UN ESTUDIO SEMIÓTICO DEL RAZONAMIENTO COMBINATORIO EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

RAFAEL ROA

CARMEN BATANERO

Universidad de Granada

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE
INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Almería, Septiembre 2001

UN ESTUDIO SEMIÓTICO DEL RAZONAMIENTO COMBINATORIO EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

❧

RAFAEL ROA
CARMEN BATANERO
Universidad de Granada

RESUMEN

En esta comunicación analizamos los procesos de resolución de problemas combinatorios simples por parte de alumnos con alta preparación matemática. Nuestro análisis muestra la complejidad de la actividad matemática, incluso elemental, que implica objetos de diferente naturaleza (ostensivos, extensivos, actuativos, intensivos y validativos) puestos en relación en una cadena de procesos semióticos.

ABSTRACT

In this paper we analyse the processes of solving simple combinatorial problems by students with advanced mathematical training. Our analysis show the complexity of even elemental mathematical activity, implying different types of objects (ostensive, extensive, actuative, intensive and validative), which should be related in a chain of semiotic processes.

Según Inhelder y Piaget (1955), el razonamiento combinatorio se desarrolla en el período de las operaciones formales. Sin embargo, Fischbein y Grossman (1997) analizaron los esquemas subyacentes en las estimaciones intuitivas de los adultos del valor de las operaciones combinatorias, observando que se sustituye el conjunto requerido de operaciones por operaciones binarias. Marchand (1994) indica que muchos adultos no llegan a alcanzar un razonamiento combinatorio completo. Navarro-Pelayo (1994) analizó el razonamiento de alumnos de secundaria con y sin instrucción, mostrando una dificultad generalizada en la resolución de los problemas (Navarro-Pelayo, Batanero y Godino, 1996; Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1997 a, b).

En este trabajo analizamos la resolución de problemas combinatorios por alumnos con alta preparación matemática, para aportar una explicación semiótica de los errores cometidos.

EL ESTUDIO

El cuestionario contiene 11 problemas simples (ítems 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12 y 13) tomados de Navarro-Pelayo (1994), que se dividen, según la clasificación de Dubois (1984) en tres esquemas: Selección (ítems 1, 6, 11 y 13), que enfatiza la idea de muestreo, colocación (ítems 3, 8, 9 y 12), relacionado con la idea de aplicación y partición de un conjunto en subconjuntos (ítems 4, 5 y 10). Además de estos problemas, en los que tenemos en cuenta las diferentes operaciones combinatorias, tipo de elementos y tamaño de las soluciones, hemos incluido dos problemas combinatorios compuestos (problemas 2 y 7), tomados de Gascón (1988).

La muestra estuvo compuesta por 120 alumnos de la Licenciatura de Matemáticas, Universidad de Granada; 29 de 4º curso, especialidad Metodología, 78 de 5º curso de la misma especialidad y 13 de 5º curso, especialidad de Estadística. En la Tabla 1 presentamos los porcentajes de soluciones correctas, comparándolos con los obtenidos por Navarro-Pelayo (1994). Los resultados en algunos problemas son similares a los de los alumnos de secundaria con instrucción. El número medio de respuestas correctas fue 5.5.

Para explicar esta dificultad, se llevó a cabo un estudio cualitativo con cuatro alumnos. Preveíamos dos tipos de razonamiento: a) El del estudiante que recuerda las definiciones de las operaciones combinatorias y sabe aplicarlas a los problemas propuestos; b) El del alumno que ha olvidado estas definiciones o no sabe aplicarlas y recurre a otras estrategias. Para cada uno de estos tipos seleccionamos un estudiante con buenos resultados y otro con dificultades en la resolución de problemas.

Tabla 1. Porcentaje de soluciones correctas en cada problema del cuestionario

	Grupo de alumnos		
Problema	Secundaria sin instrucción (n=352)	Secundaria con instrucción (n=368)	Licenciatura de Matemáticas (n=120)
1	16.3	27.6	50.0
2			48.6
3	26.9	26.7	70.7
4	0.3	6.0	9.3
5	32.3	39.2	60.1
6	22.6	46.0	60.5
7			8.7
8	3.8	41.8	45.9
9	13.1	7.4	33.6
10	31.0	37.2	64.5
11	12.5	59.1	41.9
12	10.6	29.5	35.1
13	9.5	59.7	53.8

ANÁLISIS SEMIÓTICO DEL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Para analizar los procesos de resolución de los problemas a partir de los textos producidos por los estudiantes, complementados con entrevistas, aplicamos el modelo de Godino (Godino, 1998; Godino y Batanero, 1999) que considera los siguientes tipos de objetos en la actividad matemática:

- *Extensivas:* situaciones-problemas, aplicaciones;
- *Ostensivas:* términos, símbolos, gráficos;
- *Actuativas*: técnicas, estrategias, algoritmos, operaciones;
- *Intensivas*: ideas matemáticas, conceptos, propiedades;
- *Validativas:* demostraciones, comprobaciones, justificaciones.

El protocolo de resolución de cada alumno y cada problema fue dividido en unidades de análisis para identificar las entidades descritas. En lo que sigue ejemplificamos el análisis realizado con el problema 4.

Problema 4: Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (Azul, Blanco, Verde y Rojo) y decide repartírselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede repartir los coches a sus hermanos? Ejemplo: Podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.

Identificamos el esquema de partición (dividir el conjunto de coches en varios subconjuntos, para darlos a uno, dos o tres de los hermanos). Para encontrar la operación combinatoria que resuelve el problema, hay que traducir el enunciado al esquema de selección. Repartir los coches a los chicos equivale a seleccionar cuál hermano se quedará con cada coche. Se puede seleccionar una persona más de una vez (para recibir más de un coche) y el orden es importante (indica el color del coche a recibir). La solución es $VR_{3,4}$. A continuación analizamos el proceso de resolución del problema para cada estudiante.

Caso 1. Adolfo

Fue el único estudiante de la muestra que resolvió correctamente los 13 problemas, y nunca usó las fórmulas. No estudió combinatoria en bachillerato, aunque sí en la licenciatura. No recordaba las fórmulas combinatorias. Al analizar el proceso (correcto; Figura 1), observamos que interpreta el problema según el esquema de partición.

Adolfo necesita objetos *ostensivos* para representar los datos (el numeral 4, letras para los objetos), acciones (las palabras "da" y "repartir", el símbolo +), y los resultados (disposiciones tabulares para los posibles repartos). Aplica algoritmos (enumeración sistemática) y estrategias (fijar variables); son los elementos *actuativos.* Por ejemplo, en el caso 2, fija el número de coches que recibe cada una de las dos personas, que puede ser 3 y 1, 2 y 2 ó 1 y 3. Resuelve el conjunto relacionado de subproblemas mediante recursión (para producir la permutación de los objetos a repartir). En cada subproblema aplica la enumeración sistemática.

Durante la resolución Adolfo plantea nuevos problemas (*elementos extensivos)* relacionados con el dado, aunque de menor complejidad. En los pasos U1, U2 y U6 descompone el problema en subproblemas: repartir los 4 coches dando todos al mismo hermano (caso 1), a dos de los hermanos (caso 2) y a los tres hermanos (caso 3).

Aplica propiedades e ideas matemáticas (*elementos intensivos*), como la regla de la suma (U9). Por último realiza argumentaciones (*Validativas)* para justificar los pasos que sigue. En U2 generaliza la igualdad del número de formas de repartir los coches entre dos hermanos. También usa la generalización en U4, U5 y U8. Resaltamos la complejidad de la solución de Adolfo, comparada con aplicar directamente la fórmula.

Figura 1. Solución de Adolfo

U1 Caso 1: a) Le da los 4 coches a Fernando; b) Le da los 4 coches a Luis; c) Le da los 4 coches a Teresa.
U2 *Caso 2: Da los 4 coches a 2 de sus hermanos. Veamos que posibilidades hay:*
A) a) Fernando y Luis b) Fernando y Luis c) Fernando y Luis
(3 c.) (1 c.) (2 c.) (2 c.) (1 c.) (3 c.)
ABV R AB VR análogo a a)
ABR V AV BR
ARV B AR VB
BRV A BV AR
BR AV
BR AB
Hay 4 formas Hay 6 formas"
U3 *Luego hay 14 formas diferentes de repartir entre Fernando y Luis.*
U4 *B)Análogamente hay 14 formas diferentes entre Fernando y Teresa.*
U5 *C)Análogamente hay 14 formas diferentes entre Luis y Teresa.*
U6 *Caso 3: Todos los hermanos tienen algún coche.*
A) Fernando 2, Luis 1, Teresa 1
AB V R
BV A R
AB R V
BV R A
AV B R
BR A V
AV R B
BR V A
AR B V
BR A B
AR V B
RV B A
U7 Luego el caso A) tiene 12 posibilidades
U8 Análogamente, el caso B) Luis 2, Fernando 1, Teresa 1 tiene 12 posibilidades
Análogamente, el caso C) Teresa 2, Fernando 1, Luis 1 tiene 12 posibilidade.
U9 Sumando todas las opciones tengo:
Caso 1 + caso 2 + caso 3 = 3 + (14+14+14) + (12+12+12) = 81 formas diferentes

Durante la resolución Adolfo plantea nuevos problemas (*elementos extensivos)* relacionados con el dado, aunque de menor complejidad. En los pasos U1, U2 y U6 descompone el problema en subproblemas: repartir los 4 coches dando todos al mismo hermano (caso 1), a dos de los hermanos (caso 2) y a los tres hermanos (caso 3).

Aplica propiedades e ideas matemáticas (*elementos intensivos*), como la regla de la suma (U9). Por último realiza argumentaciones (*Validativas)* para justificar los pasos que sigue. En U2 generaliza la igualdad del número de formas de repartir los coches entre dos hermanos. También usa la generalización en U4, U5 y U8. Resaltamos la complejidad de la solución de Adolfo, comparada con aplicar directamente la fórmula.

Caso 2. Luisa

Estudió combinatoria en Bachillerato, y en la licenciatura. Recuerda las fórmulas combinatorias, aunque le costó reconstruir algunas, ya que aprendió las operaciones combinatorias con el esquema de selección. Resuelve 12 problemas correctamente, aplicando directamente las operaciones combinatorias traduciendo el enunciado al esquema de selección. El único problema que resuelve incorrectamente es el 4, donde no supo traducir convenientemente para identificar la operación combinatoria. En la Figura 2 transcribimos su solución.

Figura 2. Solución de Luisa

U1	*A, B, V, R*
U2	*Hay que tener en cuenta que los coches son distinguibles*
U3	*Casos: Que le de a uno solo los 4 coches: 4 posibilidades*
U4	*Que le de a uno 3 coches:* $4.C_4^3$
U5	*Que le de a uno 2 coches y a otro otros 2:* $C_4^2 . 4 . 3$
U6	*Que le de a uno 2 coches y a cada uno de los otros 2 un coche:* $C_4^2 . 4 . C_3^2$
U7	*Que le de uno a cada uno:* P_4
U8	*Se suman todas las posibilidades*
U9	*F L T: 4 0 0, 3 1 0, 3 0 1, 2 1 1, 2 2 0, 2 0 2, 1 3 0, 1 2 1* *1 1 2, 1 0 3, 0 4 0, 0 0 4, 0 3 1, 0 2 2, 0 1 3*

U1: Luisa interpreta los datos e introduce una notación simbólica para los elementos a repartir (ostensivo).

U2: Reconoce que los objetos a repartir son distinguibles (intensivo)

U3-U7: Descompone el problema en subproblemas. Resuelve un problema auxiliar (extensivo): enumerar las particiones del número cuatro, usando la enumeración sistemática (actuativo). No traduce el enunciado del problema, sino usa el esquema de partición.

U3: Confunde el número de hermanos (3) y considera 4 niños en el reparto. Seguiremos la resolución del problema, admitiendo como correcto que hay cuatro niños.

U4: Hay que seleccionar el niño al que se dará el coche (4 casos según la interpretación dada) y los coches que se darán C_4^3. Aplica la idea de combinación (elección de 3 objetos entre 4 dados, sin que el orden sea relevante), dando un valor adecuado a los parámetros. Identifica y aplica correctamente la regla del producto (intensivo).

U5: Aplica la regla del producto y la idea de combinación C_4^2 (elegir 2 coches entre cuatro); usa la recursión; para elegir el primer niño hay 4 casos y para el segundo sólo quedan 3. Aplica la propiedad $C_m^n = C_m^{m-n}$ *(intensivos).*

U6: Razonamiento similar, aunque ahora produce un error; para elegir los dos coches que dará a uno de los hermanos usa correctamente la idea de combinación C_4^2; es correcto el número de posibilidades de elegir al niño (4 casos); pero para elegir a los otros dos niños a los que dará los coches restantes, confunde la operación combinatoria que debe ser variaciones, ya que los coches son distinguibles. La alumna usa la notación de las combinaciones (ostensivo).

U7: Idea de permutación (intensivo) y su notación (ostensivo) que estarían correctamente aplicadas si hay 4 niños en el reparto.

U8: Aplica la regla de la suma (intensivo).

U9: La alumna trata de comprobar su solución (validativo), y calcular el número total de casos, que no aparece en los pasos anteriores. Usa una disposición tabular (ostensivo), y enumera las descomposiciones del número 4 en sumandos para analizar el número de coches a repartir (actuativo). La enumeración no es sistemática, ni consistente con la interpretación de que hay cuatro niños, y que los coches son distinguibles. Solo tiene en cuenta el número de coches que recibe cada chico.

Caso 3. Pedro

Hizo una prueba deficiente (sólo resuelve correctamente 5 problemas). Estudió combinatoria en bachillerato y en la licenciatura. Tiene inseguridad en las definiciones de las operaciones combinatorias y no recuerda las fórmulas. Resuelve los problemas enumerando. Reproducimos su solución en la Figura 3.

Figura 3. Solución de Pedro.

U1	*400-040- 004*
	301-130- 013-310-03-103
	220-022-202
	121- 211-112

Pedro introduce una notación para el número de coches a repartir, pero no tiene en cuenta quien los recibe. Usa el esquema de partición, puesto que usa grupos de tres dígitos para representar el número de coches que recibe cada hermano. Descompone correctamente el número 4 en tres sumandos, pero considera indistinguibles tanto los objetos como los conjuntos de la partición.

Caso 4. Juan

Recuerda las definiciones de las operaciones combinatorias y trata de resolver todos los problemas con ellas, aunque sólo resuelve cuatro correctamente (Figura 4).

Figura 4. Solución de Juan

U1	*A, B, V, R Fer., Luis, Ter.*
U2	*Cuenta el orden y la naturaleza de los elementos (el orden va a ser necesario para tener en cuenta cual coche se lleva cada hermano, es decir, es distinto que le toque a*
U3	*un hermano el coche verde que el azul) y, por tanto:*
	$V_{4,3} = 4!/(4\text{-}3)! = 4!/1! = 24$ *maneras posibles.*

U1: Introduce una doble notación para designar los datos del problema (ostensivos).

U2: Intenta resolver el problema aplicando el esquema de selección, que estudió en las definición de las operaciones combinatorias. Trata de traducir el problema (extensivo). Traduce la condición de ser coches distintos por tener en cuenta el orden (intensivo).

U3: Reconocimiento incorrecto de la operación combinatoria (intensivo), ya que no identifica la repetición. Identificación incorrecta de los parámetros, ya que al traducir al esquema de selección los parámetros se intercambian entre si (intensivo). Fórmula mal desarrollada.

CONCLUSIONES

Nuestro análisis identifica los elementos puestos en juego correcta o incorrectamente por los alumnos al resolver el problema, y muestran la complejidad de este problema, aparentemente sencillo, y la diversidad de estilos de resolución de los alumnos. Sólo Juan aplica directamente la definición de operaciones combinatorias que estudió mediante el esquema de selección, mediante una regla nemotécnica (importa-no importa el orden; hay o no repetición). Regla que es improductiva en los problemas que se presentan en un esquema diferente (partición o colocación) si el alumno es incapaz de traducir el problema al modelo de selección.

Si no identifica la operación combinatoria directamente; el alumno divide el problema en otros relacionados con el dado, planteando la partición del número cuatro en sumandos (Adolfo, Luisa y Pedro). Sólo Adolfo plantea correctamente todos los subproblemas requeridos. Fallos relacionados con la persona que recibe los objetos (Pedro) y los objetos a repartir (Luisa y Pedro), llevan a una solución incorrecta.

Los alumnos realizan diferentes tipos de acciones. Una primera es traducir el enunciado al modelo de selección que sólo realiza Juan de forma incorrecta. El resto de los alumnos recurre a la enumeración, que en Luisa no es sistemática. Adolfo y Luisa fijan con éxito valores de las variables para enunciar problemas más sencillo. Mientras Adolfo resuelve correctamente la serie de problemas generados recursivamente Luisa trata de resolver los pasos intermedios con fórmulas, pero comete errores. Juan identifica y desarrolla incorrectamente la operación combinatoria.

Para representan los conceptos y datos con los que trabajan, usan simbolización algebraica o numérica, disposiciones tabulares, expresión de la fórmulas combinatorias, y sus parámetros, expresión de las reglas de la suma producto y cociente y de las operaciones aritméticas. También en este caso hay errores.

Los alumnos usan ideas y propiedades combinatorias que varían con la solución. Sólo Juan usa elementos del esquema de selección (incorrectamente), mientras los otros usan elementos del esquema de partición. Sólo Adolfo identifica correctamente las condiciones del esquema dadas en el enunciado. Adolfo y Luisa ligan correctamente soluciones parciales con la regla de la suma y Luisa usa una propiedad de los números combinatorios. Finalmente los alumnos usan elementos validativos como la generalización correcta (Adolfo), la enumeración (Luisa) y justificación de las condiciones del esquema (Juan) en estos dos últimos casos incorrectamente.

En nuestro modelo teórico concebimos la evaluación de la comprensión como el estudio de la correspondencia entre los significados personales e institucionales, en este caso la correspondencia entre el significado de los conceptos combinatorios para estos alumnos y el que recibieron durante sus estudios, donde las operaciones combinatorias fueron definidas en el esquema de selección y la principal actividad práctica fue la resolución de problemas directamente mediante la identificación de la operación combinatoria

El análisis de los protocolos, muestra que la resolución de los problemas requiere una diversidad de objetos que hemos explicitado. Aunque aquí presentamos el análisis de un solo problema, este proceso fue repetido con los 12 restantes, manifestando la variedad de elementos usados por los alumnos, que para cada uno de ellos constituye el *significado personal* de los conceptos combinatorios. En cada paso del proceso de resolución estos objetos se ponen en correspondencia. En la unidad U1 del protocolo de Pedro, observamos como asocia (pone en correspondencia) los coches a repartir y los niños con una notación "*A, B, V, R , Fer., Luis, Ter.*". Es decir, establece una función semiótica entre objetos ostensivos (expresiones) y objetos extensivos imaginados (contenido de la función semiótica).

Siguiendo a Godino y Batanero (1997), puede ser útil considerar un razonamiento matemático como una secuencia de funciones semióticas (o cadena de conocimientos puestos en relación) en el proceso de resolución de un problema por parte de un sujeto. Esto permite interpretar el *conocimiento* y la *comprensión* de un objeto, por parte de una persona, en términos de las funciones semióticas que pueden establecerse.

Agradecimientos: Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del Proyecto BSO2000-1507. MEC. Madrid

REFERENCIAS

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1997a). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 181-199.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1997 b). Assessing combinatorial reasoning. En I. Gal y J. Garfield (Eds.), *The assesment challenge in statistics education* (pp. 239-252). Amsterdam: International Statistical Institute. e I.O.S. Press.

Godino, J. D. (1998). Un modelo semiótico para el análisis de la actividad y la instrucción matemática. *VIII Congreso internacional de la Asociación Española de Semiótica.* Granada.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1997). A semiotic and anthropological approach to research in mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education Journal* 10 URL:http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome10/art7.htm

Godino, J. D. y Batanero, C. (1999). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En: I. Vale y J. Portela (Eds), *Actas IX Seminário de Investigaçao em Educaçao Matemática* (pp. 25-46). Guimaraes: Associaçao de Profesores de Matemática.

Dubois, J. G. (1984). Une systematique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics*, 15 (1), 37-57.

Fischbein, E. y Grossman, A. (1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 27-47.

Gascón, J. (1988). *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1955*). De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent. París:* Presses Universitaires de France.

Marchand, H. M. (1994). The resolution of two combinatorial tasks by mathematics teachers. *Proceedings of the 18 PME Conference*, Lisbon (Short oral presentation).

Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C. y Godino, J. D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de Bachillerato. *Educación Matemática*, 8(1), 26-39.