Estudio de la construcción de un fractal utilizando un sistema de funciones iteradas

Mariana Zamora, Alejandro Angulo
Gimnasio Vermont
mz1957@gimnasiovermont.edu.co, alejandro.angulo@gimnasiovermont.edu.co

La experiencia presentada en este documento surge de la realización de un estudio monográfico por parte de una estudiante de último grado en el marco del Programa del Diploma del Bachillerato Internacional. En tal estudio se abordó el constructo teórico "Sistema de Funciones Iteradas", que fue utilizado posteriormente para construir un fractal de creación propia utilizando un algoritmo computado en Excel.

Introducción

La experiencia comunicada en la ponencia surgió de la realización, por parte de la primera autora (estudiante de grado 11.°, supervisada por el segundo autor), de una monografía para el Programa del Diploma Bachillerato Internacional en el Colegio Gimnasio Vermont de Bogotá. El tema general de la monografía fue la geometría fractal; sin embargo, también se incluyeron elementos de otras áreas de la matemática como el algebra lineal y la probabilidad. Se exploró la pregunta: ¿cómo se puede utilizar un sistema de funciones iteradas para construir un fractal?, se realizó un estudio del concepto *sistema de funciones iteradas* y de enfoques de iteración. Finalmente, se creó un algoritmo computado en Excel para construir un fractal.

¿Qué es un fractal?

Un fractal es un objeto geométrico aparentemente irregular que exhibe el mismo tipo de estructura a toda escala, lo cual hace que muestre cierta *autosimilaridad*. El concepto fue propuesto por Mandelbrot en su libro "*Los objetos fractales*", como una forma de modelar matemáticamente objetos irregulares de la naturaleza. Mandelbrot lo define así:

Zamora, M. y Angulo, A. (2019). Estudio de la construcción de un fractal utilizando un sistema de funciones iteradas. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 297-305). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Conjunto u objeto fractal: Que tiene una forma, bien sea sumamente irregular, bien sumamente interrumpida o fragmentada y sigue siendo así a cualquier escala que se produzca el examen. (Mandelbrot, 1988, p.168).

ESTUDIO ACERCA DEL SISTEMA DE FUNCIONES ITERADAS

En la base de las técnicas para construir fractales, a diferentes escalas, está un sistema de funciones iteradas (SFI). Su comprensión implica estudiar las funciones que lo conforman. A continuación, una síntesis de tal estudio.

Transformaciones del SFI

Las funciones que componen un sistema de funciones iteradas son transformaciones en el espacio (en el caso de este estudio: $\mathbb{R}^2$). La herramienta matemática utilizada para su construcción es el álgebra lineal, por lo que las funciones son expresadas usando notación propia del espacio vectorial de matrices. El estudio se centró en tres transformaciones principales:

Rotación

$$R_\alpha(P) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} [P]$$

Donde α es el ángulo de rotación. Es necesario aclarar que esta se realiza tomando el origen del sistema de coordenadas como centro de rotación, relativa al eje x, en sentido positivo.

Escala

$$S_{k_1 k_2}(P) = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} [P]$$

En la que k_1 es el factor de escala en x y k_2 en y.

Cuando el factor de escala es igual para x y y, siendo k el factor de escala:

$$S_k(P) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} [P]$$

En un fractal, se deben realizar a escala copias de la figura inicial para que cumpla con la condición de autosimilaridad.

Traslación

La traslación, a diferencia de las dos transformaciones anteriores, no es una transformación lineal. Se realiza sumando un vector a una matriz: el vector (T).$T_{(x,y)}(P) = [P] + \begin{bmatrix} x & x & \cdots & x \\ y & y & \cdots & y \end{bmatrix}$

Para el vector que define la transformación:

$$T\begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \cdots & t_{1,j} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & \cdots & t_{2,j} \end{bmatrix}$$

Todos los elementos $1, j$ son iguales entre sí, y los elementos $2, j$ son iguales entre sí. Siendo j =1,2… n.

Al realizar una traslación sobre un conjunto de puntos P, la dimensión de la matriz que determina la traslación y la matriz que determina el conjunto deben ser iguales. Si se trabaja en $\mathbb{R}^2$ debe ser siempre de dimensión $2 \times n$.

Definición de transformaciones realizadas a un único punto.	Definición de transformaciones realizadas a un conjunto de puntos.
$T_{(x,y)}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $R_\alpha: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $S_k: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$	$T_{(x,y)}: E \longrightarrow E$ $R_\alpha: E \longrightarrow E$ $S_k: E \longrightarrow E$

Tabla 1. Definiciones formales de las funciones

Nota. E es el espacio de las matrices de dimensiones $(2\times n)$

Transformación afín como síntesis del SFI

Para construir el fractal se usó una transformación afín, que es aquella que recoge, en una sola, todas las transformaciones que se desean realizar. Como el producto de matrices cumple la propiedad asociativa, pero no la conmutativa, es muy importante el orden en el que se realizan las transformaciones (Kolman y Hill, 2006).

Al estudiar variados ejemplos, se llegó a una generalización de cómo se forma la transformación afín en la que el orden es rotación, escala y traslación:

$$T(P) = \left[\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}[P]\right] + \begin{bmatrix}e\\ f\end{bmatrix}$$

En la transformación afín, α es el ángulo de rotación, a y d son los factores de escala en x y y respectivamente, b y c son los desplazamientos en x y y para el sesgo, y $\begin{bmatrix}e\\ f\end{bmatrix}$ el vector de traslación.

Al realizar los productos entre matrices de las transformaciones lineales, se obtiene la transformación afín:

$$T(P) = \begin{bmatrix}a\cos\alpha - c\sin\alpha & b\cos\alpha - d\sin\alpha\\ a\sin\alpha + c\cos\alpha & b\sin\alpha + d\cos\alpha\end{bmatrix}[P] + \begin{bmatrix}e\\ f\end{bmatrix}$$

Para simplificar la matriz, cada uno de sus elementos fue representado por una letra de la siguiente manera: $T(P) = \begin{bmatrix}p & q\\ r & s\end{bmatrix}[P] + \begin{bmatrix}e\\ f\end{bmatrix}$

Se pudieron encontrar ecuaciones para los elementos de la matriz (2 x 2) en la transformación que conlleva una rotación con ángulo α definido e igual escala en x e y. $p = k\ \cos\alpha$; $q = -k\sin\alpha$; $r = k\sin\alpha$; $s = k\ \cos\alpha$

Enfoques de iteración

Como se dijo, un fractal es aquella figura que parte de una estructura básica y se repite a varias escalas; es precisamente la iteración de las transformaciones en el sistema la que "captura" algebraicamente la autosimilaridad del fractal.

Es importante comprender que para construir el fractal sería necesario realizar infinitas iteraciones, por lo que se dice que a medida que la cantidad de iteraciones va tendiendo a infinito, la imagen del fractal se va acercando a cómo luciría el fractal en sí; formalmente, de acuerdo con Barnsley (1993), $\lim\limits_{n\to\infty} T(\psi) = \phi$), en donde T es la transformación por aplicar, n es el número de iteraciones, y ϕ es el atractor (fractal) resultante, hecho que es fundamento del Teorema del Collage. El proceso de iterar las transformaciones del SFI se puede realizar a partir de dos enfoques: el determinista y el aleatorio (Rubiano, 2009).

Enfoque determinista

En este enfoque las iteraciones se realizan partiendo de un conjunto de puntos definidos al cual se aplican las transformaciones, lo que genera otro conjunto de puntos a los cuales es necesario aplicar las transformaciones nuevamente. Este proceso puede realizarse en un entorno de geometría dinámica como GeoGebra, pero requiere bastante tiempo lograr un número de iteraciones suficiente para apreciar el atractor. En este enfoque todas las repeticiones y ajustes se deben hacer mediante cálculos utilizando la transformación afín.

Enfoque aleatorio

Este enfoque plantea una forma diferente de realizar las iteraciones utilizando apoyo en otra rama de las matemáticas: se denomina aleatorio porque la iteración consiste en una aplicación aleatoria de las transformaciones dependiendo de las probabilidades que se les asignen (Adame, 2005).

En este enfoque la iteración sigue los siguientes pasos:

1. Se selecciona un punto inicial V_o de coordenadas (x_o, y_o)
2. Se le asigna a cada transformación del SFI una probabilidad $p_i > 0; i = 1,2 \ldots n$. Tal que: $p_1 + p_2 + \cdots p_n = 1$. Estas se refieren a la probabilidad de que se le aplique cada una de las transformaciones a un punto dado.
3. Se elige un número aleatorio r. Tal que $r \epsilon [0, 1)$
4. r y las probabilidades se relacionan de la siguiente manera:
   Si $0 \leq r < p_1$entonces se aplica la primera transformación $T_1(V_o) = V_1$
   Si $p_1 \leq r < p_1 + p_2$ entonces se aplica $T_2(V_o) = V_1$
   Si $p_2 \leq r < p_1 + p_2 + p_3$ entonces $T_3(V_o) = V_1$
   Si $p_{n-1} \leq r < p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n$ entonces se aplica la enésima transformación $T_n(V_o) = V_1$
5. Se traza el punto V_1, de coordenadas (x_1, y_1), y se realizan nuevamente los pasos 3 y 4 sobre V_1 manteniendo las probabilidades de las transformaciones para obtener V_2. Se realiza lo mismo i veces para obtener el punto V_i. Siendo i el número de iteraciones realizadas.

Para un fractal autosimilar en el que se quiere que los puntos se distribuyan de forma uniforme, la asignación de probabilidades a las transformaciones debe ser uniforme. De lo contrario, se generarán más puntos asociados a la transformación con una mayor probabilidad asignada.

LA CONSTRUCCIÓN DE UN FRACTAL UTILIZANDO EL SISTEMA DE FUNCIONES ITERADAS

Para el fractal construido en este estudio, la estructura básica de la cual se partió fue un segmento que se transformó en tres, los cuales medían la mitad del segmento inicial, como se muestra en la figura 1.

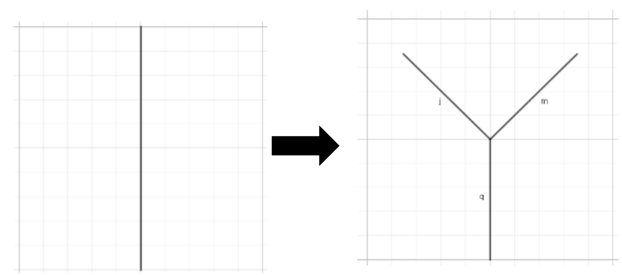

Figura 1. Semilla del fractal

Es necesario distinguir tres transformaciones: la Transformación 1 es la que resulta en el segmento 1 (representado con la letra q en la imagen); la Transformación 2 en el 2 (representado con la letra j); y la Transformación 3 en el 3 (representado con la letra m). Para construir la figura mostrada se realizó una escala a un factor de $\frac{1}{2}$ para todos los segmentos. Para el segmento 2 y 3 se realizaron rotaciones de $45°$ y $-45°$ respectivamente, además de una traslación de $\frac{1}{2}$ en el eje y.

Para hallar los elementos de cada transformación afín que a su vez representan las "partes" del fractal, se utilizaron las ecuaciones encontradas anteriormente.

Transformaciones	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{f}$
T_1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
T_2	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
T_3	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	0	$\frac{1}{2}$

Tabla 2. Transformaciones afines del fractal a construir

Inicialmente, se desarrolló una aproximación determinista a la iteración del SFI usando Geogebra. Para ello se creó una "macro", una herramienta nueva que generara la iteración del SFI, pero se requieren dos puntos cada vez que se va a realizar una iteración, así toma bastante tiempo producir una imagen como la de la figura 2.

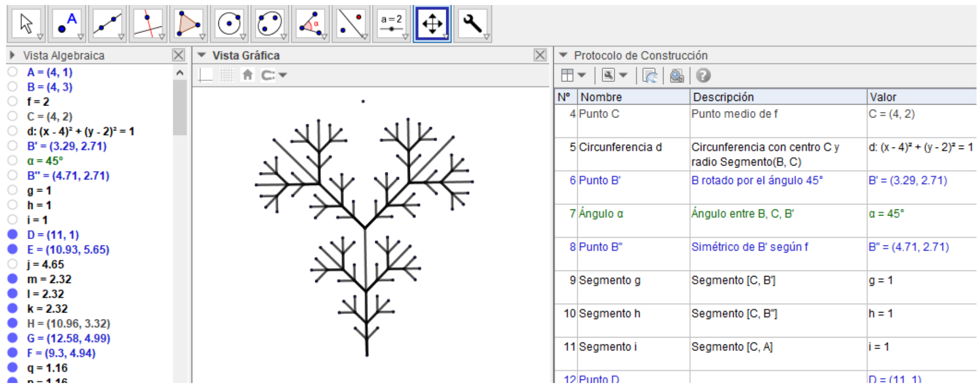

Figura 2. Imagen después de 5 iteraciones del SFI en el entorno de Geogebra

Por lo anterior, se decidió utilizar el enfoque aleatorio para realizar las iteraciones con apoyo en Excel como herramienta de computo. Para llevarlo a cabo fue necesario utilizar dos funciones del programa: *ALEATORIO* y *SI*. Para poder comprender cómo se utilizó la función *SI,* es necesario reconocer que: $x' = \big(p(x_o) + q(y_o)\big) + e$, así como $y' = \big(r(x_o) + s(y_o)\big) + f$ Siendo p, q, r, s, e y f los elementos de la transformación afín realizada y (x_o, y_o) las coordenadas del punto al cual se le realiza la transformación.

Debido a que eran tres transformaciones y la asignación de probabilidades se realizó de manera uniforme, cada una tuvo una probabilidad de $\frac{1}{3}$ de ser aplicada.

Se crearon funciones en Excel para obtener las coordenadas de x' y y' partiendo desde un punto inicial aleatorio. Las funciones realizan una búsqueda en tres intervalos: $\left[0, \frac{1}{3}\right)$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, o $\left[\frac{2}{3}, 1\right)$, para encontrar a cuál pertenece el número aleatorio, y basado en el rango al cual pertenece, realiza la transformación correspondiente.

Las funciones se utilizaron para obtener 10000 puntos y se realizaron gráficos de dispersión representando el fractal construido con 4996, 7000 y 10000 puntos como se muestra a continuación.

4996 puntos	7000 puntos	1000 puntos
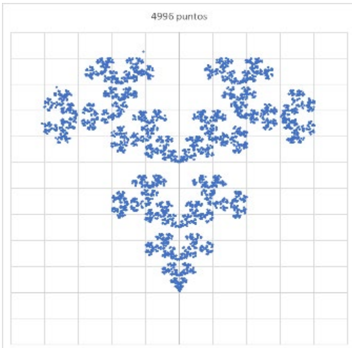	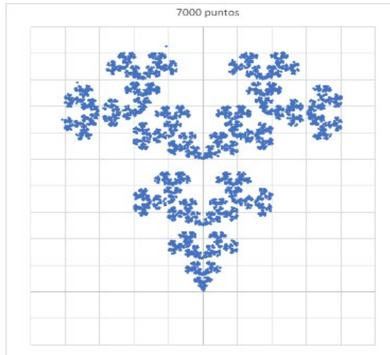	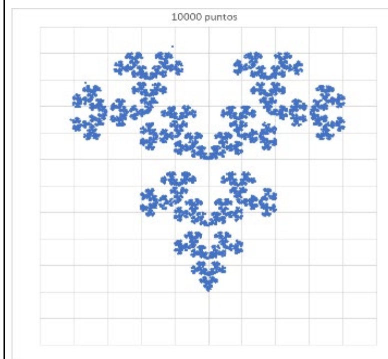
Figura 3. Gráficos generados en Excel del algoritmo de iteración aleatoria		

CONCLUSIONES

El estudio de cada parte del SFI permitió que se alcanzara una buena comprensión de la fórmula de Excel que permitió modelar el fractal.

El tema trabajado es relativamente nuevo tanto para el mundo de las matemáticas como para su autora, lo que fue un componente muy interesante de la investigación. Por un lado, la bibliografía utilizada fue, en su mayoría, escrita por los matemáticos que trabajaron por primera vez esta área lo que permitió que la investigación fuera más cercana a su perspectiva. Por otro lado, al ser un tema trabajado durante poco tiempo, para alcanzar una amplia comprensión fue necesario estudiar a fondo nuevos conceptos y familiarizarse con una geometría distinta a la trabajada comúnmente en sus cursos de matemática del colegio.

El papel de la tecnología en la investigación fue muy importante, pues permitió que se pudiera construir el fractal de una manera más rápida, y que se pudiera representar una gran cantidad de puntos.

REFERENCIAS

Adame S., E. A. (2005). *Sistemas de funciones iteradas y los fractales*. Bogotá: Fundación Universitaria Konrad Lorenz.

Barnsley, M. (1993). Fractals Everywhere. San Francisco: Morgan Kaufmann.

Kolman, B., y Hill, D. R. (2006). *Álgebra Lineal*. (Octava edición). Ciudad de México: Pearson Educación de México.

Mandelbrot, B. (1988). *Los objetos fractales*. Barcelona: Libros para pensar la ciencia.

Rubiano, G. (2009). *Iteración y fractales*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.