

ELEMENTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA: IDEAS PREVIAS DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO SEXTO

Javier Jiménez

Instituto Técnico Industrial Piloto IED.
educacionmtic@gmail.com, javier_jimenez@javeriana.edu.co

Examinando las ideas previas de los estudiantes de grado sexto del Instituto Técnico Industrial Piloto IED (ITIP), ligadas a los conceptos que atañen a la geometría plana, se inició indagando sobre lo que intuían por punto y recta. La intervención oral y la escucha dejaron que los niños interactuaran y revelaran sus nociones, para que fueran aprobadas o refutadas por sus compañeros. Luego, consultaron y expusieron estos términos con el fin de enriquecer sus concepciones. Aquí se aportan algunas ideas que declararon y se contrastan con las definiciones forjadas en la historia y con las citadas en publicaciones.

DEFINICIONES DE PUNTO Y LÍNEA RECTA

La importancia del estudio de punto y línea recta radica en el potencial que poseen para modelar fenómenos naturales. La existencia de la materia se intenta revelar a partir de la divisibilidad de los objetos, procurando fijar las partículas “elementales”. Así, al tomar como prototipo el “punto geométrico” para señalar atributos de una onda-partícula lleva a suponer, desde la física, que cuanto menor es el radio de dicho elemento, mayor es la energía; si fuese infinitesimal, la energía sería infinitamente grande. Esto conduce a revisar otros conceptos en oposición, tales como “*lo discreto y lo continuo*”, “*la materia y el vacío*”, y evolucionar “*al objeto y al campo*”, lo cual le compete a *la teoría cuántica*. Por otro lado, para explicar el origen del universo se plantean arquetipos unidimensionales que se describen como pequeños segmentos de una línea en vibración, llegando a *las teorías de las cuerdas*.

Referentes históricos

Por sus contribuciones a la geometría, se resaltan los conceptos aportados por algunos griegos, y por los ilustres matemáticos Leibniz y Hilbert.

Euclides: Por acuerdo de historiadores, se dice que *Elementos* es un texto del 300 a. C. En el *Libro I* se fijan las definiciones de punto, línea y línea recta:

1. Un punto es lo que no tiene partes. 2. Una línea es una longitud sin anchura. 3. Los extremos de una línea son puntos. 4. Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella. (Euclides, 1991, pp.189-190).

En las definiciones 2 y 4, se diferencian las líneas (que admiten curvas) y las líneas rectas. En las notas a la definición 1, el traductor de los *Elementos* sella:

1. Aristóteles define el punto como el límite de la línea, la línea como límite de la superficie, la superficie como el límite del cuerpo sólido. 2. Alejandro de Afrodisia sostenía que los elementos primeros del plano son las líneas, y de las líneas los puntos. (Euclides, 1991, pp.189-190).

En conexión a la definición 4 en las notas sobre línea recta se despliega:

Los griegos se formaron tres representaciones básicas de la línea recta: 1. la de un hilo tenso, 2. la de un rayo de luz, 3. la de un eje o lugar de los puntos que se mantienen inmóviles en un cuerpo fusiforme suspendido por ambos extremos. Y para Arquímedes 4. la recta es la más corta de todas las líneas que tienen los mismos extremos. (Euclides, 1991, pp.190-191).

Finalmente, en los *postulados* con relación a la línea recta se indica:

1. Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera. 2. Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta. (Euclides, 1991, p.197).

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716): Al parecer, en 1663, Leibniz empezó a estudiar los *Elementos* de Euclides no solo para revisarlos y comentarlos sino con un propósito mayor, el de demostrar los axiomas y el de erigir una nueva *Característica Geométrica*. En 1677, escribió un ensayo sobre esta nueva forma de ver la geometría donde expuso su proyecto de construir un *análisis geométrico* basado en la situación, *el Analysis Situs*. Según Echeverría y De Mora (2016) “en el manuscrito de 10 de agosto de 1679, se ocupó en primer lugar de la definición de espacio y

luego de la de punto... modificando la de Euclides... Leibniz partió de la relación de congruencia” (p.107):

Lo siguiente a considerar es el *punto*, es decir aquello más simple entre todo lo que pertenece al espacio o la extensión; pues del mismo modo que el espacio contiene a la extensión absoluta, así los puntos expresan lo que es máximamente limitado en la extensión, sin duda el simple *situs*. De ahí se sigue que el punto es un mínimo y carece de partes, y todos los puntos son congruentes entre sí (es decir, pueden coincidir), por lo tanto, son semejantes y, se podría decir, iguales. (Leibniz, 1995, citado por De Mora, 2018, pp. 95-96).

En 1679, en una epístola a Huygens, a modo de resumen, Leibniz le anexa su *Característica Geométrica*. Allí define línea recta vinculándola con el infinito:

Es el lugar de todos los puntos *Y* con respecto a los cuales tres puntos dados *A. B. C.* se comportan del mismo modo; todos esos puntos [se refiere a los que “se comportan del mismo modo”, es decir, a los que están en la misma relación de congruencia con *A, B, y C*] caerán en la recta infinita. (Leibniz, 1995, citado por Echeverría y De Mora, 2016, pp.112-113).

David Hilbert (1862-1943): Los *Fundamentos de la geometría* fueron publicados en 1899, en este texto se enumera los tres elementos de la geometría, las cinco relaciones que se establecen entre estos y los cinco grupos de axiomas. El primer capítulo lo introduce con los “*elementos de la geometría*”:

Pensemos tres distintos sistemas de entes: a los entes del *primer* sistema los llamamos *puntos* y los designamos con *A, B, C, ...*, a los entes del *segundo* sistema los nombramos *rectas* y los designamos con *a, b, c, ...*, a los entes del *tercer* sistema, los llamamos *planos*, y los designamos con *a, b, g, ...* Los puntos reciben también el nombre de *elementos de la Geometría lineal*, los puntos y rectas el de *elementos de la Geometría plana*, y los puntos, rectas y planos, el de *elementos de la Geometría espacial* o *del espacio*. (Hilbert, 1996, p.3).

Con este abordaje, Hilbert reclama la apertura de tomar cualquier terna de entes que cumplan con las relaciones y los grupos de axiomas, convirtiendo los elementos básicos en variables. En este sentido, Hilbert manifestó:

Uno debería ser capaz de decir siempre, en lugar de puntos, líneas rectas y planos, mesas, sillas y jarras de cerveza. (Hilbert, 1996, p. xxix).

Obras al alcance de los estudiantes

Los textos revisados se clasifican en tres tipos: i) obras generales sin implicaciones matemáticas tales como enciclopedias en general, diccionarios enciclopédicos o Internet (enciclopedias en línea, wikis o blogs), ii) obras que son específicas para consulta de matemáticas sin ser libros de texto como enciclopedias temáticas y iii) obras de texto para educación básica y/o media.

Obras generales sin implicaciones matemáticas

Punto	i) (Lat. punctum, der. de pungere, punzar). 1. Elemento del espacio, de muy pequeñas dimensiones, que puede representarse por la intersección de dos rectas... (Larousse Librairie, 1982, pp. 9016-9017). ii) Señal diminuta. //Sitio. //Cosa muy corta, parte mínima. (Garzón, 1994, p.1013). iii) El punto es la unidad más simple, irreductiblemente mínima, de la comunicación visual, es una figura geométrica sin dimensión, tampoco tiene longitud, área, volumen, ni otro ángulo dimensional. No es un objeto físico. (Wikipedia, s.f.).
Recta	i) Recto, ta: (Del lat. Rectus). Que no se inclina ni aun lado ni al otro. //2. V. ángulo, caso, cilindro, compás, cono, feudo, seno recto. //3. V. ascensión, esfera, línea recta. //7. Geom. V. línea recta. (Real Academia Española, 1970, p. 1116). ii) Raya. Segmento, trazo. V. LINEA. (Corropio, 1985, p.747). iii) En geometría euclidiana, la recta o la línea recta es una línea que se extiende en una misma dirección; por lo tanto, tiene una sola dimensión y contiene un número infinito de puntos. Dicha recta también se puede describir como una sucesión continua de puntos extendidos en una sola dirección. (Wikipedia, s.f.).

Obras de consulta matemática

Punto	i) Situación en el espacio, sobre una superficie o en un sistema de coordenadas. Un punto carece de dimensiones y solamente está definido por su posición. (Castaño, 1982, p. 159). ii) Término genérico que designa los elementos de cualquier espacio geométrico, en particular los elementos de un espacio afín, euclideo o proyectivo. Con la aplicación de técnicas geométricas a otros aspectos de las matemáticas, al querer dar una imagen geométrica de determinados
-------	---

	conjuntos se acostumbra a llamar puntos a sus elementos. Por lo tanto, no puede definirse el punto de una manera precisa, sino que hay que dar una definición en cada área de las matemáticas. (Espinosa, 2003, p. 242).
Recta	i) La línea recta es la más sencilla de todas las líneas. Un hilo delgado y tenso nos da su imagen; imagen imperfecta, puesto que una línea recta carece de espesor y debe suponerse ilimitada en los dos sentidos. La línea recta no puede definirse y su noción es intuitiva... (Grupo Editorial Cumbre S. A., 1977, p. 161). ii) Unión entre dos puntos del espacio o sobre una superficie. Una línea tiene longitud, pero no espesor, es decir, tiene una dimensión. La línea recta es la menor distancia entre dos puntos de una superficie plana. (Castaño, 1982, p. 115). iii) Es una sucesión de puntos que están en la misma dirección. Puede definirse también como la frontera o borde de dos semiplanos. (Santamaría, 1995, p. 320). iv) Recta: Geom. Conjunto continuo de puntos alineados, de dirección constante. (Espinosa, 2003, p. 255).

Obras de texto

Punto	i) La punta de una aguja, de un alfiler o de un lápiz, dan idea del punto. El encuentro o cruce de dos líneas forma también un punto. El punto no tiene ninguna dimensión; pero en la práctica se lo señala con un pequeño trazo que es algo extenso como el punto de la i (•), o con el cruce de dos rayitas (x). (Rozan, 1956, pp. 31-32). ii) Un punto no tiene tamaño, sólo ocupa un lugar. La pequeña marca que deja la punta afilada de un lápiz puede representar un punto. (Chapin, Illingworth, Landau, Misingila y McCracken, 1996, p. 41).
Recta	i) Línea recta. - Un hilo bien tirante, el doblar de una hoja de papel, las aristas de una regla, las equinas de las paredes, dan idea de la línea recta. La línea recta, o simplemente recta es el camino más corto que hay entre dos puntos... Para trazar rectas se emplea generalmente una regla, una escuadra o un cordón bien tirante. (Rozan, 1956, p. 32). ii) La recta es considerada como un conjunto infinito de puntos que se prolonga indefinidamente en dos sentidos opuestos. La marca que deja un lápiz al pasar por dos puntos usando el borde de una regla, da la idea de

	recta. En la representación de una recta, se trazan flechas en sus extremos para indicar que no termina. Las rectas se nombran con las letras que indican dos de sus puntos o mediante una letra minúscula. (Cubillos y Salgado, 2004, p. 218).
--	---

IDEAS PREVIAS APORTADAS POR LOS ESTUDIANTES

En periodo I-2019, se hizo un trabajo con 165 niños de cinco cursos de 6° grado. Se les solicitó que dibujaran un punto y una recta, y que luego los explicaran. Las respuestas se categorizan según el uso, los atributos físicos y la esencia:

Los términos descritos a partir de los usos

Usos del punto:	El punto nos ayuda a hacer figuras, es un signo de puntuación, se utiliza para separar números y para separar párrafos.
Usos de la recta:	La recta tiene diferentes usos (recta numérica), sirve para ubicar números y para crear superficies planas.

Términos descritos a partir de los atributos físicos

Forma del punto:	Es plano, es circular, es una circunferencia, es redondo, puede tener cualquier forma, el punto no tiene vértices.
Tamaño del punto:	Es pequeño, tiene cualquier tamaño, ocupa un espacio, el punto se puede medir, tiene área y perímetro.
Color del punto:	Es negro, es de diversos colores, puede tener cualquier color.
Forma de la recta:	Es plana, es una línea derecha, es delgada, es de cualquier grosor, no es una línea curva, no tiene partes circulares, no es torcida, no tiene altura, con dos puntos se forma una recta.
Tamaño de la recta:	Es larga, es corta, tiene comienzo y final, tiene varios tamaños, se puede medir, tiene área y perímetro.
Color de la recta:	Puede tener diversos colores, es de cualquier color, es negra.

Los términos descritos a partir de la esencia

Esencia del punto:	Es una figura geométrica, hace parte de una línea, hace parte de todas las figuras geométricas, es el inicio de una línea, no existe en la realidad, no existe en la naturaleza, el punto no tiene área, el punto no tiene volumen.
Esencia de la recta:	Es un elemento básico de la geometría, es esencial para la geometría, hace parte de las figuras geométricas, forma figuras, tiene diferentes posiciones, tiene dos sentidos, es infinita, no tiene fin, es la unión de dos puntos, no es una figura geométrica, no existe en la naturaleza, es un gráfico, se hace con una regla.

VÍNCULOS ENTRE LAS IDEAS PREVIAS Y LOS REFERENTES

Aquí se señalan algunas ideas de los estudiantes las cuales se comparan con las definiciones forjadas en la historia y en obras que están a su alcance.

En relación con los usos del punto se puede citar a Garzón (1994) que los emplea para indicar un sitio, y a Castaño (1982) como la situación en el espacio dado un sistema de coordenadas. En las diversas definiciones no se señalan los usos indicados por los niños. Esto se debe a que la relación que establecen está vinculada con la puntuación ortográfica o con la separación de cifras. Empero citan la recta numérica para ilustrar un uso.

Quienes indicaron cualidades físicas ligadas con forma, tamaño y color, lo hicieron a partir de los dibujos. En conexión con la noción de recta, las expresiones “es larga”, “es corta”, “tiene comienzo y final” tiene reciprocidad con la definición 2, y con el postulado 1 y 2 de Euclides (1991). Esas ideas están en Corropio (1985) y corresponden a la de *segmento de recta*.

Ahora, revisando la noción de Arquímedes citado por Euclides (1991) “la recta es la más corta de todas las líneas que tienen los mismos extremos” encaja con las dadas en clase “es la unión de dos puntos” y con “dos puntos se forma una recta” y se acoplan con las de Castaño (1982) y Rozan (1956).

El atributo mencionado en clase, la recta es “infinita”, “no tiene fin”, lo señala Leibniz citado por De Mora (2018). Además, se consigna en Wikipedia (s.f.), Grupo Editorial Cumbre S.A. (1977), y Cubillos y Salgado, (2004).

Las expresiones de los niños: la recta es una “línea derecha”, “no es una línea curva”, “no tiene partes circulares” y “no es torcida”, se ligan con la definición 4, fijada por Euclides (1991) y con el intento de Leibniz citado por De Mora (2018) de precisarla con la frase el lugar de todos los puntos... los cuales... se comportan del mismo modo. A esta idea incluso se refieren la Real Academia Española (1970) “que no se inclina ni aun lado ni al otro” (p.1116) y Wikipedia (s.f.), Santamaría (1995) porque usan la frase tienen una misma dirección, o como lo dice Espinosa (2003) “de dirección constante” (p. 255).

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Las ideas que imperan en los niños están ligadas a los usos y a las grafías hechas por ellos. Es valioso que para que ganen en abstracción, se haga énfasis en: 1. la idea matemática, 2. la representación y 3. la notación. Para lo primero se pueden vincular los elementos como se ve en Aristóteles, Alejandro de Afrodisia, citados por Euclides (1991), Librairie Larousse (1982), Santamaría (1995) y Rozan (1956). Además, como comenta Jiménez (2010),

Se sugiere tener en cuenta las relaciones entre objetos geométricos que no se pueden dejar de lado y que extraídas del trabajo de Hilbert (1996) conciernen a: estar en (incidencia); posiciones relativas de un punto y una recta, posiciones relativas de una recta y un plano, estar entre (orden); la posición que tiene un punto con relación a otros en una recta, congruencia (movimiento-coincidencia); superponer figuras para comparar sus formas y tamaños, continuidad (denso); ubicar los puntos posibles en un plano, en una recta y entre dos puntos, paralelismo; trazar rectas secantes (perpendiculares y oblicuas) y no secantes. (p. 17).

En conexión con lo segundo se pueden diseñar tareas para representar el punto con una perforación (Jiménez, 2010) y la recta con un dobléz (Rozan, 1956) y luego, otras para tomar un lápiz afilado (Chapin et al., 1996) y una regla sin marcas como se indica en Rozan (1956), y Cubillos y Salgado (2004). Finalmente, en cuanto a la notación se debe mantener una coherente como lo que plantea Hilbert (1996), Rozan (1956), y Cubillos y Salgado (2004).

REFERENCIAS

- Castaño, J. (1982). *Diccionario de Matemáticas*. Bogotá: Editorial Norma.
- Corropio, F. (1985). *Diccionario de Ideas Afines*. Barcelona: Herder.
- Cubillos, C. y Salgado, D. (2004). *Aritmética y geometría I*. Bogotá: Santillana S.A.
- Chapin, S., Illingworth, M., Landau, M., Misingila, J. y McCracken, L. (1996). *Matemáticas para niveles intermedios – curso I*. Estados Unidos: Ed. Prentice-Hall.
- De Mora, M. (2018). Leibniz crítico de Euclides. El método del *Analysis Situs*. *Quaderns d'història de l'enginyeria*, 16, 93-107. Recuperado de <https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/118716/article5.pdf>
- Echeverría, J. y De Mora, M. (2016). Leibniz crítico de Euclides. El método del *Analysis Situs*. *Kairos. Journal of Philosophy & Science*, 16(1), 99-123. doi: 10.1515/kjps-2016-0011
- Espinosa, J. (2003). *Diccionario de Matemáticas*. Madrid: Cultura S. A.
- Euclides (1991). *Elementos* (trad. María Luisa Puertas). Madrid: Gredos.
- Garzón, A. (1994). *Gran Diccionario Enciclopédico Visual*. Bogotá: Panamericana.
- Grupo Editorial Cumbre S. A. (1977). *Nueva Enciclopedia Autodidactica Quillet* (tomo 2). Ciudad de México: Cumbre S. A.
- Hilbert, D. (1996). *Fundamentos de la Geometría*. (trad. Francisco Cebrian). Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas.
- Jiménez, J. (2010). *Geometría con plegado de papel: Geopapiroflexia*. Bogotá: IDEP. Recuperado de <http://geopapiroflexia.blogspot.com>
- Librairie Larousse. (1982). *Gran Diccionario Enciclopédico Larousse*. (Vol. 19). Barcelona: Planeta.
- Punto. (s. f.). *Wikipedia*. Recuperado de [https://es.wikipedia.org/wiki/Punto_\(geometría\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Punto_(geometría))
- Recta. (s. f.). *Wikipedia*. Recuperado de <https://es.wikipedia.org/wiki/Recta>

Real Academia Española. (1970). *Diccionario de la Lengua Española*. Madrid: Espasa Calpe S. A.

Rozan, J. (1956). *Aritmética y nociones de geometría - cuarto libro*. Ciudad de México: Ed. Progreso.

Santamaría, C. (1995). *Diccionario de Matemáticas de Primaria y Secundaria*. Madrid: Ed. Escuela Española.