Construcción de un triángulo isósceles dado el perímetro y la altura relativa a la base: una oportunidad cónica

Óscar Fernando Soto
Universidad de Nariño
fsoto@udenar.edu.co

El problema que estudia este artículo se ufana, sin duda, de clasificarse en la categoría de gran problema, pues teniendo infinitas soluciones, osa de que elementos geométricos como la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola se adopten como instrumentos de la solución, a través de soluciones sencillas, claras, precisas y creativas, en las que se ve el rol principal del concepto de mediatriz. Se presenta una solución por cada uno de los instrumentos o curvas mencionadas. Aunque para los casos de la recta, parábola y circunferencia, parece que existe una única solución, no se aborda el problema de unicidad, pues tal demostración, está fuera del objetivo del artículo. En la construcción final, se advierte la forma en que infinitas hipérbolas y elipses resuelven el problema.

Elementos iniciales

Resolver un problema en el modelo euclídeo implica la utilización de la regla y el compás a la usanza clásica. Pero, con otras libertades, se pueden combinar métodos y atacar el problema, por ejemplo, usando las cónicas como instrumentos de trabajo, es decir, como herramientas físicas que viabilizan la solución. Ello no asegurar que, por usar estas curvas, la solución al problema sea más fácil o se cargue de trampa o truco.

De hecho, al usar diferentes estrategias y herramientas, hay mayor riqueza y goce estético con la posibilidad de contemplar la belleza infinita de la matemática en la construcción de su conceptos y teorías. Además, si el problema no se puede resolver con regla y compás (plan A), al haber otros caminos, aparecen planes B, C D, etc., que enriquecen, de manera heurística, el mismo planteamiento del problema.

Soto, O. (2019). Construcción de un triángulo isósceles dado el perímetro y la altura relativa a la base: una oportunidad cónica. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 39-48). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

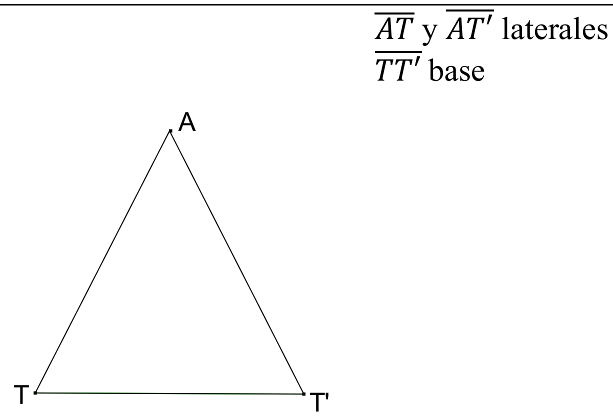

Figura 1. Triángulo isósceles

El problema consiste en construir un triángulo isósceles, si se conoce su perímetro y la medida de la altura desde el vértice común a los lados congruentes.

Para todas las construcciones que se exponen a continuación, se tiene en cuenta que PQes el perímetro, B es el punto medio del $\overline{PQ}$ y el $\overline{AB}$ es la altura del triángulo a construir, como se indica en la Figura 2. Se debe tener en cuenta que, para realizar la construcción, se debe cumplir la condición, $AB < \frac{p}{2}$.

Construcción 1. Usando la mediatriz

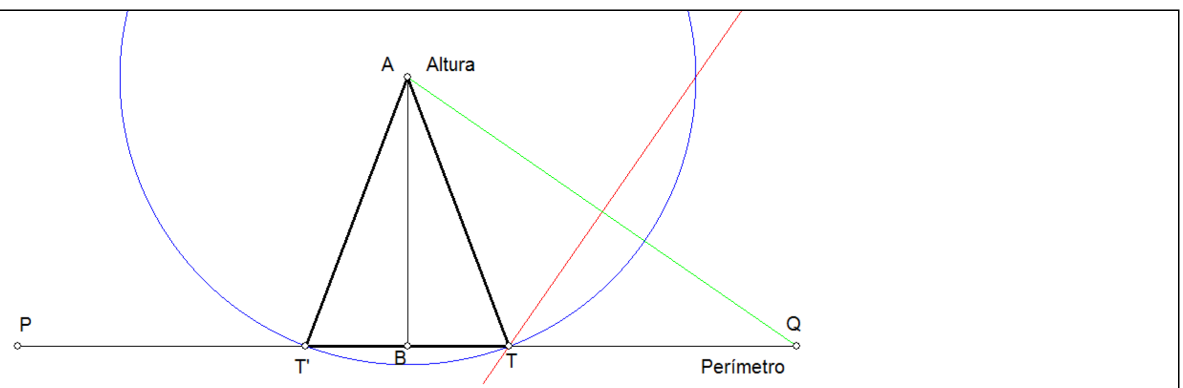

Figura 2. Mediatriz

Se traza el $\overline{AQ}$y luego su mediatriz, que corta al $\overline{PQ}$ en T. Con centro en Ay radio ATse traza una circunferencia que corta al $\overline{PQ}$ en T'. El $\Delta T'TA$ es el triángulo pedido. El triángulo es isósceles por construcción. Ahora, $TA = TQ$ por ser T un punto de la mediatriz. Se tiene que:

$$p = TT' + TA + AT' = 2BT + 2TA = "(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ$$

Construcción 2. Usando el circuncentro

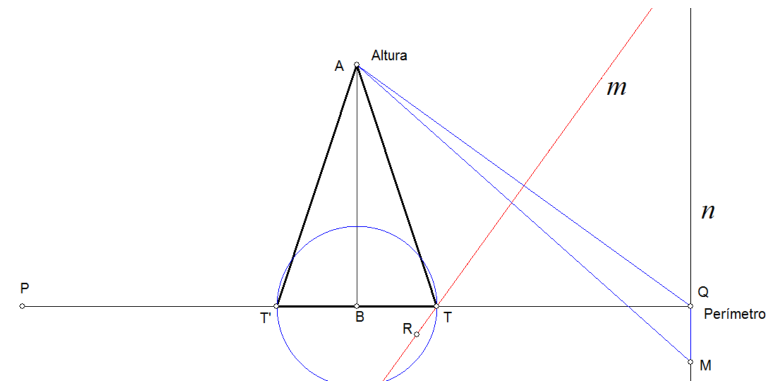

Figura 3. Circuncentro

Se traza por Q la recta $n \perp \overline{PQ}$ y se toma, en la recta n, el punto móvil M. Se considera el ΔMAQ y se determina su circuncentro R. Cuando el punto M se mueve por la recta n, el circuncentro genera un lugar geométrico, en este caso la recta m, que corta al $\overline{PQ}$ en T. Con centro A y radio AT, se traza una circunferencia cuya intersección con el $\overline{PQ}$ es T'.

El triángulo $\Delta TAT'$es isósceles por construcción. Como T es circuncentro, se tiene $TA = TQ$.

$$p = TT' + TA + AT' = 2BT + 2TA = 2(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ$$

Construcción 3. Usando la elipse

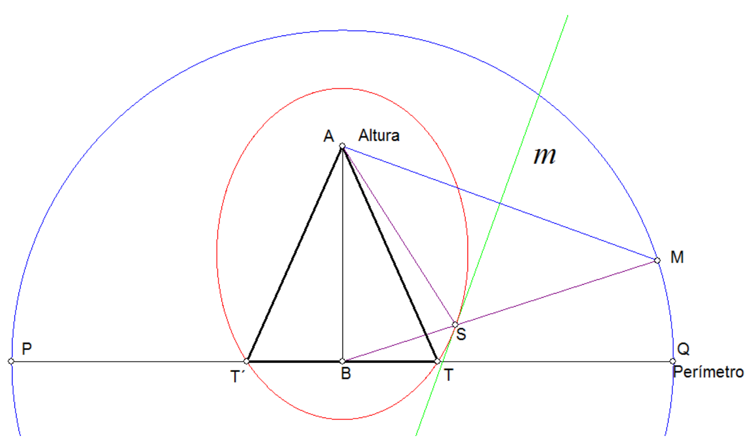

Figura 4. Elipse

Con centro en B y radio BP se traza una circunferencia. En ella, se toma un punto móvil M, se traza el $\overline{AM}$, el $\overline{BM}$ y la mediatriz m del $\overline{AM}$. Sea S el corte de m con el $\overline{BM}$. $SM = SA$, ya que $S \in m$. $BM = BQ = s = \frac{p}{2}$, por construcción. $BM = BS + SM = BS + SA$, reemplazando a SM por SA. $BS + SA = s, S \in m$, en donde A y B son puntos fijos y S es un punto móvil. Al moverse M, s es constante. Lo anterior significa que S describe una elipse con focos A y B, y eje focal de longitud BQ. Ella corta al $\overline{PQ}$ en T y T'.

El $\Delta T'TA$ es el triángulo pedido. $BT = BT'$ por simetría de la elipse. Como $\overline{AB} \perp \overline{PQ}$, entonces $\angle TBA \cong \angle T'BA$. El $\overline{AB}$ es lado común del ΔTBA y del $\Delta T'BA$. Entonces, $\Delta TBA \cong \Delta T'BA$ y, por ende, $AT = AT'$. Cuando $M = Q$, se tiene $TA = TQ$. Así,

$$p = TT' + TA + AT' = 2BT + 2TA = 2(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ$$

Construcción 4. Usando la parábola

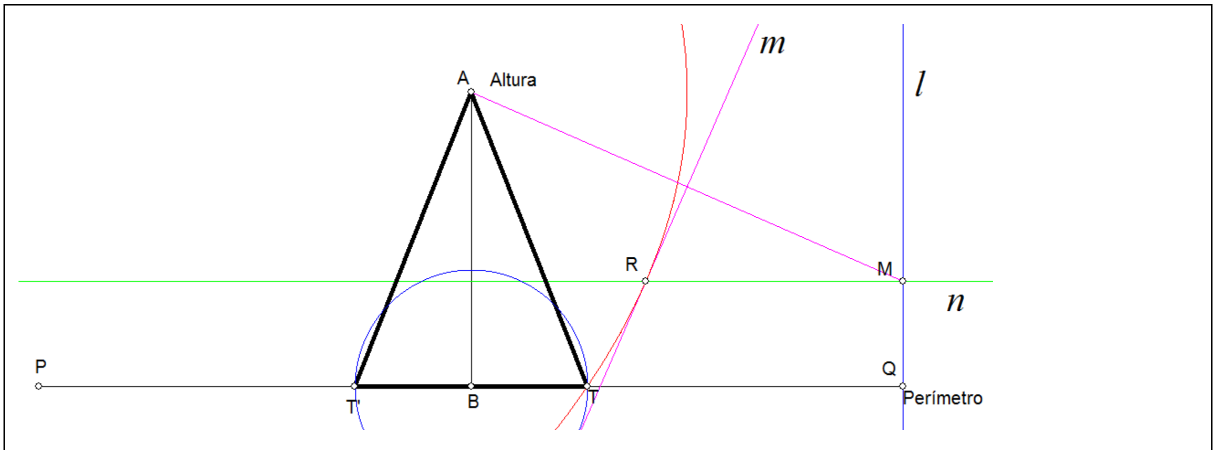

Figura 5. Parábola

Por Q se traza la recta $l \perp \overline{PQ}$, se toma $M \in l$, y por M se traza $n \perp l$. Se traza el $\overline{AM}$ y su mediatriz m que corta a n en el punto R. $RA = RM$, ya que $R \in m$. $\overline{RM} \perp l$, por construcción.

El punto A es fijo y la recta l es fija. Entonces R es un punto de la parábola con foco en A y directriz l, que se genera cuando el punto M se mueve a lo largo de la recta l. La parábola corta al $\overline{PQ}$ en T. Con centro A y radio AT, se traza una circunferencia que corta al $\overline{PQ}$ en T'.

El triángulo solicitado es $\Delta ATT'$. Es isósceles por construcción. $TA = TQ$ por ser T punto de la parábola. Se cumple que

$$p = TT' + TA + AT' = 2BT + 2TA = 2(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ$$

Construcción 5. Usando la hipérbola

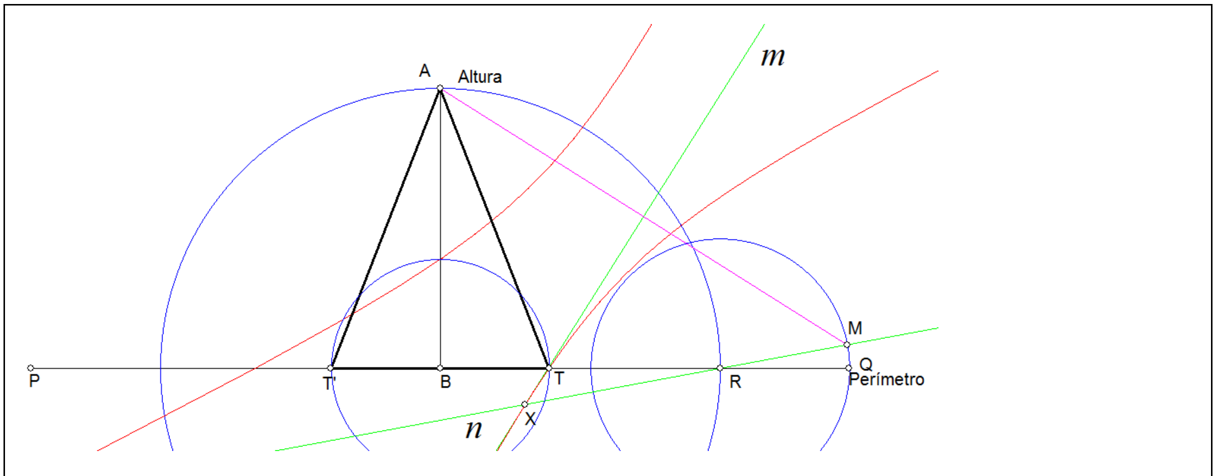

Figura 6. Hipérbola

Se traza la circunferencia con centro B y radio BA que corta al $\overline{PQ}$ en R por cumplirse que $AB < \frac{p}{2}$. Se traza la circunferencia de centro R y radio RQ. En esta circunferencia, se toma un punto móvil M y se traza la recta n, $n = \overleftrightarrow{MR}$. Se traza el $\overline{AM}$ y su mediatriz m que corta a n en X. $XA = XM$, ya que $X \in m$. $XM = XR + RM$, ya que X, R y M son colineales. $XM - XR = RM$. Por tanto, $XA - XR = RM$, ya que $XM = XA$. RM es constante.

Lo anterior significa que X es un punto de la hipérbola de focos A y R, y eje real de medida RM. X es un punto móvil cuando M se mueve sobre la circunferencia de centro R y genera la hipérbola que corta a $\overline{PQ}$ en T.

Con centro A y radio AT, se traza una circunferencia que corta al $\overline{PQ}$ en T'. El triángulo solicitado es $\Delta ATT'$. Es isósceles por construcción. Como T es un punto de la hipérbola, se tiene $TA - TR = RM = RQ$, de dónde $TA = TR + RQ = TQ$. De nuevo,

$$p = TT' + TA + AT' = 2BT + 2TA = 2(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ$$

Construcción 6. Usando la circunferencia

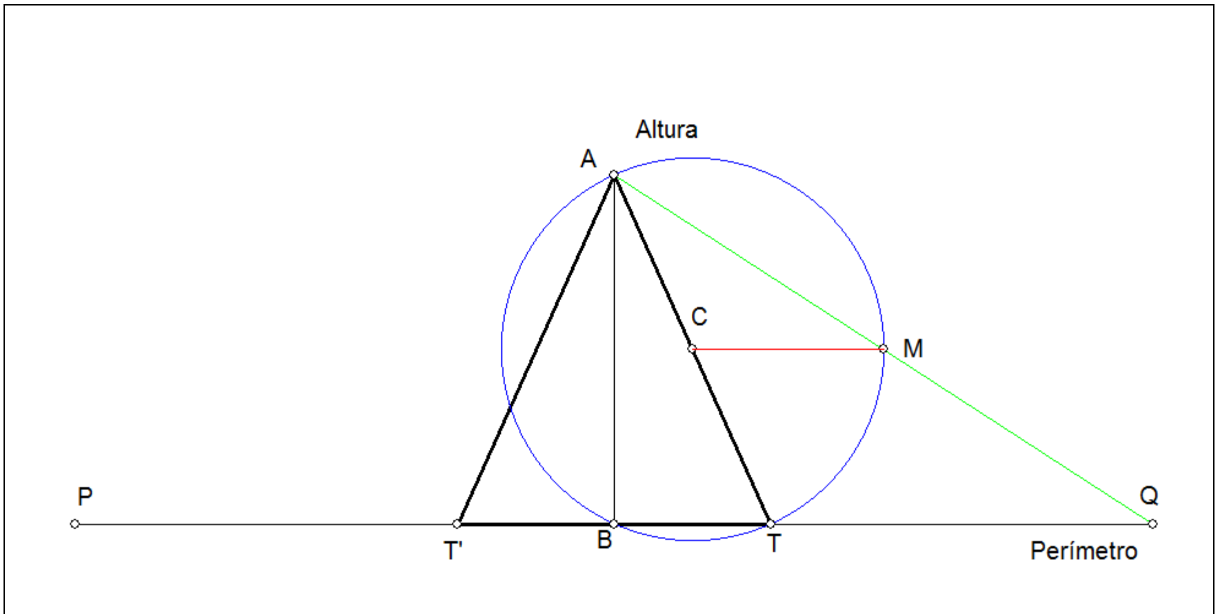

Figura 7. Circunferencia

Sea M el punto medio de $\overline{AQ}$. Se traza la circunferencia que pasa por los puntos A, B y M que corta al $\overline{PQ}$ en T. Con centro A y radio AT se traza una circunferencia que corta al $\overline{PQ}$ en T'.

El triángulo solicitado es $\Delta ATT'$, que es isósceles por construcción. Se traza el $\overline{AT}$. Se sabe que $m\angle ABT = m\widehat{AMT}$. Pero $m\angle ABT = 90°$, de donde $m\widehat{AMT} = 180°$. Esto significa que $\overline{AT}$ es diámetro de la circunferencia. Sea C el centro de la misma; se traza el $\overline{CM}$. Entonces, se cumple que $\overline{CM} \parallel \overline{TQ}$ lo que implica que $\Delta TQA \sim \Delta CMA$. Por lo tanto, se puede establecer la proporción $\frac{TQ}{TA} = \frac{CM}{CA} = 1$, de donde $TQ = TA$. De nuevo, se tiene que

$$p = TT' + TA + AT' = 2BT + 2TA = 2(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ$$

Construcción 7. Caso especial

Supongamos que usando cualquier método anterior se halló el triángulo isósceles $\Delta ATT'$. Se toma un punto móvil $O \in \overleftrightarrow{PQ}$. Con centro O y radio OQ, se traza una circunferencia y en ella se toma el punto móvil M que se desplaza por la circunferencia.

Si O está a la derecha de T, se traza la mediatriz m del $\overline{AQ}$ y la $\overleftrightarrow{MO}$ que corta a la mediatriz en el punto X. En este momento, tenemos la construcción 5 que usa la hipérbola y la demostración es la misma. Hay que anotar que al mover el punto O, se va generando una familia de hipérbolas. Cuando $O \to T^+$ (O tiende a T por la derecha), la hipérbola se degenera en dos rayos $\left(\overleftrightarrow{AT} - \overline{AT}\right) \cup \{A, T\}$.

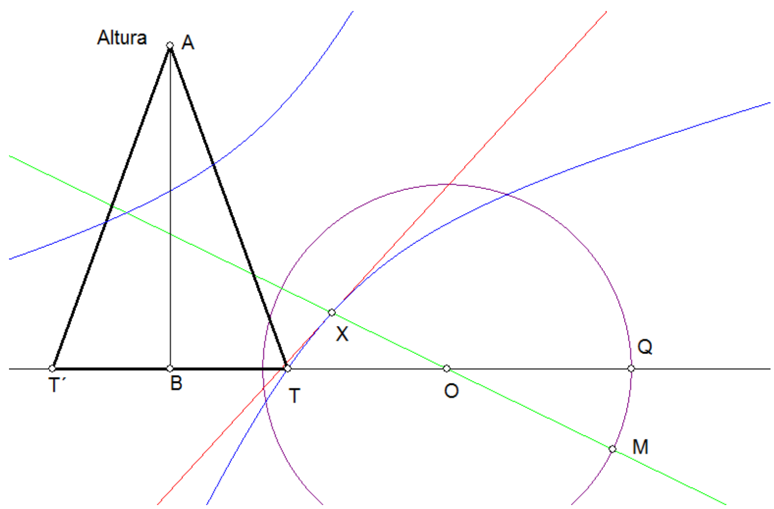

Figura 8. El punto O está a la derecha de T

Si O coincide con Q, la hipérbola se degenera en una recta, precisamente en la mediatriz m que corresponde al primer caso.

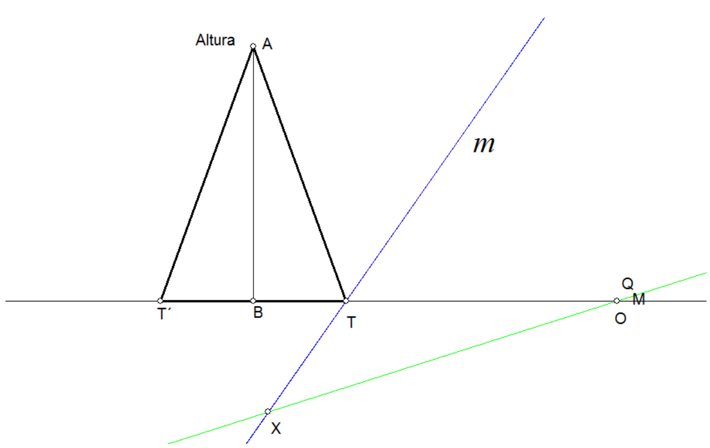

Figura 9. El punto O coincide con Q

Si O está a la izquierda de T, se presenta un caso similar a la construcción que usó la elipse, y la demostración es la misma. Hay que anotar que al mover el punto O se va generando una familia de elipses. Cuando $O \rightarrow T^{-}$ (O tiende a T por la izquierda), la elipse se degenera en el $\overline{AT}$.

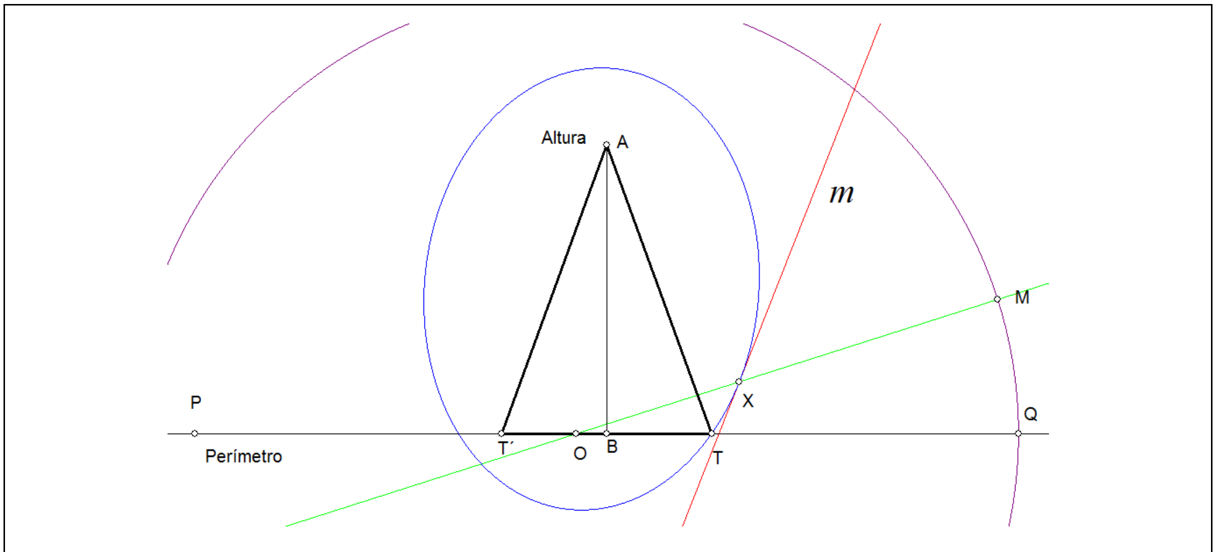

Figura 10. El punto O está a la izquierda de T

Construcción en el plano cartesiano

Se puede construir el $\overline{PQ}$ sobre el eje de las x, de manera que el punto medio B coincida con el origen de los ejes. Se coloca la altura sobre el eje y. De esta manera se puede identificar claramente la ecuación en coordenadas cartesianas de la cónica que entra en juego en la construcción.

Se da el ejemplo para el caso especial de la construcción donde la hipérbola es protagonista del momento matemático.

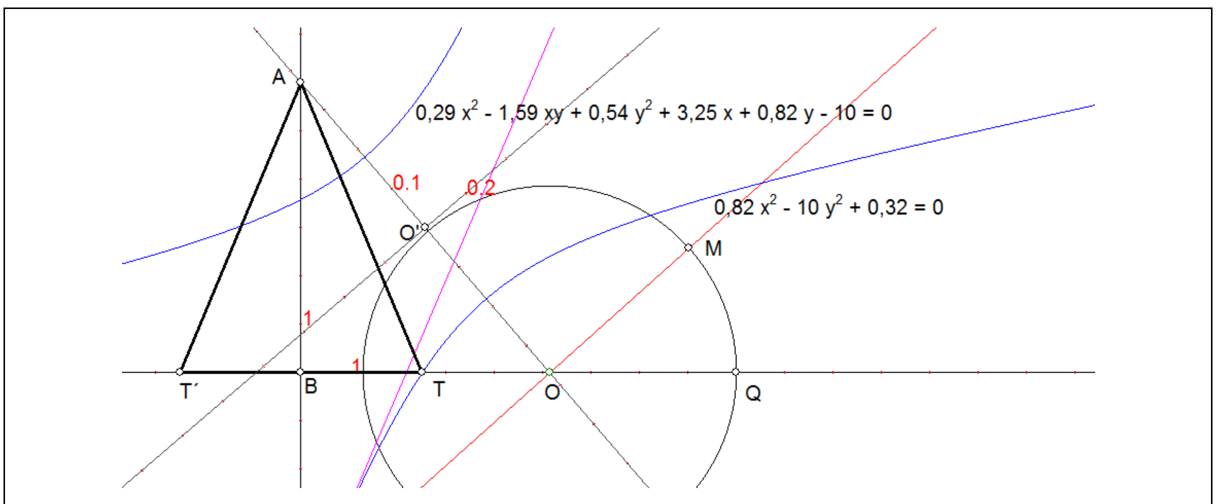

Figura 11. Plano cartesiano: hipérbola

En primera instancia, se muestra la ecuación completa de segundo grado. Pero se puede avanzar más, estableciendo la ecuación en los nuevos ejes: la $\overleftrightarrow{AO}$ y la mediatriz del $\overline{AO}$. Así, la ecuación se presenta simplificada a la máxima expresión.

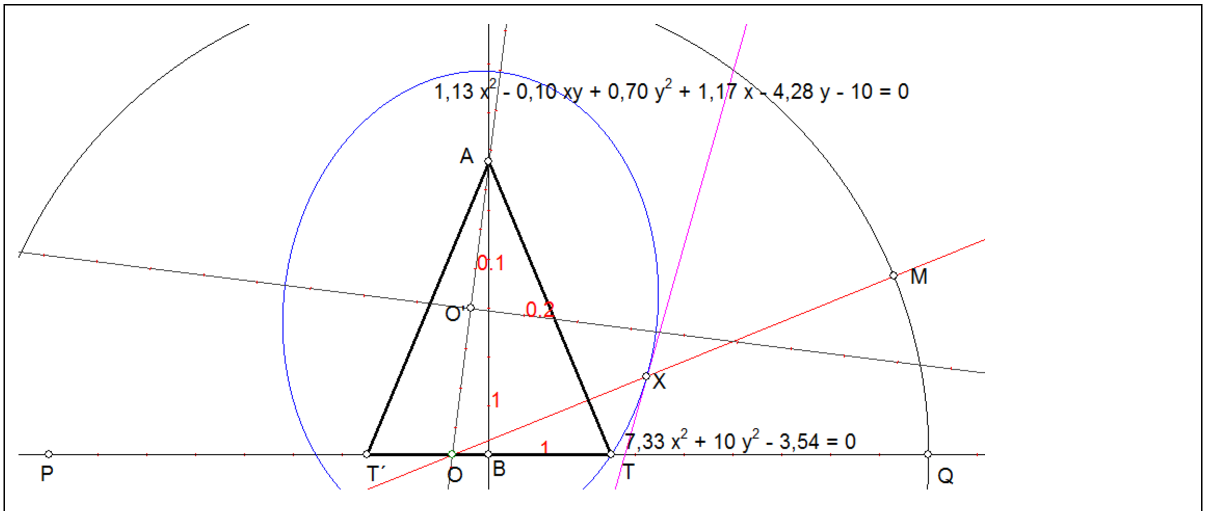

Figura 12. Plano cartesiano: elipse

REFLEXIONES

Queda la pregunta si es posible, utilizando otras curvas como la espiral, la lemniscata, flores de cuatro pétalos u otros, construir un triángulo isósceles o un triángulo cualquiera, de manera que resuelva el problema.

¿Estas construcciones son fortuitas, es decir, son fruto de un momento de iluminación o es cuestión de proponerse a realizar una construcción y poner manos a la obra?

¿Será cuestión de dedicarse horas y días enteros para realizar una construcción con unas condiciones dadas?

¿Será que el tiempo de solución puede trascender una vida humana, quizá generaciones o tal vez nunca se pueda resolver?

¿Se pueden considerar las construcciones 3, 4 y 5 como las construcciones de la elipse, parábola e hipérbola?

La solución del problema resalta la importancia de la mediatriz como instrumento y vía que da apertura a todas las soluciones, hecho que se justifica con la siguiente explicación. Si M es un punto arbitrario en el plano y X es el circuncentro del ΔAQM, la traza de X, al arrastrar a M por todo el plano, coincide con la mediatriz de los puntos A y Q. De modo que es suficiente con elegir arbitrariamente, en el plano, los puntos M y M' y calcular los circuncentros X y X' del ΔAQM y del $\Delta AQM'$, respectivamente; los puntos X y X' determinan una recta que interseca en el punto T al $\overline{PQ}$ que es el que se requiere para resolver el problema. De hecho, la $\overleftrightarrow{XX'}$ coincide con la mediatriz entre A y Q.

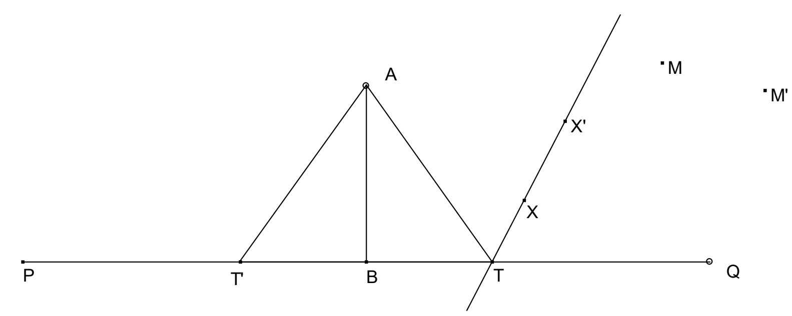

Figura 13. La mediatriz del $\overline{AQ}$

REFERENCIAS

Hemmerling, E. M. (2005). *Geometría elemental*. Ciudad de México: Limusa.

Guerrero, A. B. (2002). *Geometría en el plano y en el espacio*. Bogotá: Universidad Nacional.

Lehmann, C. (1989). *Geometría analítica*. Ciudad de México: Limusa.