

# LA CONSTRUCCIÓN DEL CONO CIRCULAR RECTO COMO LUGAR DE ARTICULACIÓN ENTRE EL PLANO Y EL ESPACIO

**Edith Noemí Gorostegui**

*Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura (FACENA) de la Universidad Nacional  
del Nordeste (UNNE).*

gorostegui@gmail.com

La formación de profesores de Matemática en relación con el campo de la geometría es un tema de discusión al interior del grupo de investigación GRUDIDMAT de la FACENA de la UNNE. Las discusiones se llevan a cabo y se retroalimentan con trabajos de investigación, direcciones de tesis y becas de distintos miembros del grupo. En esta ponencia exponemos un trabajo sobre el cono circular recto que se inició en el marco de la dirección de un trabajo de investigación de una becaria y se continúa en la actualidad. Desarrollamos algunos tópicos del marco didáctico-matemático del estudio realizado. También señalamos algunas dificultades detectadas en estudiantes avanzados respecto de la articulación espacio-plano en el caso del desarrollo plano y construcción del cono circular recto.

## INTRODUCCIÓN

La formación de profesores en Matemática en relación con el campo de la geometría es un tema de discusión al interior del grupo de investigación GRUDIDMAT (Grupo de Investigación en Didáctica de la Matemática) de la FACENA (Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura) de la UNNE (Universidad Nacional del Nordeste) en Argentina. Estas discusiones se llevan a cabo y se retroalimentan en trabajos de investigación, direcciones de tesis y becas de distintos miembros del grupo.

Entre las investigaciones realizadas, se puede citar la tesis de Licenciatura en Didáctica de la Matemática siguiente: “Estudio de las condiciones de

funcionamiento de un sistema didáctico orientado a la entrada de los alumnos al razonamiento deductivo” (Gorostegui, 2007) que estuvo centrada en la problemática de la introducción de la demostración en el 3º ciclo de la escuela secundaria<sup>25</sup> a partir de un problema geométrico de comparación de áreas. Otro trabajo de Licenciatura en Didáctica de la Matemática, dirigido por la profesora Vanesa Clementín (2017), titulado “Un estudio didáctico-matemático de la desigualdad triangular: elaboración y análisis de una secuencia didáctica para alumnos de nivel secundario”, nos permitió avanzar con una propuesta de trabajo en el nivel secundario en geometría euclidiana y extraer conclusiones respecto de cómo los alumnos pueden apropiarse de los objetos geométricos en clases donde los conocimientos se construyen y el rol fundamental del docente en crear las condiciones para que esto ocurra.

Por otra parte, el trabajo de María José Maciel, codirectora de una Beca de Estímulo a las Vocaciones Científicas del Consejo Interuniversitario Nacional (CIN, 2017, Argentina), cuyo título es “Los datos de la historia para repensar la enseñanza de la geometría en el secundario: Modelizaciones Sucesivas”, no permitió constatar el escaso conocimiento en el campo de la geometría sintética y la preponderancia algebraica para enfrentarse a los problemas de alumnos y profesores de la región nordeste de nuestro país.

En esta ponencia exponemos un trabajo sobre el cono circular recto que se inició en el marco de la dirección de esta Beca y que en la actualidad se continúa. Desarrollamos algunos tópicos del marco didáctico-matemático del estudio realizado. Así también, señalamos algunas dificultades detectadas en estudiantes avanzados respecto de la articulación espacio-plano en el caso del desarrollo plano y de la construcción del cono circular recto.

---

<sup>25</sup> En Argentina corresponde a alumnos de entre 14 y 15 años.

## ACERCA DE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN GENERAL Y DEL CONO RECTO EN PARTICULAR

La ausencia de un trabajo pertinente con los objetos geométricos en la escuela secundaria y el análisis de sus causas se viene exponiendo en diferentes publicaciones (Broitman et al., 2009; Itzcovich, 2005) y documentos oficiales de nuestro país (Dirección de Currícula de CABA, 2005; Ministerio de Educación de la Nación, Argentina, 2012). Se menciona por ejemplo:

Los diversos agentes del sistema educativo compartimos una preocupación por la casi ausencia de la geometría en la escuela, porque su presencia se da en general bajo la forma de una enseñanza basada en la “presentación” de los objetos geométricos y sus propiedades sin oportunidad para los alumnos de atribuir sentido a esos conocimientos. (Dirección de Currícula de CABA, 2005, p. 5).

A nivel internacional también podemos encontrar distintas publicaciones que se manifiestan en el sentido antes citado (Houdement y Kuzniak, 2006; Gamboa y Ballestero, 2010; Camargo y Acosta, 2012). Al respecto, Gamboa y Ballestero (2010), en un trabajo sobre la percepción de los alumnos de secundaria sobre la enseñanza de la geometría concluyen:

[...] Las clases de geometría en la educación secundaria se han basado en un sistema tradicional de enseñanza, donde docentes presentan la teoría, desarrollan ejemplos y aportan los ejercicios que deben ser resueltos por estudiantes. Estas actividades enfatizan en la aplicación de fórmulas y aspectos memorísticos, lo que trae como consecuencia que procesos de visualización, argumentación y justificación no tengan un papel preponderante en la enseñanza de la disciplina. (p. 139).

Si se analizan las propuestas de actividades de la década del 50 y del 60 del siglo pasado en nuestro país, una de las tareas habituales en el estudio de la geometría escolar consistía en hacer desarrollos planos de distintos cuerpos para luego construirlos. Este tipo de actividades fue perdiendo valor a tal punto que en la actualidad está ausente por completo. No analizamos aquí las probables causas de esta ausencia. Nos interesa, sin embargo, hablar del potencial como actividad que permite hacer foco en cuestiones centrales del trabajo matemático y geométrico en

particular. Por eso, consideramos pertinente su inclusión en la formación de futuros profesores de matemática. Nos referimos a la producción de modelos geométricos, a la anticipación, a la validación y a la relación de la geometría con otros campos (aritmética o álgebra).

En nuestra universidad el estudio de las cónicas se prevé en el campo de la geometría analítica. En el caso del cono circular recto una típica secuencia de estudio consiste en definirlo como la superficie engendrada por un triángulo rectángulo que gira en torno a uno de sus catetos, luego se hace una presentación de la fórmula de cálculo de área de la superficie cónica, seguida de ejercicios de aplicación. Al respecto nos preguntamos: ¿a qué conocimiento geométrico sobre el cono acceden los alumnos a partir de este tipo de actividades? ¿Lo podrán construir dado ciertos datos? Por otro lado, ¿para qué calcular el área de la superficie cónica? ¿Con qué objetivo? Y si se supiera el área ¿se podrá construirlo?

#### SOBRE LA PROPUESTA DE TRABAJO CON LOS ALUMNOS

Una primera tarea propuesta consistió en proponer a los alumnos que dibujen el desarrollo plano de un cilindro circular recto. El objetivo aquí es que puedan pensar en el desarrollo plano de la cara lateral, en este caso de un cuerpo conocido y fácil de imaginar como el cilindro. Dicho desarrollo es un rectángulo cuya altura coincide con la del cilindro y cuya base tiene una longitud igual a la longitud de la circunferencia de la base. Una conclusión que emerge de esta tarea es que si se quiere construir un cilindro con determinadas medidas hay que construir un rectángulo y un círculo estableciendo las relaciones entre las longitudes correspondientes (del lado del rectángulo y del perímetro de la circunferencia de la base que se une a este lado).

Una segunda tarea fue la siguiente: Si se quisiera construir un cono recto, ¿cómo sería el desarrollo plano de este?

El desarrollo plano de la cara lateral del cono recto es un sector circular que tiene como centro el vértice del cono y como radio la generatriz del mismo. Sin embargo, la respuesta errónea más frecuente de los alumnos fue que se corresponde con un triángulo con vértice en el vértice del cono y dos lados congruentes de longitud igual a la longitud de la generatriz; es decir, un triángulo isósceles.

Lo interesante aquí es ver las distintas exploraciones que realizan los alumnos para arribar a conclusiones, los intercambios, la elaboración de conjeturas, las explicaciones de por qué debería ser tal o cual figura y por qué no otras, etc. En este punto los alumnos no solo tienen que establecer que el desarrollo plano corresponde a un sector circular sino también por qué tiene que ser esta la figura que les permite construir un cono circular recto.

Otro aspecto interesante —propio de la matemática en general y de la geometría en particular— es la anticipación. No se trata de construir efectivamente el cono, sino de anticipar, de pensar condiciones, de afirmar que si el desarrollo plano tiene tales características se podrá construir, es decir, apoyarse en conocimientos geométricos para validar su forma.

Lo que no anticipan los alumnos es que la distancia del vértice del cono a cualquier punto de la circunferencia de la base es la misma (longitud de la generatriz) y que esta igualdad se “traduce”, en el desarrollo plano de este cuerpo, en un sector circular. No pueden coordinar una vista plana con la proyección lateral de este cuerpo. Por ejemplo, un corte con un plano perpendicular al plano de la base por el diámetro de la circunferencia de la base corresponde efectivamente a un triángulo isósceles pero su proyección lateral (patrón) corresponde a un sector circular.

Es interesante la comparación con el cilindro. En este caso el corte con un plano perpendicular a la base (rectángulo) coincide con el patrón de desarrollo (rectángulo). Se puede decir también que en el caso del cilindro no necesitan “ver” que la longitud de los segmentos que unen puntos de las circunferencias de las bases (segmentos de la cara lateral) son iguales, dado que coinciden las longitudes de estos segmentos con los del patrón, es decir, con la longitud de los lados del rectángulo correspondiente al desarrollo plano. Sin embargo, en el cono circular recto hay que considerar que las distancias del vértice a cada punto de la circunferencia de la base son iguales y al ser un conjunto de puntos que están a una misma distancia de un determinado punto (vértice del cono) tienen que relacionar con una circunferencia cuyo  $r = g$  (generatriz del cono) con centro en  $v$  (vértice del cono).

Una tercera consigna para los alumnos consiste en solicitarles que construyan un cono a partir de ciertos datos: altura y radio de la circunferencia de la base. Para responder a esta tarea tienen que poner en relación las distintas miradas sobre el cuerpo. Por un lado, la altura correspondería a la altura del triángulo del corte con un plano perpendicular al plano de la base por el diámetro de la circunferencia de la base, pero también tienen que considerar el ángulo de abertura del sector circular del desarrollo plano. Hay una relación de proporcionalidad a establecer entre la amplitud del sector circular y su longitud, ya que como lo que no se sabe es el ángulo de apertura del sector circular, pero es un dato la longitud del mismo, se deberá establecer lo siguiente: a  $360^\circ$  (un giro completo) le corresponde la longitud del sector circular completo, es decir, la longitud de la circunferencia de radio  $g$ , y al ángulo de apertura de la cara lateral del cono, le corresponderá la longitud de la circunferencia de la base del cono. Escrito en símbolos, esto es:

$$\frac{360^\circ}{2\pi g} = \frac{\hat{\alpha}}{2\pi r_b} \quad \text{siendo } \hat{\alpha} \text{ la amplitud del sector circular, de donde resulta:}$$

$$\hat{\alpha} = 2\pi r_b \frac{360^\circ}{2\pi g} \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{r_b}{g} 360^\circ$$

Coordinar las relaciones entre distintas variables, dependiendo de los datos para la construcción del cono: ángulo de apertura del desarrollo plano y arco que subtiende, altura del cono, longitud de la circunferencia de la base y de la directriz, etc., representa para los alumnos un alto desafío.

#### CONCLUSIONES

La información proporcionada por las experiencias realizadas con las actividades anteriores da cuenta de las dificultades de los alumnos a la hora de enfrentarse a un trabajo geométrico en el que no se trata de aplicar fórmulas para obtener resultados. La problemática que estamos planteando va mucho más allá de esta idea “aplicacionista” en la enseñanza. Se trata para nuestro equipo de investigación de proponer situaciones a los alumnos de tal manera que les permitan pensar geoméricamente. Esto implica, en este caso, articular distintas miradas sobre un objeto geométrico con vistas a su construcción, tarea para nada fácil para los estudiantes tanto del secundario como para los del profesorado de matemáticas.

Las producciones de los alumnos, sus dudas, marchas y contramarchas dejan al descubierto la escasa disponibilidad de conocimientos matemáticos para abordar las tareas. Nos referimos por ejemplo a reconocer que la circunferencia como el lugar de los puntos del plano que equidistan de un punto es un concepto que permite identificar y fundamentar que el desarrollo plano de un cono circular recto no puede ser un triángulo sino un sector circular. Nos referimos también a la relación de proporcionalidad no reconocida por los estudiantes como una herramienta que permite poner en relación ciertos datos para los cálculos. Otro conocimiento no disponible para los estudiantes es la coordinación de distintos puntos de vistas o

perspectivas del cuerpo en cuestión, por ejemplo, al imaginar las figuras geométricas resultantes a partir de distintos cortes con planos rectos, en este caso del cono circular recto.

Estos hallazgos nos interpelan como formadores de formadores en cuanto al lugar de la geometría en la enseñanza y al tipo de trabajo geométrico que se requiere en la formación de profesores de matemática y en la escolaridad obligatoria. Esto si consideramos que tratar con estos objetos es una entrada interesante a la cultura matemática, a una porción de esta como es la geometría y que durante muchos siglos permitió el avance de los conocimientos matemáticos de los que hoy disponemos y que, al mismo tiempo, dio lugar a la construcción de otros.

Claramente el estudio de cuerpos en el espacio, hoy día relegado en la formación de profesores, es para nuestro grupo de investigación altamente relevante. Consideramos que sería conveniente que las propuestas de trabajo en este aspecto se dirijan a lograr que los alumnos adquieran una imagen mental de los cuerpos geométricos en el espacio desde distintos puntos de vista (desde un costado, de frente, desde arriba, etc.) en articulación con su representación plana (distintas proyecciones planas del cuerpo).

Contribuir con propuestas para la discusión sobre estos temas con otros colegas es nuestro propósito. Sin duda tanto nuestras experiencias como los intercambios académicos enriquecen nuestra mirada sobre la formación de profesores.

#### REFERENCIAS

12(ntes) DIGITAL para el día a día (2009). *Entrevista a Horacio Itzcovich y Claudia Brotiman*. Buenos Aires, Argentina. Recuperado de <http://ecaths1.s3.amazonaws.com/novedadesdocentespsol/12ntes-digital-3.pdf>

- Camargo, L. y Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis, TED*, 32, 4-8.
- Clementín, V. (2017). *Un estudio didáctico-matemático de la desigualdad triangular: elaboración y análisis de una secuencia didáctica para alumnos de nivel secundario*. Corrientes, Argentina: Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste.
- Dirección de Currícula de CABA (2005). *Documento de Trabajo N.º 5: Enseñanza de la Geometría en el 2º ciclo*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires (CABA), Argentina. Recuperado de <http://bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/67-matematica-documento-de-trabajo-no-5-la-ensenanza-de-la-geometria-en-el-2o-ciclo-actualizacion-curricular-educacion-general-basica-1998>
- Gamboa Araya, R. y Ballesterio Alfaro, E. (2010). *La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes* (Tesina De Licenciatura). Universidad Nacional del Nordeste, Corrientes, Argentina.
- Gorostegui, E. (2007). *Estudio de las condiciones de funcionamiento de un sistema didáctico orientado a la entrada de los alumnos al razonamiento deductivo*. Corrientes, Argentina: Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste.
- Houdement y Kuzniak (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193.
- Itzcovich, H. (2005). *Iniciación el estudio didáctico de la geometría*. Buenos Aires, Argentina: Editorial el Zorzal.
- Maciel, M. J. (2017). *Los datos de la historia para repensar la enseñanza de la geometría en el secundario: Modelizaciones Sucesivas*. Universidad Nacional del Nordeste, Corrientes, Argentina.