

Caracterización de elementos para la enseñanza de la esperanza matemática asociada a juegos equitativos

José Miguel León⁵⁴

Diego Díaz⁵⁵

Resumen

El problema de investigación consistió en caracterizar algunos elementos que subyacen a la Esperanza Matemática y los juegos equitativos⁵⁶, aporta herramientas para la enseñanza de este concepto en el aula de clases. Para abordar esta problemática, el objetivo principal fue delimitar los elementos asociados a la Esperanza Matemática, a partir de una evaluación de conocimientos a estudiantes de séptimo semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, tomando como marco de referencia para el análisis el *Conocimiento común del Contenido* propuesto por Shulman (1987). La principal conclusión que arroja esta investigación hasta el momento es la necesidad de reforzar la formación de futuros profesores en juegos equitativos, tanto en su conocimiento matemático, como en su conocimiento pedagógico.

Palabras Clave

Esperanza matemática; juegos de azar; enseñanza; didáctica, historia.

⁵⁴ Estudiante de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas Universidad del Valle - Cali jose.leon@correounivalle.edu.co

⁵⁵ Docente de Estadística y Probabilidad Universidad del Valle; Mg. en Educación Matemática diegodenog@yahoo.com

⁵⁶ Se define juego equitativo como un evento aleatorio que proporciona iguales opciones para ganar a todos los jugadores. Según Cañizares et al (1999) existen dos formas de establecer cuándo es un juego equitativo: el primer caso es comprobar si un evento aleatorio con un mismo premio todos los jugadores poseen las mismas probabilidades de ganar, en un segundo caso se calcula la esperanza matemática del evento y si su resultado es cero se puede afirmar que es un juego equitativo.

Problema de investigación

Se pretende mostrar mediante esta comunicación breve, los desarrollos que se han realizado sobre la propuesta de trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle. Específicamente esta propuesta trata de realizar una caracterización de algunos de los elementos más importantes en la enseñanza de la Esperanza Matemática asociada a los juegos de azar; se mostrarán cuáles fueron los elementos históricos que posibilitaron el surgimiento y evolución de la Esperanza Matemática a través de los años, también los elementos curriculares nacionales e internacionales que inciden en enseñanza de la Esperanza Matemática en el aula de clases; y por último reflexionar acerca de los elementos didácticos que se han propuesto para planear, organizar y evaluar la esperanza matemática y los juegos equitativos en el aula en nivel superior.

Históricamente los juegos de azar han sido y son una de las principales formas de recreación que posee el ser humano, motivado por el riesgo y la incertidumbre, el sujeto guarda gran expectativa en los juegos de azar para que su apuesta salga favorecida y ganar, en general, grandes sumas de dinero. En el territorio colombiano, la cultura de los juegos de azar, ha estado desde hace tiempo arraigada en los ciudadanos, hasta tal punto que se han popularizado creencias triviales sobre la favorabilidad del azar y se han establecido relaciones con factores divinos o espirituales, los cuales, en su juicio, permiten considerar que la apuesta que se realiza es prácticamente segura. (Guea et al; 2016)

El impacto que han generado los juegos de azar en la sociedad colombiana es de niveles desproporcionados, debido a que día a día son más las personas que se sumergen al mundo de las apuestas y el azar. De acuerdo con el último censo de Caracterización del Jugador realizado por Coljuegos en el año 2015, en Colombia el 60% de la población mayor de 18 años son jugadores de Juegos de Suerte y Azar (JSA) y Apuestas; también se evidencia en sus resultados que los juegos de más preferencia en el país son las loterías, acaparando cerca del 90% de las apuestas que se realizan. A partir de este estudio se ha podido mostrar que el fenómeno de los juegos de azar es un problema social que está en crecimiento exponencial, y es de sumo interés abordarlo lo más pronto posible.

Según Investigaciones como Contreras et al (1999); Ortiz, Batanero y Contreras (2012), Guea et al (2016) y Cañizares et al (1999); el apostador desde su niñez posee ideas intuitivas sobre probabilidad y juegos de azar, dada su experiencia en eventos aleatorios que están a su alrededor; sin embargo, se hacen explícitas en estas investigaciones que la falta de razonamiento probabilístico en los estudiantes genera errores y dificultades alrededor de los juegos de azar. Por esta razón se hace de sumo interés efectuar una investigación que aborde los juegos de azar desde una perspectiva educativa, buscando caracterizar elementos para su enseñanza y contribuyendo hacia la toma de decisiones en ambientes de incertidumbre por parte de los estudiantes, no para fomentar la participación en estos juegos, sino más bien con el objetivo de subsanar o reducir aquellas creencias triviales arriba mencionadas.

Si bien es cierto, en la actualidad existen diversas investigaciones en torno a la enseñanza y el aprendizaje de conceptos probabilísticos, pero son pocas las que se han centrado en responder cuestiones relacionadas a la justicia de los juegos de azar y Esperanza Matemática desde un contexto educativo (Guerrero, 2015). En esta comunicación se hace énfasis en tres tipos de antecedentes: los referentes a los estudios históricos sobre la esperanza matemática o juegos equitativos; las investigaciones curriculares en torno a la enseñanza y el aprendizaje de conceptos estocásticos, y las investigaciones didácticas en torno a la enseñanza de la esperanza matemática y juegos equitativos. Se puede referenciar algunos de los aspectos históricos de la Esperanza Matemática que están consignados en el proyecto de grado de maestría titulado *Análisis Histórico-Epistemológico del surgimiento de la Esperanza Matemática*, elaborada por Díaz (2012); este trabajo tiene como propósito investigar la constitución de la Esperanza Matemática como método de justificación en la solución de problemas del siglo XVII. Esta investigación es un antecedente principal para la realización de esta comunicación, dado que permite vislumbrar a través de la historia el surgimiento, evolución, problemas y alcances de la Esperanza Matemática; además la utilización de los elementos histórico-epistemológicos en una perspectiva didáctica permite, en cierto modo, construir actividades para la enseñanza para generar una identidad y tratamiento de objetos estocásticos como la Esperanza Matemática.

Para los antecedentes curriculares se toma en consideración un artículo publicado en la revista UNO titulado: *El currículo de estadística: Reflexiones desde una*

perspectiva internacional, elaborado por Batanero, Arteaga y Serrano en el año 2011. Dicho artículo da cuenta de la necesidad de un cambio en el currículo de matemáticas español que apunte hacia la alfabetización y formación de ciudadanos competentes en torno a los contenidos de estadística y probabilidad; para ello, los autores proponen analizar los contenidos de los Decretos de Enseñanzas Mínimas (ESO, 2006) tomando como referencia los currículos y proyectos internacionales como NCTM (2000), Proyecto GAISE, entre otros.

Para los antecedentes didácticos tomamos como referencia a Cañizales, Batanero y Ortiz (1999); Guea et al (2016); Ortiz, Batanero y Contreras (2012). En esta comunicación breve se resalta la pertinencia de la tesis de maestría realizada por Guerrero (2015), titulada: *Evaluación de Conocimientos sobre Esperanza Matemática y juegos equitativos en alumnos de bachillerato*. Se resalta las estrategias de utilizar juegos equitativos para promover el aprendizaje de la probabilidad, la Esperanza Matemática y las variables aleatorias; para ello propone un estudio exploratorio utilizando un cuestionario de investigación que permita evaluar los conocimientos de los estudiantes, esto con el fin de identificar las intuiciones y competencias desarrolladas en su etapa escolar. En conclusión, este antecedente contribuye sustancialmente a identificar los elementos didácticos para la enseñanza de la Esperanza Matemática asociada a los juegos educativos, dado que identifica los errores de los estudiantes al establecer si un juego de azar es equitativo.

Materiales y métodos

Este trabajo tiene como finalidad reconocer elementos para la enseñanza de la Esperanza Matemática asociada a los juegos equitativos. Se pretende mostrar los resultados y análisis de una prueba piloto a 18 estudiantes de los programas de Licenciatura en Matemáticas y Física y Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de séptimo semestre (7) de la Universidad del Valle, que muestren las dificultades y errores, y así caracterizar los elementos subyacentes a la Esperanza Matemática y su enseñanza. La realización de este cuestionario toma en consideración preguntas planteadas en Guerrero (2015) y Mohamed y Ortiz (2011). Por otro lado, el análisis del cuestionario, toma en consideración el marco teórico propuesto por Shulman (1986) que denomina Conocimiento Didáctico del Contenido, evaluando específicamente el Conocimiento Común del Contenido. A continuación un par de preguntas del instrumento utilizado. Cabe aclarar que las preguntas han sido adaptadas según el contexto de los participantes.

Pregunta 1: Juan y Sebastián juegan con un dado ordinario de la siguiente manera: Juan gana \$1000 si el número obtenido es 1, 2, 3, 4. Si el número es 5 o 6 Sebastián gana \$3000. Responde: a) ¿Quién obtendrá más dinero si juegan 30 veces seguidas? ¿Por qué? b) Si ambos deciden jugar 50 veces seguidas, ¿cuánto dinero se pensaría que ganaría quien tenga ventaja en el juego?

Pregunta 3: Carmen y Daniel han inventado un juego de dados con las siguientes reglas: Lanzan dos dados y calculan la diferencia de puntos entre el mayor y el menor. Si resulta una diferencia de 0, 1 o 2, entonces Carmen gana \$1000. Si resultan 3, 4, o 5 es Daniel quien gana \$1000. Responde: ¿Es un juego es equitativo? ¿Por qué?; ¿Si tuvieras un poder para modificar el juego a tu parecer, cómo lo harías?

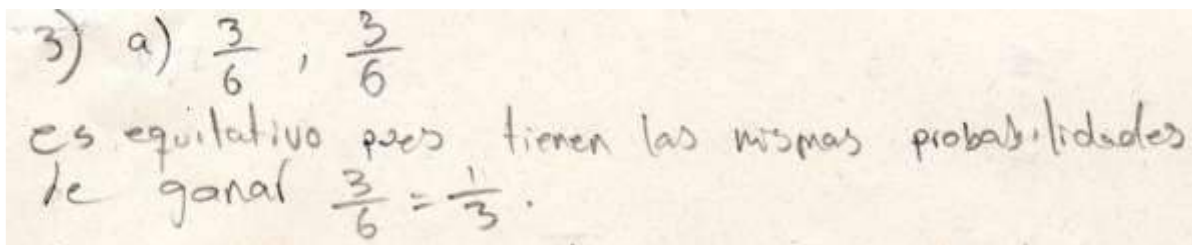
Análisis y resultados

En los resultados de la prueba aplicada se ha podido evidenciar que:

- El 57% de los estudiantes respondió correctamente la Pregunta #1, en cambio en la Pregunta #2 solo el 26% respondió correctamente⁵⁷, y por último en la Pregunta #3 solo lo hizo 12% de los estudiantes.
- El 90% de estudiantes comprende acertadamente la idea de juegos equitativos, esto ha quedado reflejado en las repuestas de la pregunta 1, sin embargo a pesar de comprender la idea de juegos equitativos se analiza que existen distintos factores como sesgos de equiprobabilidad, dificultad para calcular espacios muestrales, entre otras., que impiden categorizar algunas de las respuestas como correctas.
- El 24% de los estudiantes utilizó la Esperanza Matemática como método de solución para calcular un juego justo.

⁵⁷ De manera general se categorizaron respuestas correctas aquellas que realizaran los cálculos correspondientes utilizando correctamente la esperanza matemática u otros objetos matemáticos. Sin embargo, es de especial importancia para la prueba analizar los argumentos e interpretaciones a los resultados, dado que es insumo principal para estimar la comprensión de este concepto por parte de los estudiantes.

- En la solución de la pregunta #2, solo el 32% de los estudiantes pudo encontrar todos los casos posibles al lanzar dos dados y hacer la diferencia entre el mayor y el menor; lo cual era necesario para resolver la pregunta.
- El 21% de los estudiantes no justifica sus afirmaciones con bases matemáticas, traen a colación aspectos como la participación de varios jugadores, que poco tienen que ver con la solución del problema planteado. A continuación podremos ver un ejemplo de este resultado, en donde el estudiante a través de la definición intuitiva de probabilidad hace una estimación incorrecta sobre la equitatividad del juego.



3) a) $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{6}$
 es equitativo pues tienen las mismas probabilidades
 de ganar $\frac{3}{6} = \frac{1}{3}$.

Conclusiones principales

A la luz de los resultados y sus análisis de la prueba realizada ha proporcionado información de sumo interés, permitiendo identificar algunas dificultades y limitaciones de los estudiantes en torno a la enseñanza de la Esperanza Matemática y juegos equitativos. En particular, se concluye que:

- La mayoría de estudiantes, poco toma en consideración el concepto de utilidad⁵⁸ en el momento de determinar cuándo un juego de azar es equitativo a través de su esperanza, siendo este un objeto estadístico primordial para establecer el monto entre ganancias y pérdidas a largo plazo.
- Los estudiantes, al igual en que investigaciones como Cañizares, et al (1999); Mohamed, et al. (2013) tienden a utilizar razonamientos proporcionales⁵⁹ para establecer juegos equitativos.
- Si bien los estudiantes analizados previamente han sido instruidos en la Esperanza Matemática, se hace explícito que poseen limitaciones en interpretar los resultados numéricos de este concepto, evidenciando notoriamente problemas de significación y conceptualización.

Referencias bibliográficas

Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. (2011). El currículo de estadística: Reflexiones desde una perspectiva internacional. UNO, 59, 9-17.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L., & Ortiz, J. J. (1999). Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños. Números 37, 37-56.

⁵⁸ Se describe el término utilidad como la ventaja o provecho monetario que puede obtener un jugador al momento de realizar n apuestas.

⁵⁹ Se define razonamiento proporcional como aquel que por medio de teoría de la proporcionalidad permite establecer la razón o relación entre dos magnitudes medibles; para este caso el establecer cuándo un juego es equitativo sugiere comparar en la razón que existe entre las probabilidades de ganar con los premios a obtener.

- Coljuegos, (2015). Caracterización del jugador colombiano de JSA – Jugadores. Bogotá – Colombia.
- Díaz, D. (2012). Análisis Histórico-Epistemológico del surgimiento de la Esperanza Matemática. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.
- Guerrero, H. (2015). Evaluación de Conocimientos sobre Esperanza para y juegos equitativos en alumnos de Bachillerato. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Guea, M; Fernandes J; Batanero, C. (2016). Intuición sobre el azar: Análisis de una experiencia aleatoria con alumnos de Educación primaria. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Mohamed, N; Ortiz, L; Serrano L. (2013). Evaluación del conocimiento sobre juegos equitativo en futuros profesores. Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada.
- National Council of Teacher of Mathematics. (2000). Principles and standards for math's school.
- Ortiz, J; Batanero, C; Contreras, C. (2012). Conocimiento de profesores en formación sobre la idea de juego equitativo. RELIME, México, v. 15, n. 1, p. 63-91, 2012.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher 15 4-1.