



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

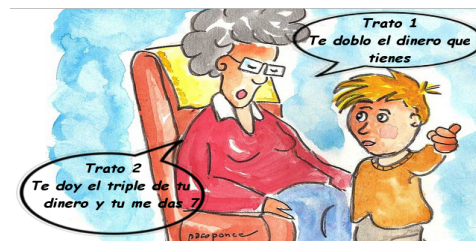
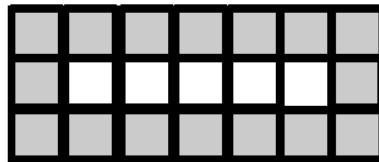
# Pensamiento funcional en estudiantes de educación primaria

Antonio Moreno  
Profesor del Departamento de  
Didáctica de la Matemática de la  
Universidad de Granada

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2016-75771-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

1

2



3

¿Quiénes somos?

Departamento de Didáctica de  
la Matemática

4



5

- Sede de Granada en la Facultad de Ciencias de la Educación (9 departamentos)
- 32 profesores
- Grados de Educación Primaria, Educación Primaria Bilingüe y Educación Infantil
- Máster en Didáctica de la Matemática-Doctorado en Ciencias de la Educación
- Máster de Formación de Profesorado de Secundaria
- 2 grupos de investigación-“Didactica de la Matemática. Pensamiento Numérico”

6

## Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico

- <https://fqm193.ugr.es/>
- 21 miembros (13 de la UGR)
- Pensamiento numérico y pensamiento algebraico

## Los proyectos

7

- 2 proyectos I+D
  - Pensamiento funcional en estudiantes de educación primaria como aproximación al pensamiento algebraico (2014-2017) EDU2013-41632-P
  - Pensamiento funcional en educación Primaria: relaciones funcionales, representaciones y generalización (2017-2020) EDU2016-75771-P
- El equipo:
  - IPs: María C. Cañadas y Marta Molina
  - Profesores de la UGR: Aurora del Río, Esperanza López, Jesús Montejo, Antonio Moreno y Rafael Ramírez
  - Profesores externos: Rebeca Ambrose, Alfredo Bautista, Bárbara Brizuela, Pedro Gómez
  - Estudiantes de doctorado o máster: Cristina Ayala, Diana Hidalgo, Esperanza López, Rodolfo Morales, Eder Pinto, Ricardo Poveda, M. Dolores Torres, Jason Ureña.

8

¿Dónde  
estábamos?



## El contexto

9



## Algunas propuestas curriculares

10

- Trabajar la generalización
- Trabajar en edades tempranas
- Romper con la idea pedagógica de...de lo simple a lo abstracto, del sencillo a lo complejo, de lo particular a lo general.
- Llegar al pensamiento algebraico a través de la modelización y las funciones

## Pensamiento funcional en Educación Primaria

### *Marco conceptual*

11

#### *Early algebra*

- Años 80 en Estados Unidos
- Integrar el pensamiento algebraico en Educación Primaria e incluso Infantil
- Su propósito es profundizar la comprensión de los niños sobre la forma estructural y la generalidad de las matemáticas y no solo proporcionar experiencias aisladas en cálculo.
- Camino para superar dificultades encontradas en Educación Secundaria

12

#### Pensamiento algebraico

- No es fácil y no existe acuerdo para la definición
- Contextualizamos en pensamiento algebraico temprano-álgebra escolar
- Procesos psicológicos involucrados en la resolución de problemas que los matemáticos los expresarían fácilmente usando notación algebraica (Carraher y Schliemann, 2007)
- Diferentes enfoques:
  - Álgebra como el estudio de estructuras y sistemas abstraídos de cálculos y relaciones (por ejemplo, álgebra como aritmética generalizada)
  - **Álgebra como el estudio de funciones, relaciones y variación conjunta;**
  - Álgebra como la aplicación de un grupo de lenguajes de modelado para expresar y apoyar el razonamiento sobre situaciones que se están modelando

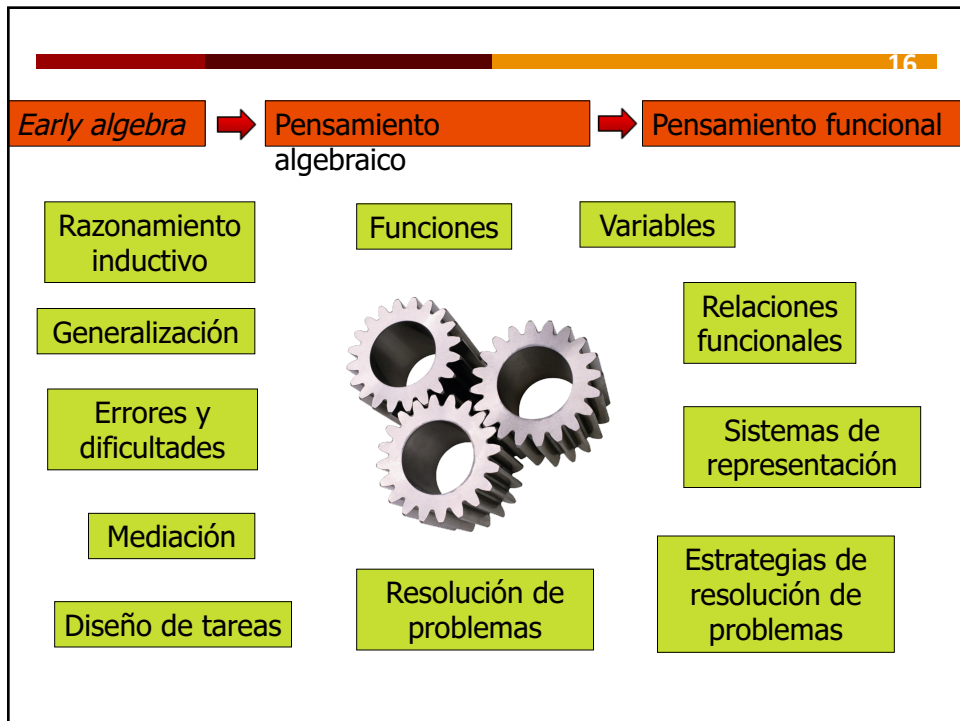
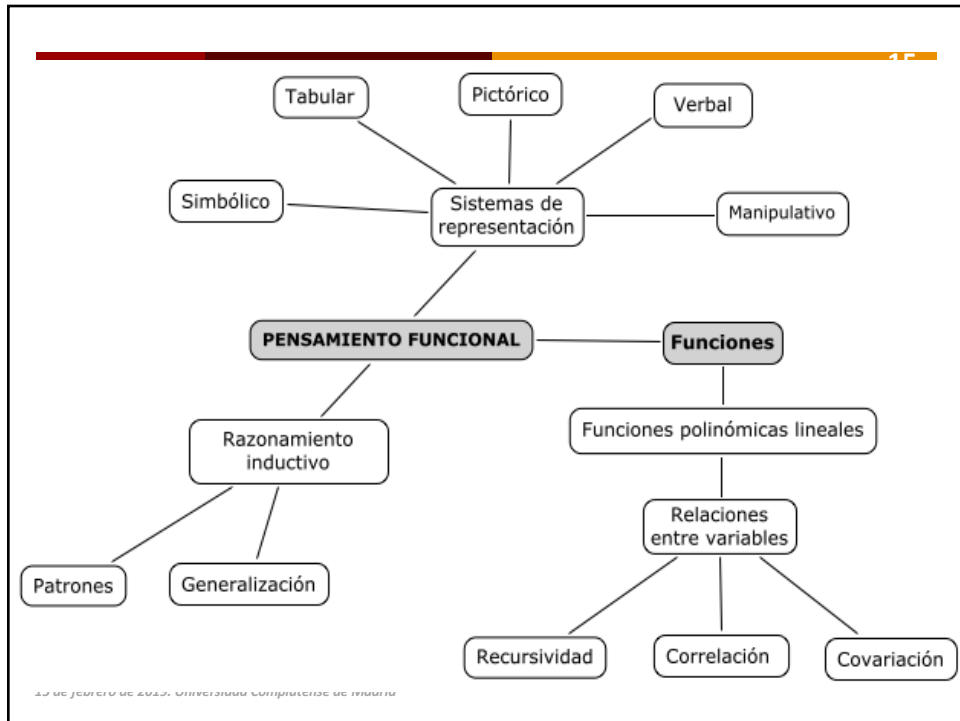
13

### Pensamiento funcional

- Componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen (Cañadas y Molina, 2016)
- Beneficioso para los estudiantes por su conexión con:
  - otros contenidos matemáticos (funciones-patrones-generalización)
  - otras áreas de conocimiento
  - cursos educativos superiores
- No tiene que implicar cambios curriculares
  - "de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones" (BOE, 2014, p. 193879).

14

- Involucra el análisis e identificación de patrones numéricos y geométricos, establecer una conexión entre valores que va más allá de lo que se representa en una tabla o en un gráfico y que recogen valores dados o calculados en una situación
- Incluye la identificación y generalización de relaciones entre cantidades co-variantes, la representación de esas relaciones de diferentes formas utilizando el lenguaje natural, las expresiones simbólicas, tablas, gráficos y razonar de manera fluida con esas representaciones para interpretar y predecir el comportamiento de las funciones



17

## Resultados del proyecto

18

### Pensamiento funcional en Educación Primaria

#### *Objetivos de investigación*

- OG1. Contribuir a la descripción del constructo pensamiento funcional en estudiantes de Educación Primaria
- OG2. Mostrar evidencias y describir el pensamiento funcional de estudiantes de Educación Primaria en España
- OG3. Producir materiales que puedan ser útiles para la introducción del pensamiento funcional en Educación Primaria
- OG2. Desarrollar materiales, tareas y estrategias que favorezcan el desarrollo de pensamiento funcional y la superación de los obstáculos que lo limitan

19

- Tareas
  - Problemas contextualizados
  - Preguntas empezando por casos particulares y llegando a la generalización (modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro, 2007)
  - Números con los que los estudiantes no tuvieran dificultades
  - Uso de materiales manipulativos
  - Trabajo individual, grupos pequeños y gran grupo
  - Tareas análogas en diferentes cursos (posibilidad de comparación)
- Técnicas recogida información
  - Observación participante
  - Pruebas escritas
  - Entrevistas semiestructuradas
  - Adaptaciones según edad de los estudiantes

20

- 2 CEIP de Granada
  - Centro privado-cooperativa. Nivel alto
  - Centro concertado. Nivel medio-bajo
- Implementación en los centros



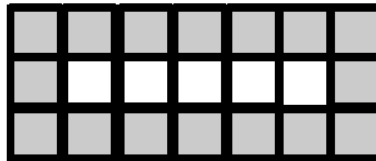
| Curso | Contexto                                                                                                                                                                                                                                                       | Ejemplos de preguntas                                                           | Tipo de pregunta                        |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 1º    | Una cuidadora de animales debe comprar platos de comida y agua para los perros, de modo que cada perrito debe tener su plato de comida, y cinco platos con agua que comparten entre todos, en un sitio donde los perros que tengan sed puedan ir y beber agua. | Si a la cuidadora llegan dos perros, ¿cuántos platos en total se necesitan?     | Caso particular cercano-función directa |
|       |                                                                                                                                                                                                                                                                | Si a la cuidadora llegan treinta perros, ¿cuántos platos en total se necesitan? | Caso particular lejano-función directa  |
|       |                                                                                                                                                                                                                                                                | ¿De qué manera tú puedes calcular la cantidad de platos totales?                | Caso general-función directa            |
|       |                                                                                                                                                                                                                                                                | Si hay 6 platos, ¿cuántos platos hay?                                           | Caso particular cercano-función inversa |

| Curso   | Contexto                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Ejemplos de preguntas                                                                                      | Tipo de pregunta                        |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 3º y 5º | Un colegio quiere reformar el suelo de todos sus pasillos. Van a enlosar los pasillos con baldosas blancas y con baldosas grises. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño. Las baldosas se van a colocar en cada pasillo de la manera que ves en la siguiente imagen.<br><br>¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas? | ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas?       | Caso particular cercano-función directa |
|         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas?     | Caso particular lejano-función directa  |
|         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | ¿Cómo explicarías el número de baldosas grises que necesitas según el número de baldosas blancas que haya? | Caso general-función directa            |
|         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Si colocan primero las grises, ¿cuántas baldosas blancas habrá si hay 16 baldosas grises?                  | Caso particular cercano-función inversa |

## El problema de las baldosas

Un colegio quiere reformar el suelo de todos sus pasillos porque está ya muy estropeado. El equipo directivo decide enlosar los pasillos con baldosas blancas y con baldosas grises. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño. Las baldosas se van a colocar en cada pasillo de la manera que ves en la siguiente imagen.

El colegio contrata a una empresa para que reforme los pasillos de las tres plantas del colegio. Te pedimos que ayudes a los albañiles a contestar algunas preguntas que necesitan responder para hacer este trabajo.



## VEAMOS LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

1. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas?

16

¿Cómo lo sabes?

Porque  $4 + 7 + 2 = 16$

2. Unos pasillos son más largos que otros. Por eso, los albañiles necesitan diferente número de baldosas para cada pasillo. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?

22

¿Cómo lo sabes?

Porque  $10 + 7 + 2 = 22$

El problema de las baldosas



## El problema de las baldosas

3. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?

26

¿Cómo lo sabes?

Porque  $12 + 12 + 2 = 26$

5. Los albañiles de la empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises si ya han colocado las baldosas blancas?

sumándole 6 más.

6. En uno de los pasillos, por error los albañiles han colocado las baldosas grises antes que las blancas. Han colocado 20 baldosas grises ¿cuántas baldosas blancas necesitan?

14 baldosas.

¿Cómo lo sabes?

Porque  $20 - 6 = 14$

## El problema de las baldosas

1. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas?

Se necesitan 16 baldosas grises.

Formula:  $(X + 2) + 6 = 16$

X = número de baldosas grises

2. Unos pasillos son más largos que otros. Por eso, los albañiles necesitan diferente número de baldosas para cada pasillo. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?

Se necesitan 22 baldosas grises.

3. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?

Se necesitan 26 baldosas grises

4. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas?

Se necesitan 206 baldosas grises.

## El problema de las baldosas

5. Los albañiles de la empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises si ya han colocado las baldosas blancas?

Multiplicando el número de baldosas blancas por 2 y sumándole 6.

6. En uno de los pasillos, por error los albañiles han colocado las baldosas grises antes que las blancas. Han colocado 20 baldosas grises ¿cuántas baldosas blancas necesitan?

Necesitan 7 baldosas blancas.

Lo que he hecho ha sido:  $(20-6) : 2 = 7$ .

$X = n^{\circ}$  de baldosas blancas.

28

## Resultados del proyecto



**31**

Estudiantes de primero. Problema de perros y collares ( $y=x$ )  
(Molina, Ambrose R. y del Rio A., 2018)

| Coding         | Number of students | Examples of students' responses                                                            |                                     |
|----------------|--------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
|                |                    | Student's explanation                                                                      | Sentence                            |
| Letter Related | 6                  | They are the same letters                                                                  | We need Z collars for Z dogs        |
|                |                    | They are different letters                                                                 | If we have N dogs we need Z collars |
| Value          | 5                  | Z is zero and there is no collar and no dog                                                | We need Z collars for Z dogs        |
|                |                    | Z has 28 as value, since it is the last letter in the alphabet                             |                                     |
|                |                    | N is the first letter of none, and Z is the first of zero                                  | If we have N dogs we need Z collars |
|                |                    | The value of N is 14, because it is his position in the alphabet, and the value of Z is 27 |                                     |

**32**

|                            |   |                    |                                     |
|----------------------------|---|--------------------|-------------------------------------|
| Rejects the use of letters | 3 | Z is not a number  | We need Z collars for Z dogs        |
|                            |   | This doesn't exist | If we have N dogs we need Z collars |

33

**ESTRUCTURAS**

Estudiantes de tercero. Problema de las baldosas ( $y=2x+6$ )  
(Pinto, Cañadas, Moreno y Castro, 2016)

C1 (5)  $3+3+5+5=16$

C2 (8)  $3+3+8+8=22$

C3 (10)  $3+3+10+10=26$

}  $x+x+3+3$

| Aditivas            | Multiplicativas        | Aditivas y multiplicativas |
|---------------------|------------------------|----------------------------|
| $x+x+3+3$           | $f(5) \cdot 2$         | $2x+6$                     |
| $x+x+6$             | $f(5) \cdot 3$         | $2(x+2)+2$                 |
| $(x+2)+(x+2)+2$     | $f(5) \cdot 5$         | $2x+3+3$                   |
| $(x+3)+(x+3)+(x+3)$ | $f(5) \cdot 100$       | $3(x+2)-x$                 |
| $x+x+2$             | $2 \cdot 2x$           | $3x+1$                     |
| $x+6$               | $(2x) \cdot 3 \cdot 3$ | $2x+2$                     |
|                     |                        | $(x+3) \cdot 2$            |
|                     |                        | $(x+6)+2x$                 |

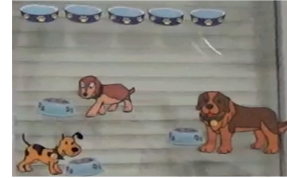
34

Estudiantes de quinto. Problema de las baldosas ( $y=2x+6$ ;  
 $y=(x-6)/2$ )  
(Pinto y Cañadas, 2018)

| Questions            | Students' responses | Underlying structures |
|----------------------|---------------------|-----------------------|
| Q2 (8 white tiles)   | $(2 \cdot 8)+3+3$   | $2x+3+3$              |
| Q3 (10 white tiles)  | $(2 \cdot 10)+3+3$  | $2x+3+3$              |
| Q4 (100 white tiles) | $(2 \cdot 100)+3+3$ | $2x+3+3$              |
| Q6 (20 grey tiles)   | $(20-6)/2$          | $(x-6)/2$             |
| Q7 (56 grey tiles)   | $(56-6)/2$          | $(x-6)/2$             |

## ESTRATEGIAS

Estudiantes de primero. Estrategias-relaciones funcionales.  
 Problema de los perros y los platos ( $y=x+5$ )  
 (Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez, 2018)

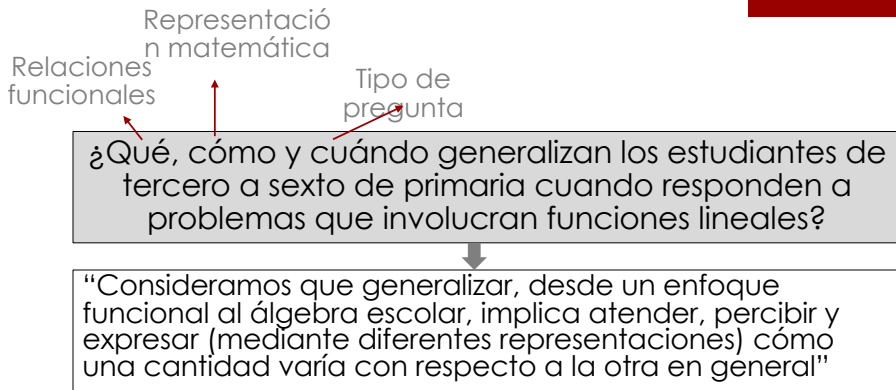


| Relación funcional identificada | Estrategias |       |       |       |       |       |     |
|---------------------------------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
|                                 | E.1         | E.2   |       | E.3   |       |       | E.4 |
|                                 |             | E.2.1 | E.2.2 | E.3.1 | E.3.2 | E.3.3 |     |
| Correspondencia                 |             | X     | X     | X     | X     | X     |     |
| Covariación                     |             | X     | X     |       |       |       |     |

Nota: E.1 = Respuesta directa; E.2 = Conteo; E.2.1 = Conteo total; E.2.2 = Contar desde el mayor sumando; E.3 = Operatoria; E.3.1 = Hechos numéricos recordados; E.3.2 = Descomposición de números; E.3.3 = Modificación de los datos iniciales y compensando E.4 = Generaliza.

## GENERALIZACIÓN

(Moreno, Pinto, Molina, 2017), (Pinto y Cañadas, 2018)



**37**

### GENERALIZACIÓN

Estudiantes de quinto. Problema de baldosas ( $y=2x+6$ )  
 (Pinto y Cañadas, 2018)

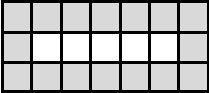



Table 3  
*Evidence of Students' Generalization*

| Non generalization          | Generalization                                                               |                  |                |
|-----------------------------|------------------------------------------------------------------------------|------------------|----------------|
|                             | Only prompted                                                                | Only spontaneous | Both           |
| S15, S16, S18, S19, and S20 | S1, S2, S3, S4, S7, S9, S10, S11, S12, S13, S14, S17, S21, S22, S23, and S24 |                  | S5, S6, and S8 |

### Concepción y representación de cantidades indeterminadas (Ayala-Altamirano, Molina, 2018)



¿Cómo evolucionan las concepciones de los estudiantes de primaria sobre las cantidades indeterminadas?

¿Cómo los estudiantes representan lo indeterminado al resolver problemas que involucran relaciones funcionales?

Conjunto de ideas que expresan sobre lo indeterminado.

Cambios en las ideas de los estudiantes al interactuar con otros estudiantes o con profesor-investigador.

Diversas formas de comunicar ideas matemáticas (personales o convencionales)

Simbolismo alfanumérico u otros símbolos: lenguaje natural, gestos, ritmos, entre otros.

## RELACIONES FUNCIONALES

Estudiantes de primero. Perros y platos ( $y=x+5$ )

(Cañadas y Morales, 2016)



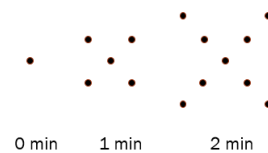
- Sin evidencia de relación funcional: S1-S4-S12-S15-S17-S23
- Recurrencia: -
- Correspondencia: S2-S2(\*)-S3(\*)-S5-S6-S6(\*)-S7-S7(\*)-S9-S10-S12(\*)-
- S13-S13(\*)-S15(\*)-S16-S17-S17(\*)-S18-S19-S20-S21-S21(\*)-S26-S26(\*)-
- S28-S28(\*)-S29-S29(\*)-S30-S30(\*)
- Covariación: S7-S12-S12(\*)-S13(\*)-S17-S21-S25-S28

## ERRORES Y DIFICULTADES

Estudiantes de sexto. Tarea puntos y tiempo

( $y=4x+1$ )

(Hidalgo y Cañadas, en elaboración)



- Error de conteo: se realiza un conteo de forma errónea.
- Error de cálculo: se realiza una operación matemática errónea
- Respuesta de un caso distinto al que se pide: se responde por otro caso al que se está preguntando (principalmente dibujando)
- Error numérico: se da como resultado un número y este es erróneo. No se sabe cómo procedió
- Patrón erróneo: se utiliza o se expresa un patrón no adecuado en el desarrollo de la respuesta
- No hay avance: se identifica cuando hay confusión, mencionando variadas estrategias; no entiende pregunta; no sabe cómo proceder

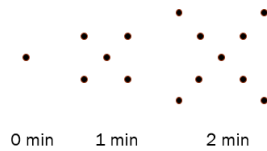


## MEDIACIÓN-INTERVENCIÓN

Estudiantes de sexto. Tarea puntos y tiempo

$$(y=4x+1)$$

(Hidalgo y Cañadas, en elaboración)



Que requieren acción del estudiante

- Volver al caso particular inicial: se sugiere volver a revisar el proceso desde el inicio.
- Volver al caso particular anterior: se sugiere volver al caso particular anterior trabajado, siendo este distinto del inicial.
- Volver a un caso particular cualquiera: se sugiere volver a un caso particular cualquiera, pero distinto del anterior y del inicial.
- Volver sobre el mismo caso particular : se sugiere al estudiante pensar nuevamente el caso por el cual se está preguntando

Que requieren acción del entrevistador

- Verbalizar el argumento o reflexión del estudiante: se repite verbalmente un argumento o una reflexión realizada anteriormente por el estudiante
- Repetir la pregunta: se repite la pregunta realizada, ya sea que ve al estudiante confundido o porque ha incurrido en un error
- Reformular la pregunta: se plantea una pregunta ya realizada de otra manera
- Calmar: se calma al estudiante (por ejemplo, diciéndole que tiene tiempo para responder o que no hay prisa)
- Repetir respuesta y pedir argumento: se repite la respuesta errónea del estudiante, sin mencionar que su respuesta no ha sido correcta y se realiza una pregunta de indagación de procedimiento. Por ejemplo se pregunta, "¿por qué?" o "¿cómo obtuviste ese resultado?"

## COMPARACIÓN DE FUNCIONES

43

Estudiantes de quinto. ( $y=2x$ ;  $y=3x-7$ )

(Moreno, Cañadas, Jaldo & Bautista, 2016)

■ Ideas clave:

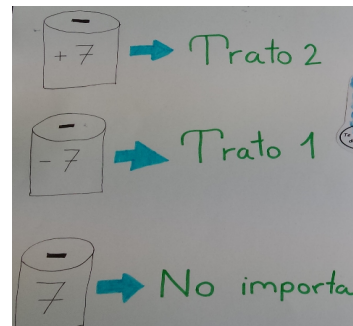
- Concepto de variable
- Dominio y co-dominio
- Punto de corte
- Comportamiento de las funciones con números grandes



44

- Concepto de variable
  - Variable como cantidad desconocida  
"Hay que hacerse una hipótesis de cuánto tendría"
  - Variable como una cantidad que varía  
"Hay infinitos números, puede ser cualquiera"

Algunos identifican el punto de corte





UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

# Pensamiento funcional en estudiantes de *educación primaria*

Antonio Moreno  
*Profesor del Departamento de  
Didáctica de la Matemática de la  
Universidad de Granada*

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2016-75771-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

45