una THA?

Para abordar las preguntas de investigación se establece, como objetivo general, la caracterización de las prácticas de enseñanza de dos profesores de secundaria noveles en la integración de recursos digitales al usar la THA respecto a la transformación de traslación. Como objetivos específicos se precisan: 1) diseñar una THA para la enseñanza de transformación de traslación que involucre recursos digitales, 2) identificar los atributos relacionados con la planificación y el uso de los recursos digitales en los profesores que inician la integración de estos en el aula para la enseñanza de la transformación de traslación, 3) describir los cambios en las prácticas de enseñanza de los profesores que usan las tareas de la THA en las que orquestan recursos digitales, y 4) describir las habilidades y el conocimiento pedagógico tecnológico de los profesores en la integración de recursos digitales para la enseñanza de la transformación de traslación.

## FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En este trabajo se articulan tres aproximaciones teóricas para describir las prácticas de profesores noveles en la integración de recursos digitales: la orquestación instrumental, la THA y la transformación de traslación.

La orquestación instrumental designa la organización intencional y sistemática, en un entorno de aprendizaje, de los artefactos disponibles por parte del profesor en una situación matemática (Trouche, 2004). En la investigación referida al desarrollo profesional del profesor se reconoce la necesidad de encontrar formas de integrar tecnología con éxito en el salón de clase. Para estudios de este tipo de procesos se acuña la noción de TPACK (Koehler, Mishra y Yahya, 2007).

En este trabajo, la THA se entiende como un dispositivo que orienta la gestión del aprendizaje y la enseñanza, mediante situaciones en las que se orquestan recursos digitales. Simon (1995) la define como una predicción en cuanto a la ruta por la que podría ocurrir el aprendizaje de los estudiantes. Una THA está compuesta por la meta de aprendizaje, las tareas y el proceso hipotético de aprendizaje. En el diseño metodológico se describen los elementos de la THA y los procesos a seguir.

La THA se piensa para el aprendizaje de la transformación de traslación, entendida como una transformación de isometría. La traslación es un movimiento rectilíneo en el plano, resultado de desplazar el plano sobre sí mismo en línea recta; es decir, dado un punto  $Q$  trasladado de un punto  $P$ , mediante una traslación ( $t$ ), se determinan tres elementos que configuran una traslación: la dirección determinada por la recta  $r(P, Q)$ , la distancia  $d(P, Q)$  y el sentido que va desde  $P$  hasta  $Q$  (Alsina, Perez, y Ruiz, 1989).

## METODOLOGÍA

Para estudiar un fenómeno complejo, como las prácticas de enseñanza de profesores noveles en la integración de recursos digitales, se asume una investigación de tipo cualitativa: estudio de casos múltiples (Creswell, 2007). Para la intervención de aula, la metodología de investigación nos direcciona en el diseño, aplicación y evaluación de la THA en concordancia con el objetivo de esta ponencia.

## **La Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA)**

La THA sirve para determinar cómo los profesores reflexionan para dar sentido y profundizar en la manera como sus estudiantes aprenden, en este caso particular, el concepto de traslación. La ruta hipotética que siguen los estudiantes en el aprendizaje de la traslación está fundamentada en investigaciones didácticas relacionada con este objeto matemático y en la integración de ambientes de geometría dinámica para su enseñanza.

### **Fase 1: diseño y construcción de la THA**

Para la elaboración de THA, que usan los profesores de esta investigación, se definió como objetivo de aprendizaje reconocer el resultado de aplicar la transformación de traslación a figuras bidimensionales en contextos de diseño. Este objetivo se determinó de acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje para estudiantes de grado 6° (Ministerio de Educación Nacional, 2016).

Las tareas de aprendizaje se diseñaron teniendo en cuenta componentes curriculares, matemáticos y didácticos del concepto de traslación. La articulación de las tareas y el proceso hipotético de aprendizaje se fundamentó en el trabajo de investigación de Jaime (1993) en el que se estudió la enseñanza y aprendizaje de las transformaciones de isometría. Además, en cada una de las tareas, se determinó la actividad en consideración con los niveles de los modelos emergentes Gravemeijer (1999) (citado en Cárcamo, 2017, p. 17).

En el desarrollo de la THA los estudiantes inician el estudio de la traslación interactuando con un software dinámico en el que deslizan diferentes figuras que son conocidas por ellos; esto corresponde al nivel situacional de los modelos emergentes. En el nivel referencial, los estudiantes reconocen características visuales: conservación de la forma, el tamaño, el sentido y la dirección de la figura final. Al superponer la figura inicial sobre la figura final a través de un deslizamiento sobre una recta, los estudiantes reconocen la conservación del tamaño y la forma. Los estudiantes reconocen en qué medida se traslada la figura identificando el segmento que corresponde al desplazamiento de cada traslación. Para el reconocimiento de la conservación del sentido, los estudiantes observan movimientos en los que la figura inicial y la final conservan el sentido y otro en el que no. En un nivel general, la conservación del sentido, la dirección y la

medida en que se desplaza la figura se configuran en un segmento orientado que determina la traslación. Se reconoce que dos figuras se encuentran en relación de traslación haciendo coincidir los elementos (puntos, segmentos, ángulos, etc.) de la figura inicial con los correspondientes de la figura final, a través de un deslizamiento en línea recta. En este nivel también se plantea el proceso general para construir una imagen por traslación de una figura dada. Este proceso se hace teniendo en cuenta la coincidencia de los elementos correspondientes, por medio de la traslación de cada elemento para luego configurar la figura final. En un nivel formal los estudiantes determinan la característica fundamental de la traslación: dada una figura  $ABC$  y su correspondiente traslación  $A'B'C'$ , los polígonos  $AA'BB'$ ,  $AA'CC'$ ,  $BB'CC'$  forman paralelogramos. En este nivel los estudiantes pueden identificar traslaciones que se realizan en una configuración geométrica.

## **Fase 2: intervención con la THA**

Para este trabajo de investigación se seleccionaron dos profesores y sus respectivos estudiantes de grado 6° de educación básica secundaria. Los profesores, que intervienen con la THA, son noveles en el uso de recursos digitales en sus prácticas de enseñanza, tienen experiencia en servicio de 30 y 15 años y laboran en la institución hace 1 y 2 años, respectivamente. Uno de los profesores es licenciado en matemáticas especialista en docencia; el otro es licenciado en biología y química. Actualmente, se desempeñan como profesores de aritmética, geometría y estadística.

La ponencia busca resaltar el papel de la THA en la descripción de las prácticas de los profesores, señalar la complejidad del diseño de una THA y su configuración para la enseñanza de la transformación de traslación.

## REFERENCIAS

- Alsina, C., Perez, R. y Ruiz, C. (1989). *Simetría dinámica, Serie Matemáticas: Cultura y aprendizaje*. Madrid: Editoria Síntesis.
- Aranda, C. y Callejo, M. L. (2017). Construcción de la función integral y razonamiento covariacional: Dos estudios de casos. *Bolema - Mathematics*, 31(58), 777-798.
- Artigue, M., Drijvers, P., Lagrange, L., Mariottr, M. A. y Ruthven, K. (2009). Technologies numeriques dans l'enseignement des mathematiques, ou en est-on dans les recherches et

dans leur integration? [Technology in mathematics education: How about research and its integration?]. En C. Ouvrier-Buffet y Perrin-Glorian (Eds.), *Approches plurielles en didactique des math-ematiques; Apprendre a faire des mathematiques du primaire au superieur: poi de-neuf?* [Multiple approaches to the didactics of mathematics; learning mathematics from primary to tertiary level: What's new?] (pp. 185-207). París: University Paris Diderot, Paris 7.

Cárcamo, A. (2017). *Una innovación docente basada en los modelos emergentes y la modelización matemática para conjunto generador y espacio generado*. (Tesis de doctorado en Educación). Universidad Autonoma de Barcelona.

Creswell, J. (2017). Five Qualitative approaches to inquiry. In *Qualitative Inquiry and Research Design* (pp. 53-84). London: Sage.

Dos Santos, J. M. (2013). *Vasarely, GeoGebra y tareas para el aprendizaje de padrones geométricos, en un Curso Secundario Profesional*. Trabajo presentado en el II Encuentro en Andalucía. GeoGebra en el Aula. Resumen recuperado de <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.1729.5526>

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P. y Reed, H. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 213-234.

Drijvers, P., Tacoma, S., Besamusca, A., van den Heuvel, C., Doorman, M., y Boon, P. (2014). Digital technology and mid-adopting teachers' professional development: a case study. En *The mathematics teacher in the digital era* (pp. 189-212). Dordrecht: Springer.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical thinking and learning*, 1(2), 155-177.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. (Tesis doctoral en Didáctica de la Matemática). Universidad de Valencia.

- Koehler, M. J., Mishra, P. y Yahya, K. (2007). Tracing the development of teacher knowledge in a design seminar: Integrating content, pedagogy and technology. *Computers and Education*, 49(3), 740-762.
- Luque, R. E., Gutiérrez, R., y Diaz, S. (2018). Propuesta didáctica para abordar el tema de la función trigonométrica  $f(x)=\tan(x)$  con el software GeoGebra. *Números*, 97(March), 83-91.
- MEN (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Documento N.º 3*. Bogotá, Colombia.
- MEN (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje. Versión 2*. Bogotá, Colombia.
- Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología*. (Tesis doctoral) Universidad Autónoma de Barcelona.
- Obando, F. y Morales, C. (2014). *Orquestación instrumental de un ambiente de Geometría Dinámica mediante una Secuencia Didáctica respecto a la noción de simetría axial*. (Tesis de maestría) Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Ruthven, K. y Hennessy, S. (2002). A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 49(1), 47-88.
- Santacruz, M. (2012). *Gestión didáctica del profesor y emergencia del arrastre exploratorio en un AGD: El caso de la rotación en educación primaria*. (Tesis de maestría) Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Research in Mathematics Education*, 26(2), 146-159.
- Sinclair, N. y Yerushalmy, M. (2016). Digital technology in mathematics teaching and learning. En Á. Gutiérrez y G. Leder (eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 235-274). Springer.
- Suárez, W. y León, O. (2018). Educación matemática para todos: el género en el desarrollo de la visualización espacial desde el enfoque de las trayectorias de aprendizaje. *Acta Latinoamericana de Matematica Educativa*, 31(June), 1263-1271.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281-307.