

EL *NAUTILUS*, REFERENTE DEL CRECIMIENTO GNOMÓNICO CORDOBÉS

José R. Galo Sánchez

Red Educativa Digital Descartes
galosanchezjr@gmail.com

La sección de la concha del *Nautilus pompilius* muestra la concomitancia entre una belleza natural y una belleza matemática y, por ello, puede plantearse como ejemplo paradigmático de la íntima coexistencia del mundo matemático virtual y de la yocto-yotta realidad. Pero, en el supuesto hipertúnel que unifica ambos mundos, se pueden producir deformaciones en las que el referente de la beldad perfecta, la idolatrada y ubicua proporción áurea o divina, queda transfigurada en la menos conocida proporción cordobesa o humana. Aquí le mostramos que el crecimiento gnomónico de la concha del *Nautilus* no sigue el idealizado canon áureo que usualmente se le atribuye, sino que tiene como referente el canon cordobés. La belleza divina versus la belleza humana.

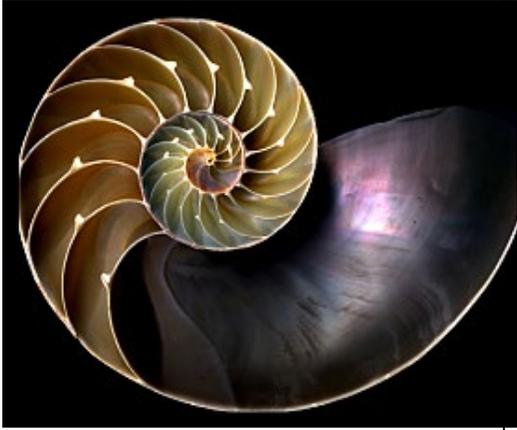
EL *NAUTILUS POMPILIUS*

El protagonista directo de este trabajo, al menos de manera preferente, es el *Nautilus pompilius* y en concreto su concha. Como todo ser vivo: nace, crece, se reproduce y muere, y en su devenir vital va escribiendo un cuaderno de bitácora que refleja y muestra en su concha exterior; pero mediante una radiografía o, mejor aún, al realizar una sección de esa concha es cuando nos encontramos con otra bitácora secreta que incrementa aún más su belleza, una gran belleza geométrica al servicio de sus necesidades vitales (Figuras 1 y 2).

¿Es la naturaleza matemática o somos nosotros los que matematizamos la naturaleza? Independientemente de cuál fuera la alternativa cierta —si alguna lo es, o si no lo fuera ninguna de ellas, o si lo son ambas—, lo que sí parece obvio es que basta observar nuestro entorno para reconocer atractivas formas naturales y asimilarlas a modelos matemáticos que recíprocamente se mimetizan, estableciendo un hipertúnel entre la concreción y la abstracción, entre el mundo real y el virtual. Una proyección sobre nuestra yocto-yotta realidad¹⁴ del mundo matemático o

¹⁴ En longitud, el orden de magnitud de aquello que es físicamente apreciable o medible en nuestro entorno se ubica actualmente en el rango determinado por el intervalo $[10^{-35}, 10^{26}]$ metros, es decir, desde la longitud de Planck al tamaño del universo observable. Pero en el Sistema Internacional el rango de prefijos para múltiplos y divisores se sitúa en el intervalo [yocto-yotta], es decir, $[10^{-24}, 10^{24}]$, y de ahí surge nuestra denominación de yocto-yotta realidad.

“continuo virtual”. Una muestra explícita de cómo las matemáticas pueden servir de base a la concreción de la belleza y, a su vez, cómo la belleza se plasma en las propias matemáticas.

	
<p>Figura 1. <i>Nautilus pompilius</i>. Fuente: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Nautilus_pompilius.jpg</p>	<p>Figura 2. Sección de la concha del <i>Nautilus</i> Fuente: http://www.imagexia.com/concha-de-nautilus/</p>

La concha del *Nautilus* tiene un crecimiento discoidal y su sección transversal tiene forma de una espiral. En ella podemos contabilizar el número de ciclos o verticilos. La parte que presenta cámaras es llamada fragmocono y los tabiques que conforman las cámaras se denominan septos, los cuales se intersecan con la pared del fragmocono en la sutura. El sifúnculo une las cámaras del fragmocono y fisiológicamente es el encargado de vaciar de agua esas cámaras y llenarlas de gas proporcionando un dispositivo de flotación que facilita que pueda desplazarse nadando. Como es tejido orgánico, el sifúnculo rara vez se conserva; sin embargo, sí suelen observarse los agujeros o cuellos septales por donde pasa. La cámara más externa es su cámara habitacional.

Usualmente se difunde que la espiral de la concha del *Nautilus* es una espiral áurea. Quizás, la turbación que genera la observación de tanta perfección puede generar la sublimación y transportar lo observado al canón áureo de belleza que se basa en la extrema y media razón destacada inicialmente por Euclides y posteriormente potenciada en el Renacimiento por Luca Paccioli, el cual la ascendió al ámbito de la deidad al denominarla como proporción divina y para Leonardo da Vinci fue la proporción áurea. Pero realmente esa espiral es más humana, es una espiral cordobesa.

Adicionalmente, podemos intuir su crecimiento autosemejante mediante la adición de cámaras, un crecimiento gnomónico que veremos también ha de calificarse propiamente como “cordobés”.

LAS PROPORCIONES

Aldo Mieli en el prólogo de la edición de 1959 de *La divina proporción* (Pacioli, 1959) atribuye a Luca Pacioli la afirmación de que Platón y Euclides “*sabían perfectamente que ninguna cosa se puede conocer en la naturaleza sin la proporción y que el objeto de todos los estudios consiste en buscar las relaciones de una cosa con la otra*” (p. 25). Y Pacioli al titular su libro de esa manera lo que hace es establecer como proporción excelsa la que fue introducida por Euclides en el libro VI de los *Elementos* como “extrema y media razón”; si bien, siguiendo el ordinal de cada libro, previamente aparece en la proposición duodécima del libro IV —en la construcción de un pentágono regular donde la razón áurea es la que acontece entre su diagonal y su lado—, y en la proposición undécima del libro II —en la que se construye el triángulo sublime¹⁵ y donde la proporción dorada es la razón entre el radio y el lado del decágono regular—. Ciertamente la proporción divina parece que comienza a ser omnipresente.

Da Vinci construye el canon de belleza áureo cuando dibuja su interpretación del hombre de Vitrubio. En él, la razón entre la medida desde los pies al ombligo y desde este a la cabeza es la proporción áurea o también armónica, pues el hombre, como centro de la creación, se configura como el canon de la divina armonía. En esa relación umbilical incide Durero y en el siglo XX Le Corbusier en su Modulor. Así, la belleza queda ligada a la proporción, puede ser esquematizada mediante rectángulos y también asociada a polígonos regulares (Figura 3).

LAS PROPORCIONES ASOCIADAS A POLÍGONOS REGULARES Y SUS CÁNONES DE BELLEZA

Entre las infinitas proporciones posibles podemos destacar una infinidad numerable de ellas si atendemos a los diferentes polígonos regulares y a las razones existentes entre sus respectivos radios y lados. Si queremos realizar analogías al planteamiento davinciano de establecer cánones de belleza, podemos observar que la razón de proporcionalidad entre el radio y el lado en un polígono regular aumenta con el número de lados y para el polígono de doce lados es cercana a dos. Así, a partir de ese número de lados, su aplicación al canon de belleza humana comienza a ubicarse en un ámbito más calificable como de desproporción. Si nos restringimos a este rango de valores aceptables, es decir polígonos cuyo número de lados está entre tres y once, al ubicarnos en el ámbito euclidiano de construcción con regla y compás también ha de excluirse el heptágono, el eneágono y el endecágono. Nos queda la secuencia 3, 4, 5, 6, 8, 10 que conducen, respectivamente a las proporciones: $\sqrt{3}$ o *vesica piscis*, $\sqrt{2}$ o raíz de dos, $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ que no tiene un

¹⁵ Triángulo isósceles de ángulos 36°, 72° y 72° que puede dividirse de manera autosemejante mediante la proporción áurea y que coincide con cada uno de los diez triángulos iguales en los que puede dividirse un decágono regular.

nombre específico al verse opacada por la relación entre la diagonal y el lado del pentágono que es la áurea, 1 o cuadrada, $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ o cordobesa,¹⁶ $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ o áurea.

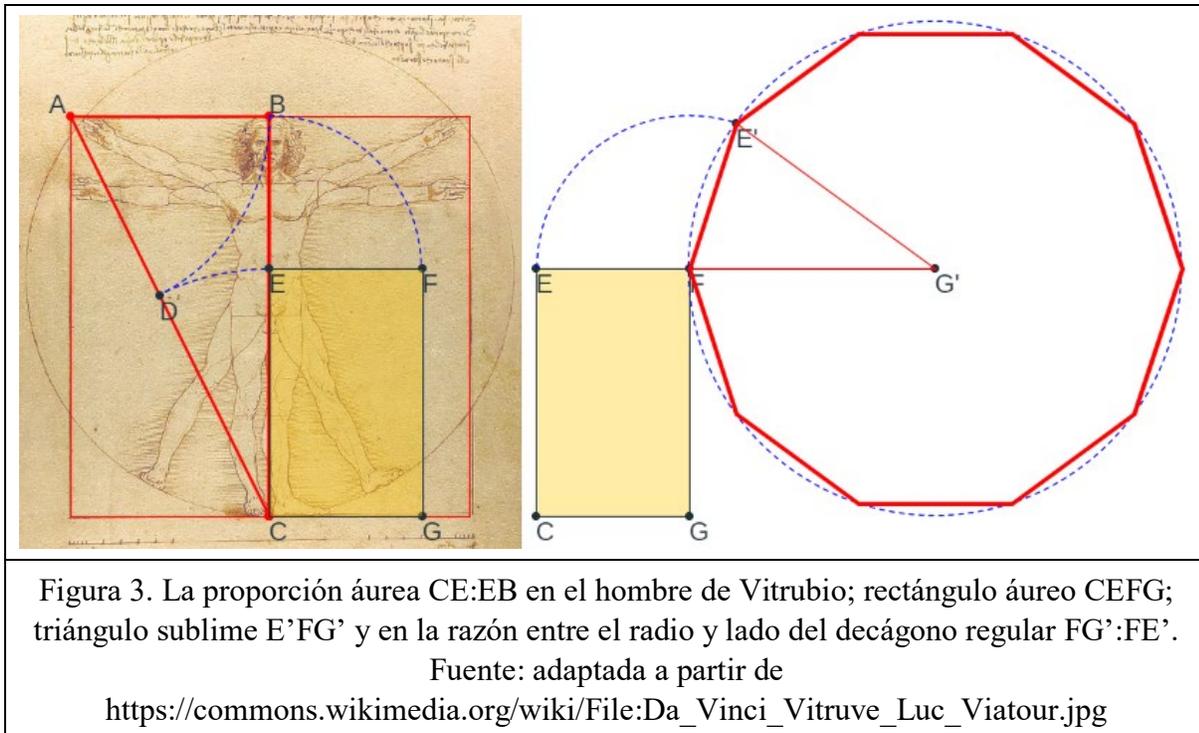


Figura 3. La proporción áurea CE:EB en el hombre de Vitrubio; rectángulo áureo CEFG; triángulo sublime E'FG' y en la razón entre el radio y lado del decágono regular FG':FE'.

Fuente: adaptada a partir de

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Da_Vinci_Vitruve_Luc_Viatour.jpg

EL CRECIMIENTO GNOMÓNICO ARISTOTÉLICO

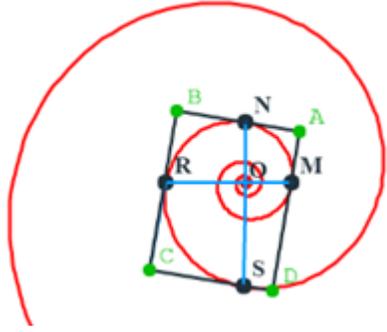
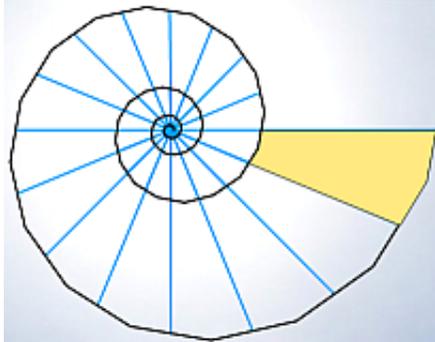
Aristóteles estableció el concepto de crecimiento gnomónico cuando decía: “Hay ciertas cosas que cuando crecen no sufren alteración salvo en magnitud” y definió el gnomon como toda figura cuya yuxtaposición a otra dada produce una resultante que es semejante a la inicial (Sachs, 1995). Este crecimiento gnomónico puede presentarse bien de manera continua o bien de forma discreta. En el *Nautilus* (Figura 2) puede verse el primero en el crecimiento de la concha y el segundo en la construcción de los septos que conforman las cámaras.

LA ESPIRAL LOGARÍTMICA ÁUREA Y LA CORDOBESA

En el recurso *El grillo y la espiral logarítmica* (Galo, Cabezudo y Fernández, 2016a) se sintetiza la construcción dinámica de la denominada espiral logarítmica $r = a b^\theta$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^+$ - o también equiangular, geométrica o como Bernouilli la denominó más poéticamente: *spira mirabilis* o espiral maravillosa, y desglosamos detalladamente sus propiedades. Por el carácter equiangular, fijado un punto M de ella, esta puede inscribirse en un rectángulo de proporción $b^{\frac{\pi}{2}}$

¹⁶ Proporción sin nombre específico hasta que fue nombrada así por Rafael de la Hoz (de la Hoz, 1973), también denominada por él como proporción humana.

(Figura 4) y como consecuencia diremos que la espiral es áurea cuando este rectángulo es áureo ($b = \Phi^{\frac{2}{\pi}} = 1,3584 \dots$) y cordobesa cuando el rectángulo es cordobés ($b = \zeta^{\frac{2}{\pi}} = 1,1855 \dots$). El factor de crecimiento respectivo ($b^{2\pi}$) es 6,854... y 2,914...

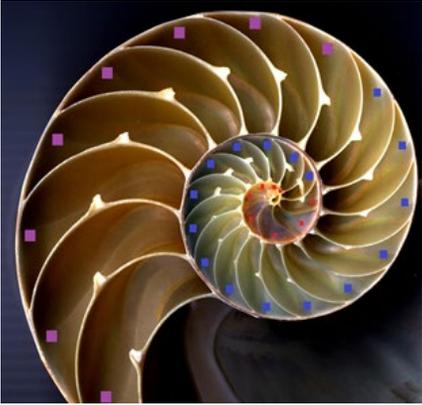
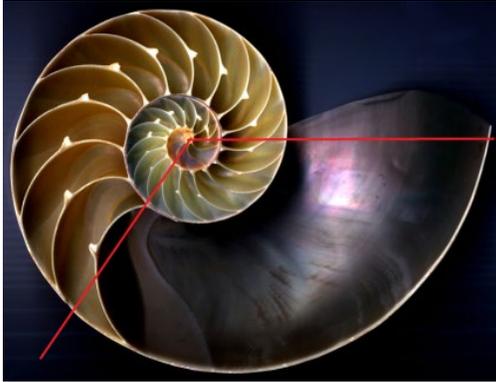
	
<p>Figura 4. Rectángulo circunscrito a una espiral logarítmica. Fuente: Elaboración propia.</p>	<p>Figura 5. Crecimiento gnomónico de paso $2\pi/n$ con $n = 16$. Fuente: Elaboración propia.</p>

La región plana delimitada por toda espiral logarítmica puede aproximarse mediante el crecimiento gnomónico discreto de hexágonos construidos en base a los rectángulos circunscritos asociados a ella de paso $\frac{2\pi}{n}$ (Figura 5) y cuando $n \rightarrow \infty$, es decir, cuando el crecimiento es instantáneo el factor de crecimiento es la unidad (*Eadem mutato resurgo*).

MODELACIÓN DEL *NAUTILUS POMILIUS*

En un reconocimiento visual de la sección de la concha del *Nautilus* se observa que las cámaras ocupan aproximadamente dos verticilos y medio y la cámara habitacional un sector de amplitud $3\pi/4$ (Figuras 6 y 7). En el primer verticilo se contabilizan ocho cámaras, dieciséis en el segundo y ocho en la siguiente mitad. Utilizando una escena interactiva desarrollada con la herramienta Descartes (Galo, Cabezudo y Fernández, 2016b; RED Descartes, 2012) en la que podemos dibujar diferentes espirales logarítmicas, superponiéndolas con la imagen podemos seleccionar aquella que mejor se ajusta¹⁷.

¹⁷ El procedimiento tradicional se basa en mediciones que pueden catalogarse como locales, mientras que el uso de la escena es global al ser un ajuste comparativo entre dos curvas, una la correspondiente a la sección de la concha y otra la aportada por la escena.

	
<p>Figura 6. <i>Nautilus pompilius</i> Fuente: adaptada a partir de http://www.imagexia.com/concha-de-nautilus/</p>	<p>Figura 7. Sección de la concha del <i>Nautilus</i> Fuente: adaptada a partir de http://www.imagexia.com/concha-de-nautilus/</p>

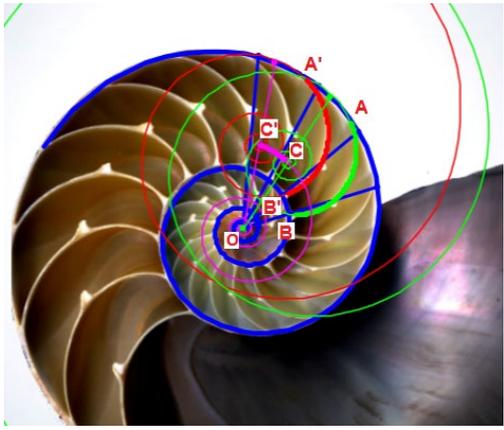
Hay una tendencia a tratar de asociar o encontrar en todo aquello que es bello la proporción divina y ello, como no, ha acontecido con el *Nautilus* si bien sin éxito (Figura 8) porque como se dice coloquialmente “la realidad es tozuda”. La proporción por la que se rige el *Nautilus* (Figura 9) se observa que es la denominada proporción cordobesa o humana¹⁸. Y no solo el perfil de esta concha sigue el patrón de la espiral logarítmica cordobesa, sino que todo su interior, el sifúnculo y los septos siguen el mismo patrón de crecimiento humano-cordobés (Figuras 10 y 11). Así, la empecinada esperanza de encontrar el ideal de belleza divino se ve trastocada y lo que aparece es el ideal de belleza humano en nuestra “yocto-yotta realidad”.

	
<p>Figura 8. Ajuste por una espiral logarítmica áurea o divina Fuente: adaptada a partir de</p>	<p>Figura 9. Ajuste por una espiral logarítmica cordobesa o humana Fuente: adaptada a partir de</p>

¹⁸ Hay que señalar que Mosely (1813) asigna a la espiral del *Nautilus* un factor de crecimiento aproximado de 3, según lo referencia Thompson (1945). Este factor difiere bastante del correspondiente a la espiral áurea que es 6,854... y sin embargo está muy próximo al factor de la espiral cordobesa que como se ha señalado es 2,914....

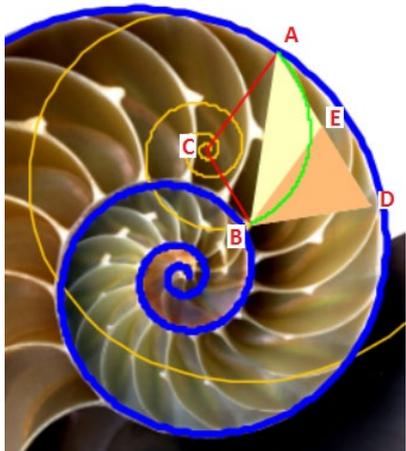
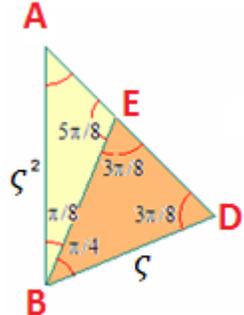
http://www.imagexia.com/concha-de-nautilus/	http://www.imagexia.com/concha-de-nautilus/
---	---

En general, todo punto del interior de la concha del *Nautilus* es la intersección de dos espirales cordobesas: una “longitudinal” y otra “transversal” (como parte de un septo o de un arco semejante).

	
<p>Figura 10. Aproximación de las cámaras e interior con familias de espirales cordobesas. Fuente: adaptada a partir de http://www.imagexia.com/concha-de-nautilus/</p>	<p>Figura 11. Ajuste de los septos por una espiral logarítmica cordobesa. Fuente: adaptada a partir de http://www.imagexia.com/concha-de-nautilus/</p>

Y como todo ha de ser consecuencia de una causa fijarse en la amplitud angular de los septos es algo significativo porque nos aporta información acerca de cuál sería la base inicial teórica del fragmacono, y en relación a ella se establece el modelo de crecimiento de la concha y de los septos. Su análisis (Figura 12) conduce a que $\widehat{ABE} = \frac{\pi}{8} = \frac{2\pi}{16}$ es el valor del ángulo de crecimiento gnomónico discreto interseptos y que coincide con el ángulo del gnomon del triángulo cordobés (Figura 13); y $\widehat{ACB} = \widehat{BEA} = \frac{5\pi}{8}$ es la amplitud del arco de espiral cordobesa que determina cada septo. En ese sentido, el triángulo cordobés y su gnomon se configuran como la base del crecimiento del *Nautilus*, su germen y la razón primigenia de su forma y crecimiento cordobés.

Ciertamente la belleza náutica se configura como un referente del crecimiento gnomónico cordobés.

	
<p>Figura 12. Base teórica del crecimiento cordobés del fragmacono Fuente: adaptada a partir de http://www.imagexia.com/concha-de-nautilus/</p>	<p>Figura 13. Triángulo cordobés (naranja) y su gnomon discreto (amarillo). Fuente: Elaboración propia.</p>

REFERENCIAS

- Galo, J., Cabezudo, Á. y Fernández, I. (2016a). *El grillo y la espiral logarítmica*. Recuperado de <https://proyectodescartes.org/descartescms/blog/difusion/item/1978-el-grillo-y-la-espiral-logaritmica>.
- Galo, J., Cabezudo, Á. y Fernández, I. (2016b). *Sobre la forma y el crecimiento cordobés del Nautilus pompilius*. Recuperado de <https://proyectodescartes.org/descartescms/blog/difusion/item/2355-sobre-la-forma-y-el-crecimiento-cordobes-del-nautilus-pompilius>.
- Hoz Arderius, Rafael de la. (1973). La proporción cordobesa. *Actas de la quinta asamblea de instituciones de Cultura de las Diputaciones*. Córdoba: Diputación Provincial de Córdoba, España.
- Moseley, H. (1813). On the geometrical forms of turbinated and discoid shells. *Phil. Trans. R. Soc. Lond*, 128, 351-370
- Pacioli, L. (1959). *La divina proporción*. Buenos Aires: Losada.
- RED Descartes, Red Educativa Digital Descartes. (2012). Recuperado de <https://proyecto-descartes.org>
- Sachs, J. (1995). *Aristotle's Physics: A Guided Study*. New Brunswick and London: Rutgers University Press.
- Thompson, D. (1945). *On Growth and Form*. Nueva York: Dover Publications Inc.