

ESTRUCTURA DIDÁCTICA BASADA EN EL COMPONENTE HISTÓRICO- EPISTEMOLÓGICO: EL CASO DE LA RAZÓN GEOMÉTRICA

Jairo Gutiérrez Balaguera, Sandra Evelyn Parada

Instituto Politécnico, Universidad Industrial de Santander

jagubal07@hotmail.com, sanevepa@uis.edu.co

En este documento compartiremos resultados parciales de una investigación que tiene por objetivo caracterizar aprendizajes en la formación de un ciudadano matemáticamente competente. Para dicha investigación se desarrolla una serie de talleres fundamentados en una dimensión histórico-epistemológica para el estudio de la trigonometría. Según Guacaneme (2016), existen tres formas de intervención de la historia como recurso didáctico: para usar, para integrar o para permear la enseñanza. Para ello, se diseñaron un conjunto de talleres para el estudio de la trigonometría con estudiantes de décimo grado de un colegio de Bucaramanga. Se describe la estructura didáctica lograda para el diseño de los talleres que componen la secuencia y se presenta uno de los diseños.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La trigonometría cuenta con una fuente muy rica de situaciones, escenarios y episodios de la historia que pueden ser utilizados como recursos didácticos para su enseñanza y aprendizaje. Así, valdría la pena recuperar de la historia de la trigonometría problemas con soluciones simples pero brillantes, ideas geniales y momentos para problematizar su estudio en clase. Algunos autores han identificado algunas dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría. Moore (citado por Fernández, Ruíz y Rico, 2016), Lakatos (citado por Maza, 1994) y Nolla (citado por Gonzáles, 2004) mencionan, entre otras, que:

- a) Se desconoce la conexión de la trigonometría con la realidad.
- b) Se presentan modelos gráficos imprecisos para los objetos de la trigonometría.

- c) Se utilizan muy poco las tecnologías digitales.
- d) La actividad del aula desfavorece la actitud crítica.
- e) El currículo desaprovecha su contenido histórico y epistemológico.

Ante esta problemática, en la investigación que aquí se reporta se pretende responder la siguiente pregunta: ¿cómo el desarrollo de un conjunto de talleres, fundamentados y orientados desde una dimensión histórico-epistemológica favorecen la formación de un ciudadano matemáticamente competente?

MARCO CONCEPTUAL

Ser matemáticamente competente en el marco de los estándares nacionales (MEN, 2006) significa cumplir cada una de las siguientes características: formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas; utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios para validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración; dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz.

Dado que un objetivo importante de la propuesta es el diseño de talleres en las que se rescaten los aspectos histórico-epistemológicos, asumimos como referente el trabajo de Guacaneme (2016) en el cual se reconoce a la Historia de la Matemática como un recurso didáctico fundamental tanto en la formación de profesores como en la puesta en escena en el aula. Este enfoque se ha conceptualizado de tres formas distintas: i) la Historia de las Matemáticas como uso: en este sentido, se pueden incluir por ejemplo anécdotas o referencias históricas a obras matemáticas o matemáticos. ii) La Historia de las Matemáticas como integración: Guacaneme, menciona que es una manera de aludir no solo al uso de la Historia de las Matemáticas, sino a una enseñanza efectiva de las Matemáticas y de la Historia de las Matemáticas a través de esta. iii) La Historia de las Matemáticas para permear la enseñanza: se cumple cuando se emplea información histórica como criterio orientador en la estructuración de una propuesta curricular.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

La investigación de aula, que aquí se reporta, sigue una metodología meramente cualitativa, estructurada en las siguientes fases de trabajo:

Fase 1. Sistematización de literatura de corte histórico y epistemológico

En esta fase se realizó la recopilación y sistematización de los documentos fuente de conocimientos históricos y epistemológicos de la trigonometría.

Fase 2. Diseño de la secuencia de talleres

Es precisamente de esta etapa que presentaremos los primeros resultados. Después de recopilar y sistematizar documentos con aportes históricos y epistemológicos, se logró consolidar una estructura que permanece invariante en cada uno de los talleres para la intervención en el aula. Los elementos que hacen parte de la estructura son los siguientes:

- **Indicadores de logro:** Para cada taller, se definen tres indicadores de logro que apuntan a la formación de un ciudadano matemático competente (MEN, 2006), uno por cada dimensión; el saber-saber, el saber-hacer y el saber-ser.
- **Preguntas orientadoras:** Las preguntas aluden a hechos históricos, biografías, problemas que se eligen en función del objeto matemático de estudio de clase.
- **¿Qué sabemos de?** Esta actividad puede realizarse de forma escrita u oral, en la que se plantean una serie de situaciones o preguntas que permiten valorar presaberes del objeto matemático a tratar en la clase.
- **Recurriendo a la Historia:** Para la elaboración de este apartado, inicialmente se selecciona el objeto matemático de estudio. Luego se hace una selección previa de la literatura y de recopilación de material bibliográfico y de elementos audiovisuales (didácticos) que pueden enriquecer el estudio de dicho objeto matemático desde un enfoque histórico-epistemológico.

- Haciendo en contexto: Planteamiento de situaciones que muestren conexión directa con la realidad (con la cotidianidad), con el entorno (con la tecnología), o dentro de la misma matemática, y que hagan uso o aplicación del objeto de estudio de interés.
- Desarrollo conceptual: Construcción guiada del concepto para reconocer sus elementos esenciales tales como propiedades, características, relaciones, conexiones, representaciones, contenidos, extensiones, definiciones, etc.
- Matematicomanía: Diseñada para la ejercitación y aplicación de los conceptos adquiridos mediante las actividades anteriores, se pretende clarificar, afianzar y desarrollar habilidades de pensamiento, mediante la formulación de preguntas que exijan la comprensión de los conceptos y de los procedimientos asociados.
- ¿Qué aprendimos de? Proceso de valoración del aprendizaje mediante la observación, registro, recolección, organización, revisión y análisis de toda la información relacionada con cada uno de los distintos aspectos asociados con el desempeño, el desarrollo y evolución del estudiante en los diferentes saberes en las que se describen las competencias (saber-saber, saber-hacer, saber-ser).
- Para profundizar: En este apartado se agregarán las referencias bibliográficas de los textos usados como apoyo en el diseño del taller y se ofrecerá una bibliografía complementaria para los estudiantes que estén interesados en profundizar en los temas presentados.

Fase 3. Intervención en el Aula

En esta fase se implementó la secuencia de talleres. Se realizó durante aproximadamente tres meses. Para ello, se disponía de cuatro horas semanales de clase (distribuidas en dos bloques de dos horas).

Fase 4. Análisis de la información

La finalidad de esta fase consiste en analizar los resultados con el fin de alcanzar los objetivos propuestos de la investigación. Actualmente, la investigación se encuentra en esta fase.

Estudio de la razón geométrica desde su componente histórico-epistemológico

En este apartado describiremos el taller diseñado para el estudio de la razón geométrica, siguiendo la estructura descrita en la Fase 2 del apartado anterior. Para dicho taller se plantearon los siguientes **Indicadores de logro**:

- I. Interpreta como un número, como un porcentaje o como una razón geométrica a la cantidad que surge de la comparación por cociente de las medidas de dos lados cualesquiera de un triángulo rectángulo.
- II. Resuelve problemas sobre la cotidianidad aplicando el concepto de razón geométrica construido mediante el recurso histórico.
- III. Reconoce el valor que ofrece el estudio de problemas históricos para indagar sobre la realidad, para entender el carácter científico del conocimiento matemático y para establecer la relación entre los modelos abstractos de la matemática y las situaciones de contexto.


Previo a la clase, se plantean a los estudiantes unas **Preguntas orientadoras**, con el fin de que consulten y lleguen a la clase con algunas ideas que permitan introducir al tema. Para esta sesión se plantearon las siguientes preguntas: ¿Quién fue Tales de Mileto? ¿Cuál era el pensamiento filosófico de Tales? ¿Por qué le dio gran importancia al agua? Encuentre e interprete algunas frases célebres de Tales, él asombró a los egipcios midiendo la altura de las pirámides sin tener que subirse a ellas y solo usando la longitud de la sombra ¿Cómo lo hizo? ¿Cómo identificó Tales el concepto de razón geométrica para medir la altura de la gran pirámide? ¿Cómo puede explicar que Tales hizo un proceso de abstracción matemático para calcular la altura de la gran pirámide?

Para iniciar la clase, se socializan las respuestas que los estudiantes traen de las preguntas orientadoras. Esto permite que se dé una discusión interesante y a partir de allí se valore **Qué saben de** la razón geométrica. Para ello, se plantean preguntas como: Juan Sebastián afirma que si al ampliar una fotografía de $4\text{ cm} \times 7\text{ cm}$ se aumenta el ancho a 10 cm , entonces el largo se aumenta a 13 cm . Miguel le dice que no está de acuerdo pero que no sabe cómo explicarlo. ¿Cómo puede usted ayudarle a Miguel a explicar o, si está de acuerdo con Juan Sebastián, cómo confirma su afirmación?

Luego se pasa al apartado **Recurriendo a la historia**; en él se incluye un episodio de la historia en el que el personaje principal es Tales de Mileto; en el episodio se requiere introducir lo que es la razón geométrica (ver Figura 1). El objeto de la tarea es analizar la razón geométrica que, para Tales surge del proceso de abstracción que hizo para resolver un problema real. Aquí el uso de la historia funge como uso y como integrador, de acuerdo con Guacaneme (2016). Como uso porque presenta un episodio histórico y, como integrador, porque muestra el posible origen de los conceptos de razón geométrica y proporción, y su uso para encontrar, de manera indirecta, una medida. La situación descrita puede facilitar la comprensión de dichos conceptos.

Recurriendo a la Historia Tales y la pirámide

Cuenta la leyenda relatada por Plutarco que Tales de Mileto, uno de los llamados siete sabios de Grecia, durante uno de sus viajes a Egipto se encontró cierto día visitando la Necrópolis con el joven e inquieto Rey de Egipto, quien deslumbrado por la fama y sabiduría de Tales le preguntó si podía medir la altura de la majestuosa pirámide de Keops que se levantaba ante ellos.



Era por la mañana, muy temprano, y acababa de salir el sol por el horizonte. Es sabido que a esa hora las sombras que las personas y los objetos proyectan son muy largas, luego se acortan a medida que avanza el día, sobre todo al mediodía, y ya por la tarde empiezan de nuevo a alargarse. Ante la pregunta del Rey, Tales reflexionó unos instantes y le contestó que no solo la calcularía, sino que incluso la mediría sin ayuda de ningún instrumento. Dicho esto, tomó dos bastones de igual longitud (también pueden ser distintos, e incluso con uno solo es posible), colocó uno en posición vertical y el otro en horizontal, y se puso a esperar. Como todavía era muy pronto, la sombra proyectada por el bastón vertical superaba con mucho la longitud del bastón horizontal, pero a medida que avanzaba el día esa sombra se fue acortando. Cuando su longitud se hizo igual que la del bastón apoyado en la arena, Tales le dijo al Rey: “Ahora ya es muy fácil conocer la altura de la pirámide”. ¿Por qué?

Figura 1. Adaptación del problema de Tales y la Pirámide.

Fuente: <https://eltraasterodepalacio.wordpress.com/2013/01/14/la-altura-de-la-piramide-de-keops-y-el-teorema-de-tales/>

Posteriormente, para **Hacer en contexto**, proponemos la siguiente situación en un día soleado y en un espacio descubierto del colegio: trabajando en grupos de tres estudiantes, uno sostiene una vara delgada de un metro de longitud en posición vertical mientras otro estudiante mide la longitud de su sombra. El tercer estudiante registra las medidas, luego con esos datos se les pide construir en el papel y a escala el objeto geométrico (triángulo rectángulo) resultante de esta

experiencia. Ahora se les formula dos preguntas: ¿Cuál es el cociente entre la medida de la longitud del objeto y la medida de la longitud de la sombra? Si se esperan 15 minutos y repetimos, para el mismo objeto, la medición de la longitud de su sombra y se calcula nuevamente el cociente, ¿obtendremos la misma razón? Justifique su respuesta.

La siguiente tarea se propone para **Matematicomanía**; se basa en el episodio histórico de Eratóstenes y la medición de la circunferencia de la Tierra.

Matematicomanía

Eratóstenes midió la circunferencia de la tierra en el año 240 a. C., basándose en su curvatura. Siendo Director de la Biblioteca de Alejandría, encontró en un papiro que en Siena (Egipto), el día del solsticio de verano (21 de junio), los rayos del sol caían perpendicularmente a las 12:00 am (una vara vertical en Siena no produce sombra). Sin embargo, ese mismo día, a la misma hora en Alejandría (Egipto) situada 5000 estadios (unidad egipcia de longitud) al Norte (sobre el mismo meridiano), los rayos solares caían con un ángulo de inclinación (una vara vertical en Alejandría produce sombra) de $7,2^\circ$ respecto de la vertical. Este ángulo es exactamente el mismo ángulo que se forma en el centro de la tierra si se prolongan las dos varas hacia dicho punto. (Ver Figura 2). Con esta información y aplicando el concepto de razón geométrica, responde: ¿Cuántos estadios en la superficie de la Tierra se tienen por cada grado sexagesimal en el centro de la Tierra? Calculen la longitud de la circunferencia de la tierra en Km. (Consulta en Internet la equivalencia entre Km y Estadios egipcios).

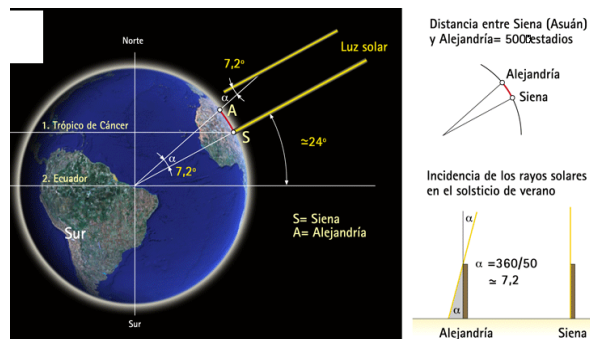


Figura 2. Representación del problema de Eratóstenes.

Fuente: <https://ocw.unican.es/mod/book/view.php?id=955&chapterid=122>

La penúltima actividad, **¿Qué aprendimos?** Plantea el siguiente problema: la sombra de un árbol mide 9 m a la misma hora que la sombra de una vara de 1 m de altura mide 1.5 m. Construya una gráfica a escala (representación geométrica) del problema. Halle la altura del árbol. ¿Cuál será la altura de otro árbol que a la misma hora produzca una sombra de 12 m? ¿Serviría esta misma razón para hallar la altura de los árboles a otra hora distinta? ¿Por qué?

Para finalizar, se presenta el apartado **Para profundizar**, en el que se dan unas ligas a blogs y páginas web donde se encuentra información para profundizar en la temática presentada.

APORTES Y PERTINENCIA

La estructura de los talleres que se presentan en esta investigación se considera un aporte al campo de la educación matemática. Tanto la estructura como las tareas son originales; su fundamentación teórica hace uso de la didáctica, de la historia, la filosofía y la epistemología de la matemática.

Después de experimentar con este enfoque por muchos años y con distintas generaciones de estudiantes por dos años consecutivos (décimo y undécimo) de la media vocacional, se ha podido observar en ellos algunos cambios de conducta importantes en su manera de pensar y de actuar; aprenden a escuchar, desarrollan pensamiento crítico, elevan su autoestima, enriquecen su cultura, adquieren una visión más profunda del conocimiento, tienden a autoevaluarse, obtienen mejor comprensión de los conceptos, entienden la conexión de la matemática con otras ciencias. Estos son elementos que parecen reflejar el influjo de la propuesta.

El enfoque y el contenido de la experiencia de aula que se está compartiendo en este documento, muestran cómo favorecer el aprendizaje de la trigonometría. A través del recorrido histórico se da significado y uso a nociones básicas de la geometría como: ángulo, triángulo rectángulo, semejanza de triángulos y razón geométrica.

REFERENCIAS

De la Puente, F. (s. f.). *Cálculo de la esfera terrestre por Eratóstenes*. Recuperado de <https://ocw.unican.es/mod/book/view.php?id=955&chapterid=122>

- Fernández, E., Ruíz, J. y Rico, L. (2016). Significado Escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de las Ciencias*, 34.3, 51-71.
- González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *SUMA. Revista sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*, 45, 17-28.
- Guacaneme, E. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- La altura de la pirámide de Keops y el teorema de Tales* (14 de enero de 2013). Recuperado de <https://eltrasterodepalacio.wordpress.com/2013/01/14/la-altura-de-la-piramide-de-keops-y-el-teorema-de-tales/>
- Maza, C (1994). Historia de las matemáticas y su enseñanza: un análisis. *SUMA. Revista sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*, 17, 17-26.
- Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Autor.