Reflexiones

Revista Colombiana
de Educación, N. 60.
Primer semestre 2011
Bogotá, Colombia.

El legado de Piaget a la didáctica de la Geometría

// Piaget's Legacy for Geometry Teaching

Leonor Camargo Uribe*

Recibido: 19-mar-11
Evaluado: 27-mar-11
Arbitrado: 20/06/11

* Docente Universidad Pedagógica Nacional, lcamargo@pedagogica.edu.co

Resumen

Como contribución al homenaje que se le rinde a Jean Piaget, a los treinta años de su fallecimiento, presentamos una revisión, que no pretende ser exhaustiva, de algunas de sus ideas y de cómo estas han sido germen de estudios posteriores relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría. Exponemos dos hipótesis centrales de los estudios de Piaget sobre el desarrollo de la concepción del espacio en los niños. Mostramos el punto de vista de Piaget acerca de la competencia que tienen los niños en tareas de: discriminar figuras geométricas, representar figuras geométricas, construir sistemas de referencia bi o tridimensionales y justificar afirmaciones sobre hechos geométricos. Al respecto de cada tarea, hacemos referencia a estudios posteriores, la mayoría hechos en el contexto escolar, que confirman las ideas de Piaget o sugieren una revisión de las mismas.

Palabras Clave

Piaget, didáctica de la Geometría, discriminación de formas geométricas, representación bi y tridimensional.

Abstract

As a contribution to the tribute of Jean Piaget's work 30 years after his decease, we offer a brief review of some of his ideas and how they have been the origin of later studies related to Geometry and learning-and-teaching processes. Two main Piaget hypotheses about development of space concept adopted by children are presented. Piaget´s point of view on children's competence for discriminating and representing geometric shapes, building two-and three-dimensional reference systems, and justifying statements about geometrical facts are also shown. For each task a reference is made regarding further studies, most of them in a school environment, which validate Piaget's ideas or suggest their review.

Keywords

Piaget, Geometry teaching, discrimination of geometric shapes, two-and three-dimensional representation.

Revista Colombiana de Educación N. 60
ISSN 0120-3916
Enero-julio de 2011

Introducción

La Didáctica de la Matemática es una disciplina joven. Su estatus científico se alcanzó a mediados de la década de los sesenta cuando empezaron a surgir departamentos de Didáctica de las Matemáticas en las universidades europeas y norteamericanas, publicaciones especializadas, encuentros entre profesionales del campo, etc. En particular, los albores de la Didáctica de la Geometría se ubican por la misma época y los trabajos de Jean Piaget marcan buena parte de su comienzo. Sus ideas acerca del desarrollo de la representación del espacio en los niños y de la manera como progresivamente organizan las ideas geométricas delinearon estudios investigativos encaminados a desarrollar el sentido espacial y el razonamiento de los estudiantes y condujeron trayectorias curriculares a partir de la época del setenta. La influencia es tan marcada que la Geometría escolar actualmente tiene que ver, en la mayoría de los países, con el estudio de los objetos del espacio, sus relaciones y sus transformaciones, que eventualmente han sido matematizados, y con los sistemas axiomáticos que se han construido para representarlos (Clements y Battista, 1992). Esto hace que el desarrollo del sentido espacial y del razonamiento sean aspectos determinantes de los fenómenos didácticos que interesan a los estudiosos de la didáctica de la Geometría.

En este escrito pretendemos contribuir al homenaje que se le rinde a Jean Píaget, a los treinta años de su fallecimiento, presentando una revisión que no pretende ser exhaustiva, aunque sí ilustrativa, de algunas de sus ideas y de cómo estas han sido germen de estudios posteriores realizados por investigadores interesados en comprender fenómenos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría. Para organizar la revisión, en primer lugar presentamos dos hipótesis centrales de los estudios de Piaget sobre el desarrollo de la concepción del espacio en los niños. A continuación, mostramos el punto de vista de Piaget acerca de la competencia que tienen los niños en tareas de: discriminar figuras geométricas, representar figuras geométricas, construir sistemas de referencia bi o tridimensionales y justificar afirmaciones sobre hechos geométricos. Al respecto de cada tarea, hacemos referencia a estudios posteriores, la mayoría hechos en el contexto escolar, que confirman las ideas de Piaget o sugieren una revisión de las mismas. En todo caso, estos estudios son precursores de la investigación en didáctica de la Geometría, entre otros, sobre procesos de visualización (Krutetstkii, 1976; Bishop, 1980; Del Grande,1990; Presmeg, 1986; Gal y Linchevski, 2010), construcción y uso de definiciones (Vinner y Hershkowitz, 1980), razonamiento (van Hiele, 1986; Saads, y Davis, 1997) y demostración (de Villiers, 1986; Boero et al., 1996; Pedemonte, 2007; Mariotti, 1997, 2005, 2006; Douek, 2007 y Camargo, 2010).

Hipótesis centrales del trabajo de Piaget sobre la concepción del espacio

Uno de los asuntos que investigó Piaget, es la habilidad que tienen los niños para representar el espacio. En colaboración con Inhelder llevó a cabo diversos experimentos, muchos de los cuales proponía a los niños tareas geométricas. Ambos investigadores sostenían que, a pesar de que los niños desarrollan una percepción del espacio circundante desde muy temprana edad, en el periodo sensoriomotor, esto no significa que simultáneamente desarrollen una conceptualización del espacio tal que les permita construir una representación mental del mismo. Más aún, según ellos, la construcción conceptual del espacio se construye en oposición a la percepción. Sugirieron dos hipótesis relacionadas con las posibilidades de los niños de desarrollar una representación del espacio.

- *Hipótesis constructivista*: la representación del espacio depende de una organización progresiva de las acciones motoras y mentales que permiten el desarrollo de sistemas operacionales.

- *Hipótesis de la primacía topológica:* la organización progresiva de ideas geométricas sigue un orden definido que es más lógico que histórico; inicialmente se desarrollan ideas topológicas, luego se construyen relaciones proyectivas y después, surgen las relaciones euclideas.

Los experimentos de Piaget e Inhelder (1967) les permitieron corroborar sus hipótesis. Algunos de ellos se han replicado con un interés puesto en la didáctica de la geometría, se consideran ilustrativos de los posibles desempeños que pueden tener los estudiantes al aprender Geometría. A ellos nos referimos a continuación.

Diferenciación de figuras geométricas

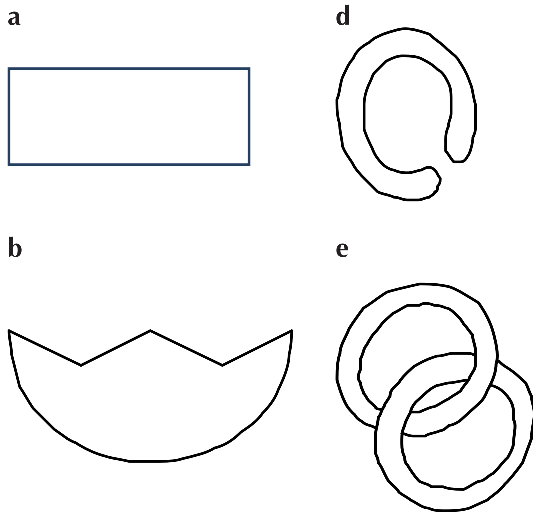
En uno de los experimentos, Piaget e Inhelder (1967) pedían a los niños palpar, con los ojos cerrados (percepción háptica), algunos sólidos geométricos y luego escoger, entre un conjunto de sólidos, aquel que fuera igual al que exploraban manualmente. Según estos investigadores, los niños diferenciaban los objetos inicialmente con base en propiedades que Piaget e Inhelder denominaban topológicas, tales como: cerradura, continuidad o conectividad. Después, podían diferenciar los objetos con base en propiedades de sus caras o lados, que los investigadores calificaban como proyectivas, como la rectilinealidad o curvilinealidad. Finalmente, la diferenciación se hacía teniendo en cuenta propiedades que denominaron euclideas, como el paralelismo o perpendicularidad de los lados y la congruencia de los lados o los ángulos.

La hipótesis de la primacía topológica en la diferenciación de formas tenía que ver con la hipótesis constructivista, pues Piaget e Inhelder (1967) encontraron que el orden lógico de diferenciación dependía de un incremento sistemático de la coordinación de las acciones que realizaban. Como lo explican Clements y Battista (1992), Piaget e Inhelder (1967) afirmaban que en los primeros estadios del desarrollo los niños eran pasivos en sus exploraciones. Tocaban solo una parte del sólido y generaban una percepción táctil; después, tocaban otra parte y generaban una nueva percepción, no necesariamente ligada a la primera. Una vez lograban establecer relaciones entre ambas percepciones táctiles podían construir una primera representación del sólido. Esto se hacía evidente cuando los niños hacían movimientos repetitivos de manera sistemática y reproducían los movimientos desde el punto inicial en el que comenzaban a palpar el sólido. Por ejemplo, para identificar un lado recto, los niños movían la mano sin cambiar de dirección de manera repetida. Estas observaciones llevaron a Piaget a afirmar que la representación mental de una forma geométrica no era un asunto de retener en la memoria una figura que se observaba pasivamente, sino el resultado de acciones coordinadas. Este es un resultado vigente en didáctica, pues probablemente ningún investigador afirmaría lo contrario respecto a los primeros acercamientos de los estudiantes a la discriminación de sólidos geométricos.

Estudios posteriores a los realizados por Piaget e Inhelder (1967) corroboraron la hipótesis constructivista, pero la hipótesis de la supremacía topológica se puso en duda, ya que los resultados investigativos no son concluyentes. Por ejemplo, Lovell (1959; citado en Clements y Battista, 1992), a partir de una réplica de los experimentos de Piaget e Inhelder, reportó que, al contrario a lo que decían Piaget e Inhelder (1967), niños de preescolar, de dos o tres años, eran capaces de diferenciar caras curvilíneas de rectilíneas en algunos sólidos. En cambio, una réplica del experimento realizada por Laurendeau y Pinard (1970), también con estudiantes de preescolar, mostró que sí era posible concluir una predisposición de los alumnos a diferenciar formas con propiedades topológicas primero que aquellas con propiedades euclideas.

Además de ponerse en duda la hipótesis de la primacía topológica, algunos investigadores cuestionaron el uso dado por Piaget e Inhelder a los términos topológico, proyectivo y euclideo en la discriminación de propiedades geométricas de sólidos y figuras planas. Por ejemplo, Martin (1976) y Darke (1982) sugirieron que el uso de dichos términos no era correcto de acuerdo a las Matemáticas. En ese sentido, los términos quizás estaban haciendo referencia a nociones psicológicas más que matemáticas y no se habían definido con suficiente claridad.

Por ejemplo, en uno de los experimentos llevados a cabo por Piaget e Inhelder (1967), en los que pedían a los niños señalar, entre un conjunto de figuras planas, la que más se pareciera a la forma geométrica que les pedían palpar con los ojos cerrados, los investigadores consideraban las figuras a, b y c como formas euclideas y d, e y f como formas topológicas (Figura 1). Como los niños reconocían más fácilmente el parecido que tenían las formas topológicas, Piaget e Inhelder corroboraban con ello la hipótesis de la primacía topológica. Pero Martin (1976) y Darke (1982) señalaron que no era posible hacer una clasificación exclusiva de las figuras usadas, pues algunas de ellas (como las figuras a y d) eran topológicamente equivalentes, desde el punto de vista matemático. En ese sentido, no era posible afirmar que los niños se basaban principalmente en las propiedades topológicas de las figuras en su diferenciación.



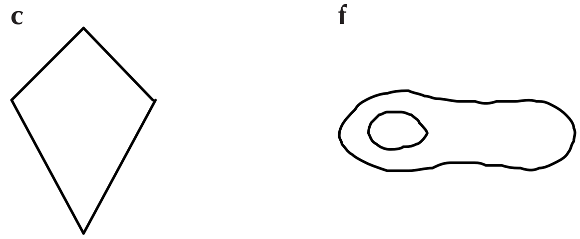


Figura 1. Tomada de Clements y Battista (1992)

Para tratar de aminorar el problema de la falta de claridad en la clasificación de las figuras usadas en los experimentos, algunos investigadores se dieron a la tarea de construir conjuntos de figuras geométricas planas estableciendo criterios específicos para determinar su equivalencia topológica o euclidea con relación a un modelo que se le pedía palpar a los estudiantes. Por ejemplo, Martin (1976) usó tres conjuntos diferentes de figuras: el primer conjunto incluyó figuras topológicamente equivalentes al modelo, pero que no preservaban propiedades euclideas tales como la longitud de los lados o la abertura de los ángulos; en el segundo conjunto incluyó figuras equivalentes al modelo desde el punto de vista euclideo pero que no tenían la misma conectividad entre los lados; y en el tercer conjunto, incluyó figuras equivalentes al modelo desde el punto de vista euclideo pero que no preservaban la misma conectividad entre los lados ni la propiedad de clausura. Al usar el material en sus experimentos con estudiantes de preescolar y primaria, pidiendo a los niños señalar cuáles eran las mejores o peores copias del modelo, Martin (1976) concluyó que la hipótesis de la primacía topológica no se sostenía, pues estudiantes de cuatro años tendían a señalar las copias topológicamente equivalentes como las peores copias del modelo, además de sacrificar la equivalencia de propiedades topológicas en pro de las euclideas más frecuentemente que estudiantes de ocho años.

Otros investigadores se dieron a la tarea de establecer criterios para diferenciar el grado de distorsión de una figura topológicamente equivalente a un modelo, pues parecía ser que los estudiantes de preescolar, de cuatro años, podían reconocer como equivalentes formas muy parecidas al modelo pero no aquellas con grandes distorsiones. Por ejemplo, Geerslin y Shar (1979) construyeron modelos de figuras usando como vértices puntos de una hoja cuadriculada y establecieron el grado de distorsión topológica según el número de movimientos rígidos y dilataciones que se debían realizar mentalmente para superponer el modelo sobre la figura e identificar así la equivalencia. El uso de ese material confirmó que los niños reconocían más fácilmente como equivalentes al modelo aquellas figuras con menos distorsiones. Sin embargo, como lo señalan Clements y Battista (1992), la distorsión es un concepto métrico que envuelve la medida, lo cual no tiene que ver con propiedades topológicas. En ese sentido, la diferenciación de figuras geométricas parece ser un asunto que combina propiedades topológicas, proyectivas y euclideas, más que una evolución en el reconocimiento de cada tipo de propiedades.

La hipótesis de la supremacía topológica no se sostuvo, pero los intentos de confirmarla dieron lugar a la creación de diversos materiales que se han introducido en las clases de Geometría para enriquecer las experiencias de los estudiantes con las formas bi y tridimensionales.

Como lo señala Fisher (1965, citado en Clements y Battista, 1992), los intentos de demostrar la supremacía topológica condujeron a prestar atención a la identificación de una serie de propiedades de las figuras, tales como la existencia de esquinas y curvas, la simplicidad y la familiaridad de los estudiantes con ellas, que sirvieron de base para la creación de material educativo.

Representación de figuras geométricas

En otros experimentos llevados a cabo por Piaget en colaboración con Inhelder (1967) con el objetivo de confirmar sus hipótesis (constructivista y de supremacía topológica) les pedían a los niños dibujar figuras geométricas planas copiando un modelo que los investigadores les mostraban. Según ellos, la inexactitud de los dibujos realizados por los niños –que simultáneamente mostraban habilidad motora para pintar casas con esquinas rectas y árboles con troncos rectilíneos-, era un reflejo de la falta de herramientas de pensamiento adecuadas para poder representar el espacio.

Piaget e Inhelder aseguraban que al dibujar, los niños privilegiaban primero las características topológicas, de la misma manera que en las tareas de discriminación. Por ejemplo, al pedirles dibujar un círculo, un cuadrado o un triángulo, los niños de tres años generalmente dibujaban una curva irregular en la que se notaba el esfuerzo por obtener una figura cerrada, pero sin tener en cuenta las características de los lados. Más adelante, hacia los cuatro años, era posible observar en los dibujos el esfuerzo por hacer una distinción entre cuadrados y rectángulos de otras figuras, centrando la atención en el paralelismo de los lados. Y posteriormente, hacia los seis o siete años, los dibujos reflejaban la atención que los niños prestaban a relaciones euclideas, tales como la abertura de los ángulos o la congruencia de los lados.

Estudios posteriores en donde se replicó el experimento de pedir a estudiantes de preescolar dibujar figuras con base en un modelo, no permitieron confirmar la hipótesis de la supremacía topológica. Por ejemplo, los estudios realizados por Martin (1976) mostraron que no siempre los niños pequeños privilegiaban las propiedades topológicas. Por el contrario, este autor sugiere que la posibilidad de dibujar figuras parecidas a modelos depende de un incremento en la coordinación de la atención puesta a las propiedades proyectivas y euclideas y que la conservación de estas conduce a preservar las propiedades topológicas.

A partir de los resultados de Martin (1976), Rosser, Lane y Mazzeo, (1988, citados en Clements y Battista, 1992) propusieron una secuencia de enseñanza para favorecer la coordinación de las propiedades euclideas y proyectivas en los niños de preescolar.

La secuencia implica pedirles:

- Reproducir figuras a partir de un modelo que siempre tienen a la vista.
- Reproducir figuras a partir de un modelo que se esconde.
- Reproducir una figura después de que esta es objeto de una transformación rígida o un cambio en la perspectiva visual.

Construcción de sistemas de referencia para comparar figuras

Piaget e Inhelder (1967) tenían una explicación sobre el privilegio que, según ellos, tenían los niños por las propiedades topológicas. Como lo explican Clements y Battista (1992), según estos autores, las propiedades topológicas eran más fáciles de percibir que las proyectivas o euclideas pues se hacían evidentes en las figuras aisladas. En cambio, las relaciones proyectivas implicaban el establecimiento de relaciones entre una figura y el punto de vista de un sujeto observador y las relaciones euclideas implicaban la comparación de propiedades entre figuras. A diferencia de las relaciones topológicas, el reconocimiento de relaciones proyectivas o euclideas dependía de la evolución de un marco de referencia que permitiera ubicar las figuras para observarlas desde un punto de vista específico o en comparación con otras en un sistema coordenado. En ese sentido, propiedades como la continuidad o la cerradura, podían detectarse sin necesidad de tener un sistema de referencia como base de la identificación, mientras que la rectilinialidad (relación proyectiva) o la congruencia (relación euclidea) requerían no solo de un sistema de referencia, sino de inhibir distractores preceptuales en la identificación de las relaciones.

Por ejemplo, en uno de los experimentos realizados por Piaget e Inhelder (1967), pedían a los niños organizar un conjunto de objetos, que inicialmente estaban dispuestos aleatoriamente sobre una mesa, a lo largo de un camino recto, no paralelo a ninguno de los lados. Los niños de tres a siete años, aproximadamente, fracasaban en la tarea pues, o bien alineaban los objetos según una dirección paralela a alguno de los lados de la mesa, o colocaban los objetos tratando de seguir el camino indicado pero formando una línea curva que tendía hacia un camino paralelo a alguno de los lados de la mesa. La influencia del distractor externo, lado de la mesa, les impedía lograr con éxito la tarea.

Piaget e Inhelder (1967) concluyeron que el éxito en el establecimiento de relaciones proyectivas y euclideas dependía de la construcción de un complejo sistema de puntos de vista lo suficientemente fuerte como para inhibir los distractores. En particular, algunas propiedades que ellos consideraban como proyectivas y euclideas, tales como la semejanza de figuras, requerían que los niños desarrollaran un marco de referencia bidimensional que les permitiera, por ejemplo, comparar la dirección de las líneas o el tamaño de lados y ángulos. Pero Piaget e Inhelder (1967) consideraban que los niños no tenían una tendencia innata a organizar los objetos o figuras en relación a un marco de referencia tri o bidimensional. Por el contrario, esto se lograba a partir del establecimiento de relaciones entre las diferentes posiciones de los objetos y la coordinación de sus orientaciones e inclinaciones. En algunos experimentos en los que pedían a niños de cinco años indicar la localización de ciertos objetos tridimensionales en relación a otros, los investigadores encontraron que los niños tenían más éxito en la tarea si se les permitía moverse alrededor de los objetos o se les daba un modelo físico del lugar en donde estaba el objeto, pues de esa manera podían establecer varios puntos de referencia a partir de los cuales codificar la localización de los objetos. Esta idea fue corroborada por Newcombe (1989) al señalar que el desarrollo de varios sistemas de referencia coordinados, permite el éxito en tareas que tienen que ver con el establecimiento de organizaciones espaciales. Por su parte, Clements y Battista (1992) interpretaron el desarrollo de tales sistemas proponiendo que el marco de referencia euclideo tridimensional es análogo a una rejilla hecha de una red de posiciones en el espacio. En dicha red, los objetos pueden moverse y es a partir de la organización simultánea de todas sus posiciones que emerge el sistema euclideo cuando las relaciones de orden, distancia y cercanía de los objetos son reemplazadas por relaciones del mismo tipo entre las diversas posiciones de la red. Tal como lo señala Piaget, la generación de un sistema de referencia euclideo tridimensional es la culminación de un proceso de reconocimiento de relaciones euclideas que no se corresponde con una aprehensión innata de las propiedades de los objetos y sus relaciones, sino de las acciones que se llevan a cabo entre ellos.

Las investigaciones posteriores a los trabajos de Piaget e Inhelder (1967) no corroboraron del todo sus conclusiones sobre el desarrollo de la construcción de un sistema de referencia espacial. Por ejemplo, Liben, (1978, citado en Clements y Battista, 1992) encontró que estudiantes de primaria eran más competentes para establecer sistemas de referencia que lo que la teoría de Piaget parecía suponer, mientras que estudiantes de bachillerato, con quienes se replicaron algunos experimentos, eran menos competentes. Por su parte, Somerville y Bryant (1985) encontraron que algunos estudiantes de preescolar y primaria (4 – 6 años) podían extrapolar pares de líneas más allá de los extremos de ejes coordenados y determinar dónde se intersecaban, hecho que permitía suponer que habían construido un sistema de referencia espacial. De otro lado, Clements y Battista (1992) encontraron que aunque los estudiantes no estaban predispuestos a construir espontáneamente un sistema de referencia para organizar relaciones espaciales, los usaban sin mayores dificultades cuando se les pedía que lo hicieran y se les proporcionaba el sistema. Este hecho pone en entredicho las conclusiones obtenidas por Piaget.

En estudios posteriores a los realizados por Piaget e Inhelder (1967) se han identificado una variedad de factores que influyen en el desempeño en tareas que tienen que ver con el uso de sistema de referencia, pero que no están directamente relacionados con el reconocimiento de relaciones topológicas, proyectivas y euclideas. Por ejemplo, Ibbotson y Bryant (1976) estudiaron el efecto de la percepción de la verticalidad y la horizontalidad, propias de nuestra posición erguida, en tareas de dibujar líneas perpendiculares o paralelas. Los resultados indicaron una tendencia general a privilegiar posiciones estándar en el trazo, con las líneas en las direcciones arriba-debajo e izquierda-derecha de la hoja, hecho que no se relaciona directamente con las explicaciones dadas por Piaget acerca de la construcción de sistemas de referencia.

El desarrollo de la habilidad de justificar

En algunos de sus trabajos, Piaget (1987) indagó por la habilidad de los niños para hacer predicciones y producir justificaciones. Sus estudios lo llevaron a proponer niveles en el desarrollo de dicha habilidad, que son descritos por Clements y Battista (1992) de la siguiente manera:

Primer nivel (7-8 años): los niños proceden en sus exploraciones de manera desordenada y sin un plan definido. Las observaciones o los datos que examinan en diferentes ejemplos y las conclusiones locales que sacan no se integran y por eso pueden incluso llegar a ser contradictorias. Los niños no son conscientes de sus pensamientos y por lo tanto, no tienen mecanismos para sistematizarlos o dirigirlos a juicios sucesivos. Además, como son egocéntricos, no intentan justificar sus conclusiones ni hacerlos entendibles a los demás. Sin embargo, al finalizar este nivel, es posible observar un cierto grado de integración en las exploraciones lo que conduce a formular algunas conclusiones de manera empírica, aunque no intentan entender ni explicar por qué ocurren los hechos detectados. Por ejemplo, al pedirles juntar tres sectores angulares cuyos lados corresponden a los ángulos de un triángulo o cuatro sectores angulares cuyos lados corresponden a los ángulos de un cuadrilátero, los estudiantes pueden predecir que tres sectores pueden formar un semicírculo y que cuatro sectores pueden conformar un círculo. Dicen lo que ven pero no intentan determinar por qué ocurren los patrones midiendo los ángulos para sumar las cantidades. Simplemente constatan un hecho y pueden prever qué sucederá en situaciones similares.

Segundo nivel (7-8 años a 11-12 años): los niños hacen exploraciones y sacan conclusiones con base en una inducción empírica pues el carácter de sus exploraciones es anticipatorio y propositivo. Suelen usar la información encontrada para presuponer qué puede suceder y qué no como resultado de una exploración, pero no establecen una formulación general. Adicionalmente, intentan justificar sus predicciones, aunque los intentos de hacer deducciones frecuentemente entran en conflicto con las inducciones. En la tarea de explorar las configuraciones que se producen a partir de sectores angulares, cuyos lados correspondan a ángulos de triángulos o cuadriláteros, intentan analizar las relaciones entre los ángulos pero se basan más en la apariencia de los ángulos que en las relaciones entre las medidas de todos ellos y por eso no establecen un hecho geométrico general y pueden considerar que hay situaciones particulares en donde la inducción no se verifica. Al finalizar el nivel, las inducciones empíricas se realizan de manera más eficaz y rápida. Los niños captan que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo o un cuadrilátero es un hecho geométrico general que se cumple para todos los triángulos y cuadriláteros. Sin embargo, no establecen su necesidad lógica pues el razonamiento está basado en creencias, fruto de la exploración, y no en presupuestos geométricos. En ese sentido, solo buscan la justificación de aquellos hechos en los que creen, pues aunque el pensamiento es lógico, es de naturaleza empírica.

Tercer nivel (11 -12 años en adelante): los niños realizan inducciones empíricas, establecen hechos geométricos y buscan justificarlos por vía deductiva, aunque también razonan deductivamente sobre afirmaciones de las cuales no tienen evidencias empíricas sólidas. Reconocen la exhaustividad de los razonamientos basados en el establecimiento de la necesidad lógica. Por ejemplo, en la tarea de explorar las configuraciones que se producen a partir de tres sectores angulares cuyos lados corresponden a ángulos de un triángulo, los estudiantes avanzan desde la creencia de que los sectores formarán un semicírculo a establecer que es necesario que esto sea así, gracias al razonamiento deductivo que desarrollan. Sin embargo, este razonamiento más que basado en esquemas matemáticos formales, está basado en el método empleado para constituir el semicírculo.

En síntesis, según Piaget, en el nivel uno el pensamiento no es sistemático ni reflexivo y por lo tanto, no es lógico. En el nivel dos el pensamiento es lógico pero restringido al mundo empírico. En el nivel tres los estudiantes hacen deducciones lógicas y tienen conciencia de que su razonamiento se debe ajustar a un sistema matemático. Para Piaget, la evolución en la forma de justificar afirmaciones es el resultado de los ejercicios de argumentación que realizan al estar en contacto con otros niños y confrontar sus razonamientos con los de los demás. Las actividades sociales de argumentación hacen que los niños sean más concientes de sus propios pensamientos, asuman actitudes de introspección y puedan asumir con más facilidad la perspectiva de los otros. En este proceso evolutivo, las exploraciones empíricas dan paso a los experimentos mentales, en los cuales la realidad se reconstruye mediante secuencias de eventos, y posteriormente estos son reemplazados por experimentos lógicos en los cuales los mecanismos de construcción se reflejan.

A partir del trabajo de Piaget han surgido diversos trabajos de investigación que intentan caracterizar el desempeño de los estudiantes en actividades de predicción de hechos y de justificación de los mismos. Pero quizás la teoría más extendida y que ha impactado los currículos de Geometría de diversos países, incluido Colombia, es el modelo de razonamiento de los esposos Pierre y Dina van Hiele, inspirado en el trabajo de Piaget. A grosso modo, los van Hiele (1986) proponen cinco niveles de pensamiento en Geometría: (i) de visualización o reconocimiento, (ii) de descripción o análisis, (iii) de clasificación, (iv) de deducción formal, (v) de rigor matemático. Cada nivel muestra un grado de sofisticación en el acercamiento conceptual y la justificación de hechos geométricos, desde acercamientos basadas en hechos perceptivos, hasta aquellos acercamientos formales realizados en cualquier sistema teórico.

Clements y Battista (1992) han analizado qué características de la teoría de Piaget son retomadas en la teoría de los van Hiele. Mencionan que en su teoría, adoptan la hipótesis constructivista y, en ese sentido, enfatizan en el rol del estudiante como constructor activo de su propio conocimiento. De acuerdo con Clements y Battista (1992), ambas teorías comparten algunos presupuestos tales como:

- El conocimiento no se organiza linealmente como un listado de términos, hechos y reglas, sino que se organiza en un sistema de relaciones que vinculan conceptos geométricos y procesos en esquemas conceptuales.

- Los estudiantes logran abstraer las matemáticas a partir de la reflexión sobre sus propios patrones de actividad.

- Los conflictos a los que se enfrentan los estudiantes o las crisis por las que transitan son fundamentales en la transición de un nivel de pensamiento al otro.

- Los profesores no pueden esperar que los estudiantes aprendan por imitación o mediante claras explicaciones, sino a partir de lo que han encontrado por ellos mismos.

A pesar de las semejanzas entre las teorías, Clements y Battista (1992) identifican importantes diferencias entre ellas:

- Piaget considera que el desarrollo del razonamiento permite el avance en el proceso de aprendizaje, mientras que los van Hiele consideran que gracias a los procesos de enseñanza y aprendizaje se promueve el desarrollo del razonamiento. En ese sentido, los van Hiele asumen una perspectiva constructivista más cercana al acercamiento sociocultural de Vigotsky que de Piaget.

- A diferencia de Piaget, los van Hiele no establecen una conexión directa entre el nivel de razonamiento y la edad. Por el contrario, cada vez que los estudiantes se aproximan a un nuevo objeto de conocimiento, pasan por cada uno de los niveles de razonamiento, independientemente de la edad, aunque el tránsito de un nivel a otro si puede ser más veloz en estudiantes con mayor edad y experiencia.

- Los van Hiele objetaron la tipología establecida por Piaget pues consideraban que esta se basa en comparar la manera de razonar en cada nivel con relación a la lógica matemática, centrando la atención en lo que no pueden, o pueden hacer los estudiantes con respecto a ella. Desde su punto de vista, Piaget no parecía admitir que los objetos de conocimiento eran diferentes en cada nivel, por lo que no tenía sentido preguntarse sí en el primer nivel los estudiantes lograban cierta destreza en el razonamiento deductivo. Sin embargo, Clements y Battista (1992) señalan que la crítica hecha a Piaget por los van Hiele no es del todo justa, puesto que Piaget sí tenía la hipótesis de que los objetos de pensamiento no eran los mismos en diferentes niveles de pensamiento aunque la tipificación hecha no mencionara explícitamente este hecho. Quizás los van Hiele daban al término “lógico” una connotación más restringida que la que le daba Piaget.

Procesos matemáticos propios de la actividad en Geometría

En algunos estudios en el área de didáctica de la Geometría se ha asumido la tarea de correlacionar los niveles de van Hiele con la tipología de niveles de pensamiento de Piaget contribuyendo de ese modo a caracterizar el pensamiento de los aprendices en diferentes niveles educativos y alertando sobre lo que ellos están en posibilidad de aprender. Por ejemplo, Denis (1987, citada en Clements y Battista, 1982) realizó una investigación con estudiantes de educación media inscritos en un curso de Geometría en la que encontró que el 64% estaban en el segundo nivel y el resto en el tercero de los establecidos por Piaget. Sin embargo, de estos últimos, solo unos pocos superaban el nivel tres sugerido por los van Hiele.

Pero más allá de su comparación, las teorías de Piaget y de los van Hiele han servido de punto de partida para la identificación y caracterización de procesos matemáticos propios de la actividad geométrica, estrechamente relacionados unos con otros, tales como la visualización, la representación, la conceptualización y la demostración. Cada uno de ellos ha sido objeto de numerosas investigaciones, hecho que ha generado programas de investigación particulares y ha contribuido al crecimiento de la didáctica de la Geometría. A continuación mencionamos brevemente algunas líneas de investigación que muestran la huella dejada por Piaget.

Con respecto a la visualización, la caracterización hecha por los van Hiele para el razonamiento en los niveles uno y dos (de reconocimiento y análisis) depende de lo que Piaget denominó "imaginería mental articulada" (Piaget e Inhelder, 1967) que descansa sobre procesos de visualización y está en concordancia con la hipótesis constructivista. En ese sentido, la conceptualización geométrica se construye primero en el plano perceptual y luego se reconstruye en el plano representacional. Investigaciones posteriores centraron la atención en la manera como el pensamiento visual se manifiesta cuando se alcanzan niveles superiores de pensamiento. Por ejemplo, Clements y Battista (1992) encontraron que el pensamiento visual se transforma y sirve de telón de fondo al surgir formas más sofisticadas de pensar. Sugieren que el pensamiento visual obedece a un conjunto de leyes de la percepción y que está conectado con otras formas de pensamiento, cada una de las cuales juega un rol dependiendo de la ley que se active. Aunque inicialmente las habilidades de visualización se veían como algo innato y propio de la manera de pensar de algunos estudiantes (Krutetstkii, 1976), poco a poco el desarrollo de las habilidades de visualización se introdujo como una responsabilidad curricular y se ha constituido en objeto de análisis de diversos investigadores en la didáctica de la Geometría (Bishop, 1980; Hoffer, 1981; Presmeg, 1986; Del Grande, 1990; Gal y Linchevski, 2010).

Con respecto a la construcción y uso de definiciones, los van Hiele señalaron que en el nivel dos, los estudiantes son capaces de plantear definiciones proponiendo una lista de propiedades de los objetos geométricos a los que acceden perceptualmente gracias a sus representaciones. Esta caracterización está en consonancia con la hipótesis constructivista propuesta por Piaget e Inhelder (1967), quienes señalan que, gracias a las acciones que realizan sobre las representaciones, los niños son capaces de identificar propiedades y formarse una representación de los objetos geométricos, en un proceso activo de establecimiento de relaciones entre las cualidades preceptuales de los objetos. Una idea similar a esta es retomada en el trabajo de Vinner y Hershkowitz (1980) quienes señalan que al pensar, los estudiantes no usan las definiciones de los conceptos, sino las imágenes conceptuales; es decir, combinaciones de todas las imágenes mentales y las propiedades que han asociado con el concepto. El trabajo de estos autores, particularmente, sus nociones de concepto-imagen y concepto-definición han sugerido una vía efectiva de acceso al aprendizaje de algunos conceptos geométricos, a partir de ejemplos y contraejemplos. Esta línea de trabajo está aun vigente con trabajos sobre el espacio de ejemplos, tales como el llevado a cabo por Zazkis y Leikin (2008).

Con respecto a la demostración, los estudios investigativos han generado otra importante línea de investigación en didáctica de la Geometría. Uno de los asuntos que ha sido objeto de diversas polémicas es el de la relación entre la investigación empírica y la teórica, asunto considerado por Piaget (1987) en la tipificación que hizo sobre la forma como justifican los niños. Algunos investigadores, quizás bajo la influencia de la caracterización hecha por Piaget, se refieren a una necesaria ruptura en la forma de pensar entre la Geometría intuitiva y la Geometría deductiva (Balacheff, 1999; Duval, 1991). Según ellos, en el segundo caso, el análisis de las relaciones deductivas entre los enunciados se vuelve el modo dominante de pensamiento y ya no las interpretaciones intuitivas que inicialmente pueden haber sido adheridas a ellas. Otros investigadores, por el contrario, han mostrado que en Geometría, más que en otras áreas de la Matemática, los métodos empíricos y deductivos interactúan y se refuerzan mutuamente. Diversos estudios han reconocido el vínculo entre las acciones matemáticas de obtener y verificar resultados mediante la experimentación y las acciones que llevan a la organización deductiva de dichos resultados (de Villiers, 1986; Boero et al., 1996; Mariotti, 1997, 2005, 2006; Pedemonte, 2007; Douek, 2007, Camargo, 2010). Los investigadores sustentan este planteamiento señalando que la vía de acceso a la demostración, a partir de la geometría intuitiva, ha sido parte de la naturaleza de la actividad matemática. Por ejemplo, se hace evidente en el libro Los Elementos de Euclides en donde los métodos de construcción que presenta el autor, van precedidos de esquemas de "invención" que Euclides denominó "análisis". Incluso, según Enriques (1920, citado por Mariotti, 2005), en la elección de los elementos fundamentales de la Geometría euclidiana se escogieron las entidades más simples respecto a la intuición psicológica, como las ideas de punto, recta y plano y algunos principios, a manera de postulados, comprensibles por sí mismos de acuerdo a las imágenes espaciales que se forman en nuestra mente. Las demás propiedades geométricas son deducciones de las anteriores. Por tal razón, los conceptos y propiedades de la Geometría euclidiana conservan desde su mismo origen una propiedad común, la espacialidad. Desde ese punto de vista, la experiencia concreta funda intuiciones correctas y facilita el paso de la Geometría de la intuición a la Geometría de la deducción. Adicionalmente, la estructura deductiva subyacente está ligada a aspectos relevantes de la cultura matemática como la necesidad de comprender, asimilar y aceptar el significado de los conceptos cuyas propiedades se analizan. Por esa razón, Mariotti (1997) se refiere a las justificaciones hechas en el libro de Euclides como "argumentos deductivos" porque son un medio para validar enunciados al relacionar nuevas propiedades a hechos indubitables, pero a la vez necesarios para comprender dichos enunciados. De acuerdo a lo anterior, un hecho crucial en el aprendizaje de la demostración es la articulación entre la fase exploratoria y la subsiguiente fase de justificación en la cual los elementos descubiertos informalmente son reorganizados en enunciados válidos.

Consideraciones finales

En las líneas anteriores hemos presentado, muy sintéticamente, algunos ejemplos de los trabajos de Piaget que se constituyeron en precursores del desarrollo de programas de investigación en didáctica de la Geometría. Aún corriendo el riesgo de dejar de lado estudios importantes realizados por Piaget, como el de la intuición, considerada como efectiva y fundamental en todos los estadios del desarrollo, hemos seleccionado algunas ideas que fueron centrales en sus trabajos y que revelan que los niños y jóvenes pueden desarrollar habilidades espaciales y de razonamiento de la clase de Geometría.

La hipótesis constructivista está vigente y debe ser una referencia a tener en cuenta en el diseño curricular. Aunque la hipótesis topológica no se sostuvo, también puede ser aprovechada en didáctica de la Geometría procurando que los estudiantes experimenten procesos matemáticos, en los que las relaciones topológicas, proyectivas y euclideas, sugeridas por Piaget e Inhelder (1967) se desarrollen al tiempo y de manera coordinada.

En síntesis, la didáctica de la Geometría está en deuda con Piaget y sus colaboradores pues sus trabajos delinearon el campo de indagación acerca de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación en Geometría en las últimas décadas. No solo aportaron fundamentos teóricos y metodológicos para profundizar en aspectos de la práctica profesional de enseñar Geometría, sino para abordar problemas de investigación en este campo, generalmente centrados en procesos de visualizar, conceptualizar, representar, justificar y resolver problemas.

Referencias

Balacheff, N. (1999). *Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate... Newsletter on proof, Mai/Juin*. http://www.lettredelapreuve.it/

Bishop, A (1980). Spatial abilities and mathematics achievement- a review. *Educational Studies in Mathematics,* 11, 257-269.

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., y Mariotti, A. (1996). Challenging the traditional school approach to the theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems. *Proceedings of the 20th PME International Conference, 2*, 113 - 120.

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria. Disertación doctoral*. España: Universidad de Valencia.

Clements, D.H y Battista, M.T. (1992). G*eometry and spatial reasoning*. En D.A. Grouws (ed). Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: MacMillan 420-464.

Darke, I. (1982). *A review of research related to the topological primacy thesis*. *Educational Studies in Mathematics*. 13, 119-142.

de Villiers, M. (1986). *The role of axiomatization in mathematics and mathematics teaching*. http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/axiom.pdf.

Del Grande, J. (1990) Spatial Sense. *Arithmetic Teacher*. 14-20

Douek, N. (2007). *Some remarks about argumentation and proof*. *En P. Boero (Ed.), Theorems in school. From history, epistemology and cognition to classroom practice*. Rotterdam: Sense Publishers. (pp. 249 - 264).

Duval, R. (1991). *Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration*. Educational Studies in Mathematics. *22*, 233 - 261.

Gal, H. y Linchevski, L. (2010). *To see or not to see: analyzing difficulties in geometry*. Educational Studies in Mathematics, 74(2), 163 – 183.

Geeslin, W. E. y Shar, A.O. (1979). An alternative model describing children's spatial preferences. Journal for research in mathematics education. 10, 57-68.

Hoffer, A. (1981). *Geometry is more than proof*. Mathematics Teacher. 74, 11-18.

Ibbotson, A. y Bryant. P.E. (1976). T*he perpendicular error and the vertical effect in children's drawing*. Perception. 5, 319 – 326.

Krutetstkii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: University of Chicaago Press.

Laurendeau, M. y Pinard. A. (1970). *The development of the concept of space in the child*. New York: International Iniversity Press.

Mariotti, M. A. (1997). *Justifying and proving in geometry: the mediation of a microworld*. Proceedings of the European Conference on Mathematical Education. 21 - 26.

Mariotti, M. A. (2005). *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimiento della geometría* (primera ed.). Bologna: Pitagora.

Mariotti, M. A. (2006). *Proof and proving in Mathematics Education. In A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.)*. Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Rotterdam: Sense Publishers. (pp. 173 - 204).

Martin, J. L. (1976). *An analysis of some of Piaget's topological task from a mathematical point of view*. Journal for research in mathematics education. 7, 8-24.

Newcombe, N. (1989). *The development of spatial perspective taking*. En H.W. Advances in child development and behavior. New York: Academic Press. Reese (Ed.)

Parzysz, B (1988) *"Knowing" vs "Seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures*. Educational Studies on mathematics. 19, 79-92.

Pedemonte, B. (2007). *How can the relationship between argumentation and proof be analysed?* Educational Studies in Mathematics. 66, 23 - 41.

Piaget, J. y Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space. Norton y Co.* New York.

Piaget, J. (1987). *Possibility and necessity. Vol. 2. The role of necessity in cognitive development*. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Presmeg, N. (1986). *Visualization in high school mathematics*. For the learning of mathemtics. 6(3), 42-46.

Saads, S, y Davis, G. (1997). *Spatial abilities, van Hiele levels & language use in three dimensional geometry*. U.K.: University of Southampton.

Somerville, S.C. y Bryant, P.E. (1985). *Young children's use of spatial coordinates*. Child Development. 56, 604-613.

van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight.* Orlando: Academic Press.

Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1980). *Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts*. *Proceedings of the fourth International*. Concerence for the Psychology of Mathematics Education. 177-184.

Zazkis, R; Leikin, R. (2008). *Exemplifying definitions: a case of a square*. Educational Studies in Mathematics. vol 69, 131-148.